 Вестник РАУ. Серия физико-математические и естественные науки, 2, 2007, 100 -105

УДК 517. 95

ИНДЕКС ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В R^n

А.А. Дарбинян

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

Настоящая работа посвящена исследованию нетеровости линейного дифференциального полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в R^n. Доказывается, что в определенных весовых пространствах индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами равен нулю.

Теория об индексе эллиптического оператора изучена многими авторами. В частности, двумерная теория (R^2) в значительной степени была завершена к 1961 г. А.И. Вольпертом [1]. Вольперт изучил общие граничные задачи для произвольной эллиптической системы в односвязной ограниченной области на плоскости, доказал эквивалентность эллиптичности и нетеровости этих задач в пространствах достаточно гладких функций. М.С. Агронович [2] доказал, что для того, чтобы сингулярный интегро-дифференциальный оператор на гладком многообразии был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы он был нетеровым. Л.А. Багиров [3] доказал, что если коэффициенты эллиптического оператора достаточно гладкие в R^n, то оператор в определенных весовых пространствах нетеров. Однако теория об индексе полуэллиптического оператора изучена не достаточно. В работах [4] и [5] доказано, если оператор в R^n удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то индекс оператора в определенных весовых пространствах конечен.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: R^n – n-мерное евклидово пространство, Z_+^n – множество мультииндексов, т.е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где α_j ($j=1,\dots,n$) – целые неотрицательные числа. Для $x,\xi\in R^n$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ (ν_j ($j=1,\dots,n$) – натуральные числа) и $\alpha\in Z_+^n$ положим, что

$$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,\ \alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_n!,\ \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n},\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n},$$

где $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(i^2=-1)$, $(\alpha:\nu)=\frac{\alpha_1}{\nu_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{\nu_n}$, $\nu_{\max}=\max\limits_{1\le j\le n}\nu_j$, $|x|=\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$.

Определение 1. Для вектора ν с натуральными компонентами обозначим через $\overline{Q}_\nu$ множество вещественных положительных функций q(x), для которых

1. $\frac{1}{q(x)} \to 0$ при $|x|\to\infty$,

2. $\forall\alpha\in Z_+^n\,(0<(\alpha:\nu)\le 1)$ $\quad \frac{\left|D^\alpha q(x)\right|}{q(x)^{1+(\alpha:\nu)\nu_{\max}}} \to 0$ при $|x|\to\infty$.

Определение 2. Для вектора ν с натуральными компонентами, области $\Omega\subset R^n$, функции $q\in\overline{Q}_\nu$ и натурального числа k обозначим через $H_q^{k,\nu}(\Omega)$ множество измеримых функций $\{u\}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q}(\Omega)\equiv\left(\sum_{(\alpha:\nu)\le k}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, q(x)^{2(k-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 3. Для вектора ν с натуральными компонентами, области $\Omega\subset R^n$ и натурального числа k обозначим через $H^{k,\nu}(\Omega)$ множество измеримых функций $\{u\}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{k,\nu}(\Omega)\equiv\left(\sum_{(\alpha:\nu)\le k}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы будем рассматривать операторы с вещественными коэффициентами.

Определение 4. Скажем, что линейный дифференциальный оператор $P(D)=\sum\limits_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha$ полуэллиптичен, если символ его главной части, т.е. ν, – однородный многочлен $P^0(\xi)\equiv\sum\limits_{(\alpha:\nu)=1} p_\alpha \xi^\alpha$, удовлетворяющий условию

$$P^0(\xi)\ne 0 \quad \text{при } 0\ne\xi\in R^n.$$

Определение 5. Скажем, что линейный ограниченный оператор A, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, нетеров, если:

1) подпространство решений уравнения $Au=0$ в B_1 имеет конечную размерность, т.е. $\dim\operatorname{Ker} A<\infty$;

2) область значений $\{A:B_1\}$ оператора A в B_2 замкнута;

3) фактор-пространство $B_2/\{A:B_1\}$ имеет конечную размерность, т.е. $\dim\operatorname{Coker} A<\infty$.

Разность $\operatorname{Ind}A = \dim\ker A - \dim\operatorname{Coker} A$ называется индексом оператора A.

Из теории нетеровых операторов известно, что

$$\dim\operatorname{Ker} A^* = \dim\operatorname{Coker} A \text{ и } \dim\operatorname{Coker} A^* = \dim\operatorname{Ker} A,$$

где A^* формально сопряженный к A оператор.

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(D) = \sum_{(\alpha:\nu)=1} C_\alpha D^\alpha + C_0, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условиям:

1. Оператор $P(D)$ полуэллиптичен.
2. Символ оператора $P(D)$ не равняется нулю, т.е.

$$P(\xi) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)=1} C_\alpha \xi^\alpha + C_0 \neq 0 \qquad \text{при всех } \xi \in R^n.$$

Из условия 2, в частности, следует, что оператор (1), действующий из $H^{k+1,\nu}(R^n)$ в $H^{k,\nu}(R^n)$, обладает ограниченным обратным оператором

$$P^{-1}(D): H^{k,\nu}(R^n) \to H^{k+1,\nu}(R^n).$$

Следовательно, ядро оператора $P(D)$ состоит из единственного нулевого элемента, т.е. $\operatorname{Ker} P = \{0\}$ и $\dim\operatorname{Ker}P = 0$. Так как оператор $P(D)$ само-сопряженный, то $\operatorname{Coker} P = \{0\}$ и $\dim\operatorname{Coker} P = 0$.

В силу того, что область значения оператора $P(D)$ в пространстве $H^{k,\nu}(R^n)$ замкнута, следует, что индекс оператора $P(D)$ из $H^{k+1,\nu}(R^n)$ в $H^{k,\nu}(R^n)$ конечен и

$$\operatorname{Ind} P = \dim\operatorname{Ker}P - \dim\operatorname{Coker} P = 0.$$

Следовательно, мы доказали следующую терему:

Теорема 1. Индекс отображения $P(D): H^{k+1,\nu}(R^n) \to H^{k,\nu}(R^n)$ конечен и равен нулю.

В силу $H_q^{k,\nu}(R^n) \subset H^{k,\nu}(R^n)$, имеем:

Следствие 1. Индекс отображения $P(D): H_q^{k+1,\nu}(R^n) \to H_q^{k,\nu}(R^n)$ конечен и равен нулю.

Известна (см. [2]) следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $A(D)$ – ограниченный оператор из $H_q^{k+1,\nu}(R^n)$ в $H_q^{k,\nu}(R^n)$, обладающий следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$

$$\|A(D)u\|_{k,\nu,q}(R^n) \le \varepsilon \|u\|_{k+1,\nu,q}(R^n) + M_\varepsilon \|u\|_{L_2}(K_N) \quad \forall u \in H_q^{k+1,\nu}(R^n),$$

где M_ε – постоянная, не зависящая от $u \in H_q^{k+1,\nu}(R^n)$, а

$K_N = \left\{ x \in R^n : |x_i| < N; i = 1, 2, ..., n \right\}$.

Тогда $A(D)$ – компактный оператор из $H_q^{k+1,\nu}(R^n)$ в $H_q^{k,\nu}(R^n)$.

Пусть $A(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$A(D) = \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha . \tag{2}$$

Теорема 3. $A(D)$ компактный оператор из $H_q^{k+1,\nu}(R^n)$ в $H_q^{k,\nu}(R^n)$.

Доказательство. Так как $q \in \overline{Q}_\nu$, то для любого $\varepsilon > 0$ с некоторой постоянной $N = N(\varepsilon)$ имеет место следующее:

$$\frac{1}{q(x)} < \varepsilon \quad \forall x \in R^n \setminus K_N , \tag{3}$$

где $K_N = \left\{ x \in R^n : |x_i| < N; i = 1, 2, ..., n \right\}$.

Пусть u – некоторая функция из $H_q^{k+1,\nu}(R^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A(D)u\|_{k,\nu,q}(R^n) &= \Big\| \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u \Big\|_{k,\nu,q} (R^n) = \\ &= \Big\| \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u \Big\|_{k,\nu,q} (R^n \setminus K_N) + \Big\| \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u \Big\|_{k,\nu,q} (K_N). \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Big\| \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u \Big\|_{k,\nu,q}^2 (R^n \setminus K_N) = \sum_{(\beta:\nu)\le k} \int_{R^n/K_N} | D^\beta \Big(\sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u \Big) |^2 q(x)^{2(k-(\beta:\nu))\nu_{\max}} dx \le$$

$$\le C_1 \sum_{(\beta:\nu)\le k} \sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha^2 \int_{R^n/K_N} | D^\beta \left(D^\alpha u \right) |^2 q(x)^{2(k-(\beta:\nu))\nu_{\max}} dx \le$$

$$\le C_1 \max_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha^2 \sum_{(\beta:\nu)\le k} \sum_{(\alpha:\nu)<1} \int_{R^n/K_N} | D^{\beta+\alpha} u |^2 \frac{q(x)^{2((k+1)-(\beta+\alpha:\nu))\nu_{\max}}}{q(x)^{2(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}} dx \le$$

$$\le C_1 \max_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha^2 \sum_{(\beta:\nu)\le k} \sum_{(\alpha:\nu)<1} \int_{R^n/K_N} \varepsilon^{2(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} | D^{\beta+\alpha} u |^2 q(x)^{2((k+1)-(\beta+\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \le$$

$$\le C_1 \max_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha^2 \varepsilon^{2(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \sum_{(\beta:\nu)\le k} \sum_{(\alpha:\nu)<1} \int_{R^n/K_N} | D^{\beta+\alpha} u |^2 q(x)^{2((k+1)-(\beta+\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \le$$

$$\le C_1 \max_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha^2 \varepsilon^{2(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \|u\|_{k+1,\nu,q}^2 (R^n).$$

Так как K_N прямоугольная и ограниченная область, имеем (см. [6])

$$\left\|\sum_{(\alpha:\nu)<1} a_\alpha D^\alpha u\right\|^2_{k,\nu,q}(K_N) \le \max_{(\alpha:\nu)<1} a^2_\alpha \sum_{(\alpha:\nu)<1} \left\|D^\alpha u\right\|^2_{k,\nu,q}(K_N) \le$$

$$\le \operatorname{card}\{\alpha \in Z^n_+; (\alpha:\nu)<1\} \max_{(\alpha:\nu)<1} a^2_\alpha \left(\varepsilon \left\|u\right\|^2_{k+1,\nu,q}(K_N) + C_\varepsilon \left\|u\right\|_{L_2}(K_N)\right) \le$$

$$\le \operatorname{card}\{\alpha \in Z^n_+; (\alpha:\nu)<1\} \max_{(\alpha:\nu)<1} a^2_\alpha \left(\varepsilon \left\|D^\alpha u\right\|^2_{k+1,\nu,q}(R^n) + C_\varepsilon \left\|u\right\|_{L_2}(K_N)\right),$$

где C_1 и C_ε некоторые постоянные, не зависящие от функции u, и в силу этого, используя (3) и (4), имеем

$$\left\|A(D)u\right\|_{k,\nu,q}(R^n) \le \tau_\varepsilon \left\|u\right\|_{k+1,\nu,q}(R^n) + M_\varepsilon \left\|u\right\|_{L_2}(K_N) \ \ \forall u \in H^{k+1,\nu}_q(R^n),$$

где $\tau_\varepsilon \equiv C_1 \max_{(\alpha:\nu)<1} a^2_\alpha \left(\varepsilon^{2(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} + \varepsilon \operatorname{card}\{\alpha \in Z^n_+; (\alpha:\nu)<1\}\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $M_\varepsilon = C_\varepsilon \operatorname{card}\{\alpha \in Z^n_+; (\alpha:\nu)<1\} \max_{(\alpha:\nu)<1} a^2_\alpha$ – постоянная, не зависящая от функции u.

Следовательно, в силу теоремы 2, $A(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$.

Известно (см. [7, 8]) следующее:

Теорема 4. Пусть индекс оператора $P(D)$ из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$ конечен, а $A(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$. Тогда оператор $P(D)+A(D)$ из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$ конечен и $\operatorname{Ind}(P+A) = \operatorname{Ind} P$.

Теорема 5. Индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$ равен нулю.

Доказательство. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный полуэллиптический оператор с постоянными коэффициентами. Тогда $P(D)$ можно представить в следующем виде:

$$P(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha = P_1(D) + P_2(D),$$

где

$$P_1(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)=1} p_\alpha D^\alpha + p'_0 \ \ \left(P_1(\xi) \ne 0\right) \quad \text{и} \quad P_2(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)<1} p_\alpha D^\alpha - p'_0 .$$

Из следствия 1 и теоремы 3 следует, что индекс оператора $P_1(D)$ из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$ равен нулю, а $P_2(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}_q(R^n)$ в $H^{k,\nu}_q(R^n)$.

Следовательно, в силу теоремы 4, индекс оператора $P(D)$ из $H_q^{k+1,v}(R^n)$ в $H_q^{k,v}(R^n)$ конечен и равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. // Труды Моск. Мат. Общ., 1961, т. 10, с. 41–87.
2. М.С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы. // Успехи Мат. Наук, 1965, т. 20, вып. 5(125), с. 3-120.
3. Л.А. Багиров, Эллиптические уравнения в неограниченной области. // Мат. сб. 1971, т. 86 (128), № 1 (9) с. 121–139.
4. Г.А. Карапетян, А.А. Дарбинян, Индекс полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами специального типа. / Труды годичной науч. конф. РАУ, 2006, с. 20-24.
5. Г.А. Карапетян, А.А. Дарбинян, Об индексе полуэллиптического оператора в R^n. // Изв. НАН. Арм., Мат., т. 42, № 5, 2007, с. 33-50.
6. О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М.: Наука, 1977.
7. R.T. Seeley, The index of elliptic systems of singular integral operators. // J. of Math. Analysis And App. 7, 1963, p. 289-309.
8. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. // Успехи Мат. Наук, 1957, т. 12, вып. 2(74), с. 43-118.

Поступила в редакцию
18. 12. 2007

Ð²êî²îàôÜ ¶àðÌ²ÎÆòÜºðàì ÎÆê²¾ÈÆäîÆÎ úäºð²îàðÆ ÆÜ¸ºøêÀ R^n - àôØ

Ա.Ա. Դարբինյան

²Ûë ³ßË³ï³ÝùÁ ÝíÇñí³Í ¿ ·Í³ÛÇÝ ¹Çý»ñ»ÝóÇ³É Ñ³ëï³ï áõÝ ·áñÍ³ÏÇóÝ»-ñáí ÏÇë³¿ÉÇåïÇÏ ûå»ñ³ïáñÇ ÝÛáï»ñ³ÛÝáõÃÛ³Ý Ñ»ï³½áïÙ³ÝÁ R^n-áõÙ: ²å³óáõóíáõÙ ¿, áñ áñáß³ÏÇ Ïßé³ÛÇÝ ï³ñ³ÍáõÃÛáõÝÝ»ñáõÙ Ñ³ëï³ïáõÝ ·áñÍ³ÏÇóÝ»ñáí ÏÇë³¿ÉÇåïÇÏ ûå»ñ³ïáñÇ ÇÝ¹»ùëÁ Ñ³í³ë³ñ ¿ ½ñáÛÇ:

INDEX OF A SEMIELLIPTICAL OPERATOR WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN R^n

A.A. Darbinyan

The current thesis describes the noethericity of the linear differential semi-elliptical operator with constant coefficients in R^n. It’s proved that in certain weight spaces the index of a semi-elliptical operator with constant coefficients equals zero.