УДК 517. 968. 23

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ – ФУНКЦИЙ

К.В. Арутюнян, А.Г. Камалян

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

В настоящей работе дается явное описание множества частных индексов треугольных матриц-функций (м.-ф.) с факторизуемыми фиксированными диагональными элементами в терминах мажорации.

Введение

Задача факторизации м.-ф. и, в частности, задача определения ее факторизационных индексов играет важную роль в теории сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера–Хопфа и уравнений в свертках на конечном отрезке.

Приведем определение факторизации м.-ф. и частных индексов. Пусть γ карлесоновский замкнутый контур (см. [9]) положительной ориентации в комплексной плоскости C, которая является границей односвязной области D_+ ($0 \in D_+$). Дополнение к $D_+ \cup \gamma$ в $C \cup \{\infty\}$ обозначим через D_-.

Пусть I единичный оператор, а S – сингулярный интегральный оператор в $L_p = L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} v.p.\int_\gamma \frac{1}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau, \varphi \in L_p .$$

Как известно, оператор S ограничен в L_p и $S^2=I$ (см. [9, 10]). Рассмотрим проекторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+L_p$, $L_p^- = P_-L_p + const.$ Ниже под $X^{m\times n}$ (X^n) понимается множество матриц (векторов) порядка $m\times n$ (n) с элементами из множества X. Под правой факторизацией м.-ф. $W(t) \in L_\infty^{n\times n}(\gamma)$ в классе $L_\infty (1 < p < \infty)$ относительно контура γ будем понимать представление ее в виде:

$$W(t) = W_-(t)\cdot \Lambda_{\overline{\kappa}}(t)\cdot W_+(t),\ t \in \gamma ,$$

где: 1) $W_+ \in \left[L_q^+\right]^{n\times n}$, $W_+^{-1} \in \left[L_p^+\right]^{n\times n}$, $W_- \in \left[L_p^-\right]^{n\times n}$, $W_-^{-1} \in \left[L_q^-\right]^{n\times n}$, $q = \dfrac{p}{1-p}$;

2) $\Lambda_{\bar\kappa} = diag\left(t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, ..., t^{\kappa_n}\right)$, $\bar\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n) \in Z^n$, $\kappa_1 \le \kappa_2 \le ... \le \kappa_n$;

3) оператор $W_+ P_+ W_+^{-1}$ ограничен.

Числа $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n$ называются правыми p-частными индексами м.-ф. W. Если $\kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_n = 0$, то факторизация называется канонической. Как известно (см. [1, 2]), правые частные индексы м.-ф. определяются однозначно. В дальнейшем вместо терминов "правая факторизация" и "правые частные индексы" будем пользоваться, соответственно, терминами "факторизация" и "частные индексы".

Обозначим через $T(\bar\chi)$, где $\bar\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \in Z^n$, класс нижне–треугольных м.-ф. $W \in L_\infty^{n\times n}(\gamma)$, диагональные элементы которых допускают факторизацию $w_{m,m} = w_{m,m}^- \cdot t^{\chi_m} \cdot w_{m,m}^+$ $(m = 1, 2, ..., n)$. Известно, что такие м.-ф. допускают факторизацию (см. [1, 2]). Более того, для широкого класса треугольных м.-ф. условие факторизуемости диагональных элементов является также необходимым условием факторизуемости м.-ф. (см. [2]).

Ниже для всякого вектора $\bar\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \in Z^n$ полагаем $\bar\chi_\uparrow = \left(\chi_{[1]}, \chi_{[2]}, ..., \chi_{[n]}\right)$, где $\chi_{[1]} \le \chi_{[2]} \le ... \le \chi_{[n]}$ – компоненты вектора $\bar\chi$, упорядоченные по неубыванию.

Определение. Пусть $\bar\kappa, \bar\chi \in Z^n$. Говорят, что вектор $\bar\kappa$ является мажорантой вектора $\bar\chi$ и пишут $\bar\kappa \prec \bar\chi$, если $\sum_{m=1}^{p} \kappa_{[m]} \ge \sum_{m=1}^{p} \chi_{[m]}$, $1 \le m \le n-1$, $\sum_{m=1}^{n} \kappa_m = \sum_{m=1}^{n} \chi_m$.

Понятие мажорации введено в [14]. Этому понятию посвящена работа [8], где приведены эквивалентные определения и ряд приложений в различных областях математики.

Множество всех векторов $\bar\kappa \in Z^n$, компоненты которых являются частными индексами некоторой м.-ф. $W \in T(\bar\chi)$, обозначим через $\Phi(\bar\chi)$.

В силу известного результата Гохберга – Крейна (см. [1, 2]), м.-ф. $W(t) \in T(\bar\chi)$ можно представить в виде $W = \Lambda_{\bar\chi} \cdot V$, где $\Lambda_{\bar\chi} = diag\left(t^{\chi_1}, t^{\chi_2}, ..., t^{\chi_n}\right)$, а м.-ф. V допускает каноническую факторизацию $V = V_- \cdot V_+$ (V, V_-, V_+ – нижне-треугольные м.-ф.). Таким образом, описание множества $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ сводится к описанию частных индексов м.-ф. вида $W = \Lambda_{\overline{\chi}} \cdot V_-$ (V_- – нижне-треугольная м.-ф.). Задача описания множества частных индексов произвольных (нетреугольных) м.-ф. вида $W = \Lambda_{\overline{\chi}} \cdot V$, где $\Lambda_{\overline{\chi}} = diag\left(t^{\chi_1}, t^{\chi_2}, ..., t^{\chi_n}\right)$, а м.-ф. V допускает каноническую факторизацию $V = V_- \cdot V_+$, была решена в [3] (см. также [12]). Доказано, что $\overline{\kappa} = \left(\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n\right) \in Z^n$, $\kappa_1 \le \kappa_2 \le ... \le \kappa_n$ являются частными индексами м.-ф. W тогда и только тогда, когда $\overline{\kappa} \prec \overline{\chi}$.

Для треугольных м.-ф. необходимые условия $\overline{\kappa} \prec \overline{\chi}$ впервые получены И.М. Спитковским [15, 16] (см. также [11, 2]). Известная теорема Гохберга – Крейна (в наших терминах выглядит следующим образом: если $\chi_1 \ge \chi_2 \ge ... \ge \chi_n$, то $\Phi\left(\overline{\chi}\right) = \left\{\overline{\chi}_\uparrow\right\}$) показывает, что необходимое условие $\overline{\kappa} \prec \overline{\chi}$ является далеко не достаточным, чтобы $\overline{\kappa} \in \Phi\left(\overline{\chi}\right)$. В работе [2] поставлена задача описания множества $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ при $n > 2$. При $n = 2$ эта задача решена в [2]. В статьях [5] и [6] дано явное описание множества $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ в случае $n = 3$. В случае произвольного n алгоритмическое описание множества $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ дано в статьях [6] и [7]. В настоящей работе дается явное описание множества $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ в терминах мажорации.

Предварительные сведения.

Обозначим через $P^-\left(\overline{\chi}\right)$ класс нижне-треугольных, полиномиальных относительно t^{-1} м.-ф. $V_- = \left(v_{m,k}\right)_{m,k=1}^n$ с элементами вида:

$$v_{m,k} = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{l_{m,k}} a_{m,k}^{(l)} \cdot t^{-l}, 1 \le k < m \le n, \chi_m - \chi_k \ge 2, l_{m,k} \le \chi_m - \chi_k - 1, \\ \delta_{m,k}, 1 \le m \le k \le n \vee \left(\chi_m - \chi_k \le 1, 1 \le k < m \le n\right), \end{cases}$$

где $\delta_{m,k}$ символ Кроннекера, $l_{m,k} \in Z_+ = N \cup \{0\}$. Из $V_- \in P^-\left(\overline{\chi}\right)$ следует $V_-^{-1} \in P^-\left(\overline{\chi}\right)$.

Множество $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ совпадает с множеством частных индексов всех полиномиальных м.-ф. вида $W = \Lambda_{\overline{\chi}} \cdot V_{-}$, где $V_{-} \in P^{-}\left(\overline{\chi}\right)$. Это следует, в частности, из леммы статьи [4].

При $1 \le j < i \le n, l \in N$ преобразование $\varphi_{j,l} : Z^n \to Z^n$, определенное формулой

$$\varphi_{j,l}\left(\overline{\chi}\right) = \begin{cases} \overline{\chi}^{(1)}, если\, \chi_i - \chi_j \ge 2, l \le \chi_i - \chi_j, \\ \overline{\chi}, если\, \chi_i - \chi_j \le 1 \vee l \ge \chi_i - \chi_j. \end{cases}, \quad \chi_m^{(1)} = \begin{cases} \chi_m, m \ne i, m \ne j, \\ \chi_i + l, m = i, \\ \chi_j - l, m = j, \end{cases} \qquad (1)$$

назовем *(j,i,l)*-преобразованием. Здесь $\overline{\chi} = \left(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n\right)$, $\overline{\chi}^{(1)} = \left(\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, ..., \chi_n^{(1)}\right) \in Z^n$.

Преобразование $\varphi : Z^n \to Z^n$ назовем *j*-преобразованием, если его можно представить в виде композиции $\left(j, i_s, l_s\right)$-преобразований:

$$\varphi = \varphi_{i_k, l_k} \circ \varphi_{i_{k-1}, l_{k-1}} \circ ... \circ \varphi_{i_1, l_1}, \qquad (2)$$

где $\overline{l} = \left(l_1, l_2, ..., l_k\right) \in N^k$, $l_1 \ge l_2 \ge ... \ge l_k$, $i_s \in I_j\left(\overline{\chi}\right) = \left\{i \in \left\{j+1, ..., n\right\} : \chi_i - \chi_j \ge 2\right\}$, $s = 1, ..., k$. Если в представлении (2) $i_1, ..., i_k$ попарно различны и выполняются условия: 1) $l_1 > l_2 > ... > l_k$, 2) $\chi_{i_1} \ge \chi_{i_2} \ge ... \ge \chi_{i_k}$, 3) $l_s \ge \dfrac{\chi_{i_s} - \chi_{i_{s-1}} + l_{s-1} + l_{s+1}}{2}$, где $\overline{\chi}^{(s)} = \varphi_{i_s, l_s}\left(\overline{\chi}^{(s-1)}\right)$, $s = 1, ..., k$, $\overline{\chi}^{(0)} = \overline{\chi}$, $l_0 = l_{k+1} = 0$, $i_0 = j$, то φ назовем каноническим *j*-преобразованием. Здесь $\overline{\chi}^{(k)} = \varphi\left(\overline{\chi}\right)$. Заметим, что $\chi_{i_1}^{(k)} \ge \chi_{i_2}^{(k)} \ge ... \ge \chi_{i_k}^{(k)} \ge \chi_j^{(k)}$, то есть порядок компонент вектора при каноническом *j*-преобразовании не меняется.

Обозначим через $\Psi_j^*\left(\overline{\chi}\right)$ множество образов вектора $\overline{\chi} \in Z^n$ при всевозможных канонических j-преобразованиях, включая вектор $\overline{\chi}$. Через $\Psi_j\left(\overline{\chi}\right)$ обозначим множество всех векторов, получающихся упорядочением по неубыванию компонент векторов из $\Psi_j^*\left(\overline{\chi}\right)$. Если $A \subset Z^n$, то обозначим через $\Psi_j^*\left(A\right) = \bigcup_{\overline{\chi} \in A} \Psi_j^*\left(\overline{\chi}\right)$.

В статье [7] доказаны лемма 1 и теорема 1.

Лемма 1. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда справедливо равенство: $\Psi_j\left(\overline{\chi}\right) = \Phi_j\left(\overline{\chi}\right)$.

Теорема 1. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда справедливо равенство:

$$\Phi(\overline{\chi}) = \Psi_1\left(\Psi_2^* ... \left(\Psi_{n-1}^*(\overline{\chi})\right)\right).$$

Теорема 2. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$, $\chi_{i_1} \le \chi_{i_2} \le ... \le \chi_{i_k}$. Тогда $\overline{\kappa} \in \Psi_j^*(\overline{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа m_s, $1 \le s \le k$ такие, что: 1) $\kappa_j \le \kappa_{i_1} \le \kappa_{i_2} \le ... \le \kappa_{i_k}$, 2) $\kappa_j = \chi_j + \sum_{s=1}^{k} m_s$,

3) $\kappa_{i_s} = \chi_{i_s} - m_s$, $1 \le s \le k$, где $\{i_1, ..., i_k\} \subset I_j(\overline{\chi}) = \left\{i \in \{j+1, ..., n\} : \chi_i - \chi_j \ge 2\right\}$.

Теорема 2 является непосредственным следствием леммы 1.

Основные результаты.

Из теорем 1 и 2 следует теорема 3.

Теорема 3. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда $\overline{\kappa}$ принадлежит $\Phi(\overline{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа m_{sk}, $1 \le k < s \le n$ и некоторая перестановка σ такие, что:

1) $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p + \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} - \sum_{k=1}^{p-1} m_{pk}, 1 \le p \le n$,

2) если $m_{ij} > 0$, то $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j+1}^{i-1} m_{ik} + \sum_{k=i+1}^{n} m_{ki} \ge 2$ и $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j}^{i-1} m_{ik} - \sum_{k=j+1}^{n} m_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} m_{ki} \ge 0$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда $\overline{\kappa}$ принадлежит $\Phi(\overline{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$ и некоторая перестановка σ такие, что:

1) если $\kappa_{\sigma(p)} < \chi_p$, то $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0$, $\sum_{k=1}^{p-1} m_{pk} > 0$ и $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p - \sum_{k=1}^{p-1} m_{pk}$,

2) если $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p$, то $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0$ и $\sum_{k=1}^{p-1} m_{pk} = 0$,

3) если $\kappa_{\sigma(p)} > \chi_p$, то $\sum_{k=1}^{p-1} m_{pk} = 0$, $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} > 0$ и $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p + \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp}$,

4) если $m_{ij} > 0$, то $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j+1}^{i-1} m_{ik} \ge 2$ и $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j}^{i-1} m_{ik} - \sum_{k=j+1}^{n} m_{kj} \ge 0$.

Доказательство. Теорему доказажем по методу математической индукции. При $n = 2$ утверждение теоремы очевидно. Пусть утверждение теоремы верно при $n = k$. Докажем утверждение теоремы при $n = k + 1$. Согласно предположению индукции и теоремы 2, существуют неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$ и некоторая перестановка σ^* такие, что:

$\kappa'_{\sigma(p)} = \chi_p + \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} - \sum_{k=2}^{p-1} m_{pk}$, $2 \le p \le n$. При этом:

1) если $\kappa'_{\sigma^*(p)} < \chi_p$, то $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0, \sum_{k=2}^{p-1} m_{pk} > 0$ и $\kappa_{\sigma^*(p)} = \chi_p - \sum_{k=1}^{p-1} m_{pk}$,

2) если $\kappa'_{\sigma^*(p)} = \chi_p$, то $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0$ и $\sum_{k=2}^{p-1} m_{pk} = 0$,

3) если $\kappa'_{\sigma^*(p)} > \chi_p$, то $\sum_{k=2}^{p-1} m_{pk} = 0$, $\sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} > 0$ и $\kappa_{\sigma^*(p)} = \chi_p + \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp}$,

4) если $m_{ij} > 0$, то $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j+1}^{i-1} m_{ik} \ge 2$ и $\chi_i - \chi_j - \sum_{k=j}^{i-1} m_{ik} - \sum_{k=j+1}^{n} m_{kj} \ge 0$, $2 \le j < i \le n$.

Тогда по теореме 3 имеем $\kappa_{\sigma(p)} = \kappa'_{\sigma^*(p)} - m_{p1}$, $2 \le p \le n$, $\kappa_{\sigma(1)} = \chi_1 + \sum_{p=2}^{n} m_{p1}$. При этом, если $m_{p1} > 0$ и $\kappa'_{\sigma^*(p)} \le \chi_p$, то условия теоремы сохраняются. Рассмотрим случай $m_{p1} > 0$ и $\kappa'_{\sigma^*(p)} > \chi_p$. Тогда либо 1) $\kappa_{\sigma(p)} \le \chi_p$, либо 3) $\kappa_{\sigma(p)} > \chi_p$. $0 < \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp} < m_{p1}$. В первом случае, если выбрать числа m'_{p1} по формулам $m'_{k1} = m_{k1} + m_{kp}$, $m'_{p1} = m_{p1} - \sum_{k=p+1}^{n} m_{kp}$, $m'_{kp} = 0$, то условия теоремы сохранятся. Во втором случае, если $m_{p1} \le m_{kp}$, то числа выбираем $m'_{k1} = m_{k1} + m_{p1}$, $m'_{p1} = 0$, $m'_{kp} = m_{kp} - m_{p1}$; если же $m_{p1} > m_{kp}$, то числа выбираем $m'_{k1} = m_{k1} + m_{kp}$, $m'_{p1} = 0$, $m'_{kp} = m_{kp} - m_{p1}$ и процедуру продолжаем до тех пор, пока m'_{p1} не станет равным нулю. При этом, после каждого шага условия теоремы сохраняются.

Теорема 5. Пусть $\overline{\kappa}, \overline{\chi} \in Z^n$. Тогда $\overline{\kappa}$ $(\kappa_1 \le \kappa_2 \le ... \le \kappa_n)$ принадлежит $\Phi(\overline{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$ и некоторая перестановка σ такие, что:

1) если $\kappa_{\sigma(p)} < \chi_p$, то $\sum\limits_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{p-1} m_{pk} > 0$ и $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} m_{pk}$,

2) если $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p$, то $\sum\limits_{k=p+1}^{n} m_{kp} = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{p-1} m_{pk} = 0$,

3) если $\kappa_{\sigma(p)} > \chi_p$, то $\sum\limits_{k=1}^{p-1} m_{pk} = 0$, $\sum\limits_{k=p+1}^{n} m_{kp} > 0$ и $\kappa_{\sigma(p)} = \chi_p + \sum\limits_{k=p+1}^{n} m_{kp}$,

4) если $m_{ij} > 0, 1 \le j < i \le n$, то $\chi_j < \kappa_{\sigma(j)} \le \kappa_{\sigma(i)} < \chi_i$.

Доказательство. Теорему доказажем методом математической индукции. При $n = 2$ утверждение теоремы очевидно. Пусть утверждение теоремы верно при $n = k$. Доказажем утверждение теоремы при $n = k + 1$. Согласно предположению индукции и теоремы 5, существуют неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$ и некоторая перестановка σ такие, что выполняются условия теоремы 5 при $n = k + 1$ и условие 4) при $n = k$, то есть если $m_{ij} > 0$, то $\chi_i - \chi_j - \sum\limits_{s=2}^{i-1} m_{is} - \sum\limits_{s=j+1}^{k+1} m_{sj} \ge 0$. Пусть для некоторого $m_{ij} > 0$ верно $\chi_i - \chi_j - \sum\limits_{s=2}^{i-1} m_{is} - \sum\limits_{s=j+1}^{k+1} m_{sj} \ge 0$ и $\chi_i - \chi_j - \sum\limits_{s=1}^{i-1} m_{is} - \sum\limits_{s=j+1}^{k+1} m_{sj} < 0$. Числа m'_{ps} можно выбрать по формулам $m'_{ij} = m_{ij} - \left(\chi_j - \chi_i + \sum\limits_{s=j+1}^{k+1} m_{sj} + \sum\limits_{s=1}^{k+1} m_{is} \right)$, $m'_{i1} = m_{j1}$, $m'_{j1} = m_{i1}$, а $\kappa'_{\sigma(j)} = \kappa_{\sigma(i)}$, $\kappa'_{\sigma(i)} = \kappa_{\sigma(j)}$. При этом условия 1), 2), 3) теоремы сохраняются. Продолжая эти преобразования, получим m'_{pk}, которые удовлетворяют также условию 4).

Заметим, что в условиях теоремы 5 $\chi_i - \chi_j \le 1$ или $\kappa_{\sigma(i)} < \kappa_{\sigma(j)}$.

Введем понятие квазимажорации.

Определение. Пусть $\overline{\kappa}, \overline{\chi} \in Z^n$. Скажем, что вектор $\overline{\kappa}$ является квазимажорантой вектора $\overline{\chi}$ и обозначим $\overline{\kappa} \prec_Q \overline{\chi}$, если:

$$1)\ \sum_{m=1}^{p} \kappa_m \ge \sum_{m=1}^{p} \chi_m,\ p \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ 2)\ \sum_{m=1}^{n} \kappa_m = \sum_{m=1}^{n} \chi_m .$$

Определение. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Семейство перестановок τ множества $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $\tau^{-1}(j) < \tau^{-1}(i)$, $1 \le j < i \le n$ как только $\chi_i - \chi_j \ge 2$, обозначим через $\Im(\overline{\chi})$.

Определение. Пусть $\overline{\kappa}, \overline{\chi} \in Z^n$. Семейство перестановок τ множества $\Delta = \{1, 2, ..., n\}$ таких, что $\tau^{-1}(j) < \tau^{-1}(i)$, $1 \le j < i \le n$ как только $\chi_j < \kappa_{\sigma(j)} \le \kappa_{\sigma(i)} < \chi_i$, обозначим через $\Im_\sigma(\overline{\chi}, \overline{\kappa})$.

Элементарную перестановку обозначим через

$$\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & ... & i & i+1 & ... & n \\ 1 & ... & i+1 & i & ... & n \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Для любой перестановки $\tau \in \Im(\overline{\chi})$ существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im(\overline{\chi})$ такие, что $\tau = \tau_{i_k} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$.

Доказательство. Сначала методом математической индукции доказажем, что если $\chi_i - \chi_j \le 1$, $1 \le j < i \le n$, то существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im(\overline{\chi})$ такие, что $\tau = \tau_{i_k} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$ и $\tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j)$. Если $i - j = 1$, то $\tau = \tau_j$. Пусть утверждение верно при $i - j = k$. Докажем утверждение теоремы при $i - j = k + 1$. Если $\chi_i - \chi_j \le 1$, $1 \le j < i \le k+1$, $i - j = k+1$, то либо $\chi_i - \chi_{j+1} \le 1$, тогда по предположению индукции существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im(\overline{\chi})$ такие, что $\tau^* = \tau_{i_p} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$ и $(\tau^*)^{-1}(i) < (\tau^*)^{-1}(j+1)$, и в качестве τ можно взять $\tau = \tau_j \cdot \tau^*$, либо $\chi_{j+1} - \chi_j \le 1$, тогда по предположению индукции, примененной к $\overline{\chi_{\tau_j}}$, существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im(\overline{\chi})$ такие, что $\tau^* = \tau_{i_p} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$, и в качестве τ можно взять $\tau = \tau^* \cdot \tau_j$. Пусть теперь τ произвольная перестановка, принадлежащая $\Im(\overline{\chi})$. Если $1 \le j < i \le n$ и $\tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j)$, то из определения τ имеем $\chi_i - \chi_j \le 1$. Следовательно, существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im(\overline{\chi})$ такие, что $\tau_{ij} = \tau_{i_p} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$ и $(\tau_{ij})^{-1}(i) < (\tau_{ij})^{-1}(j)$. Применяя эти рассуждения к $\overline{\chi_{\tau_{ij}}}$, через конечное число получим некоторую перестановку $\tau^* \in \Im(\overline{\chi})$, являющуюся произведением элементарных перестановок, такую, что из $1 \le j < i \le n$, $\tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j)$ следует $(\tau^*)^{-1}(i) < (\tau^*)^{-1}(j)$. Следовательно $\tau = \tau^*$.

Лемма 3. Пусть $\overline{\kappa}, \overline{\chi} \in Z^n$. Для любой перестановки $\tau \in \Im_\sigma(\overline{\chi}, \overline{\kappa})$ существуют перестановки $\tau_{i_s} \in \Im_\sigma(\overline{\chi}, \overline{\kappa})$ такие, что $\tau = \tau_{i_k} \cdot ... \cdot \tau_{i_1}$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2.

Теорема 6. Пусть $\bar{\chi}$, $\bar{\kappa} \in Z^n$. Тогда $\bar{\kappa}$ $(\kappa_1 \le \kappa_2 \le \ldots \le \kappa_n)$ принадлежит $\Phi(\bar{\chi})$ тогда и только тогда, когда существует некоторая перестановка σ такая, что $\bar{\kappa}_{\sigma\tau} \prec_Q \bar{\chi}_\tau$ для любой перестановки $\tau \in \Im(\bar{\chi})$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Согласно теореме 5, $\bar{\kappa}$ $(\kappa_1 \le \kappa_2 \le \ldots \le \kappa_n)$ принадлежит $\Phi(\bar{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$ и некоторая перестановка σ, удовлетворяющие условиям 1) – 4). Из этих условий, в частности, следует $\sum_{m=1}^{p}\left(\kappa_{\sigma(m)} - \chi_m\right) = \sum_{i=p+1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,p-1} m_{ij} \ge 0$, $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то есть $\bar{\kappa}_\sigma \prec_Q \bar{\chi}$. Для любой перестановки τ, удовлетворяющей условию: если $1 \le j < i \le n$, $\chi_i - \chi_j \ge 2$, то $\tau(j) < \tau(i)$, $\chi_{\tau(i)} - \chi_{\tau(j)} \ge 2$, $\sum_{m=1}^{p}\left(\kappa_{\sigma\tau(m)} - \chi_{\tau(m)}\right)$ также равно сумме чисел m_{pk} (те из m_{pk}, которые, входя с отрицательным знаком, равны нулю по условиям теоремы 5), следовательно, $\bar{\kappa}_{\sigma\tau} \prec_Q \bar{\chi}_\tau$.

Достаточность. Достаточность докажем методом математической индукции. При $n = 2$ утверждение теоремы легко доказать. Пусть утверждение теоремы верно при $n = k$. Доказажем утверждение теоремы при $n = k+1$. Пусть $\bar{\chi}$, $\bar{\kappa}_\sigma \in Z^n$ такие, что для любой перестановки верно $\bar{\kappa}_{\sigma\tau} \prec_Q \bar{\chi}_\tau$.

1) Если при этом $\kappa_{\sigma(i)} = \chi_i$ для некоторого $1 \le i \le k+1$, то для $\bar{\kappa}'_{\sigma'} = \left(\kappa_{\sigma(1)}, \ldots, \kappa_{\sigma(i-1)}, \kappa_{\sigma(i+1)}, \ldots, \kappa_{\sigma(k+1)}\right)$, $\bar{\chi}' = \left(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \ldots, \chi_{k+1}\right) \in Z^k$ по предположению индукции утверждение теоремы 6 верно.

2) Пусть теперь $\kappa_{\sigma(i)} \ne \chi_i$, $1 \le i \le k+1$. Тогда $\kappa_{\sigma(i)} < \chi_i$, $p+1 \le i \le k+1$ и $\kappa_{\sigma(p)} > \chi_p$ для некоторого $1 \le p \le k$. Существуют i_s, $p+1 \le i_s \le k+1$ такие, что $\chi_{i_s} - \chi_p \ge 2$ и $\chi_i - \chi_p \le 1$, $p+1 < i \le k+1$, $i \ne i_s; p$, $s \in \{1, \ldots, j\}$. Так как при этом $\sum_{s=1}^{j}\left(\chi_{i_s} - \kappa_{\sigma(i_s)}\right) \ge \kappa_{\sigma(p)} - \chi_p$, то можно выбрать неотрицательные целые числа $m_{i_s p}$, $s \in \{1, \ldots, j\}$ такие, что

$$\max\left\{0; \sum_{l=p+1}^{i_s}\left(\chi_l-\kappa_{\sigma(l)}\right)-\sum_{l=1}^{p-1}\left(\kappa_{\sigma(l)}-\chi_l\right)-\sum_{l=1}^{s-1}m_{i_l p}\right\}\le m_{i_s p}\le \chi_{i_s}-\kappa_{\sigma(i_s)},$$

$\sum_{l=1}^{j} m_{i_l p}=\kappa_{\sigma(p)}-\chi_p$. При этом, если положить $\overline{\chi}^{(1)}=\left(\chi_1^{(1)},\dots,\chi_{k+1}^{(1)}\right)$,

$$\chi_l^{(1)}=\begin{cases}\chi_l, l\neq i_s, l\neq p,\\ \kappa_{\sigma(p)}, l=p,\\ \chi_{i_s}-m_{i_s p}, l=i_s.\end{cases} \quad \text{и} \quad \overline{\kappa}'_{\sigma'}=\left(\kappa_{\sigma(1)},\dots,\kappa_{\sigma(i-1)},\kappa_{\sigma(i+1)},\dots,\kappa_{\sigma(k+1)}\right),$$

$\overline{\chi}'=\left(\chi_1^{(1)},\dots,\chi_{p-1}^{(1)},\chi_{p+1}^{(1)},\dots,\chi_{k+1}^{(1)}\right)\in Z^k$, то по предположению индукции утверждение теоремы 6 верно.

Теорема 7. Пусть $\overline{\chi}$, $\overline{\kappa}\in Z^n$. Тогда $\overline{\kappa}$ $\left(\kappa_1\le\kappa_2\le\ldots\le\kappa_n\right)$ принадлежит $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ тогда и только тогда, когда существует некоторая перестановка σ такая, что $\overline{\kappa}_{\sigma\tau}\prec_Q \overline{\chi}_\tau$ для любой перестановки $\tau\in\Im_\sigma\left(\overline{\chi},\overline{\kappa}\right)$.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 6. Заметим, что в условиях теоремы 7 справедливы соотношения: $\overline{\kappa}\prec_Q \overline{\chi}_{\sigma^{-1}}$, $\overline{\kappa}_\sigma\prec_Q \overline{\chi}$, $\overline{\kappa}_{\sigma\pi}\prec_Q \overline{\chi}_\pi=\overline{\chi}_\uparrow$, $\overline{\kappa}\prec\overline{\chi}$.

Определение. Пусть $\overline{\chi}$, $\overline{\kappa}\in Z^n$. Скажем, что вектор $\overline{\kappa}$ $\left(\kappa_1\le\kappa_2\le\ldots\le\kappa_n\right)$ является T-мажорантой вектора $\overline{\chi}$, и обозначим $\overline{\kappa}\prec_T\overline{\chi}$, если существует некоторая перестановка σ такая, что:

1) $\sum\limits_{k+1\le i\le n,\chi_k<\kappa_{\sigma(k)}\le\kappa_{\sigma(i)}<\chi_i}\left(\chi_i-\kappa_{\sigma(i)}\right)\ge\sum\limits_{k\le p\le n,\chi_p<\kappa_{\sigma(p)}}\left(\kappa_{\sigma(p)}-\chi_p\right)$, $1\le k\le n$,

2) $\sum\limits_{m=1}^{n}\kappa_m=\sum\limits_{m=1}^{n}\chi_m$.

Теорема 8. Пусть $\overline{\chi}$, $\overline{\kappa}\in Z^n$. Тогда $\overline{\kappa}$ $\left(\kappa_1\le\kappa_2\le\ldots\le\kappa_n\right)$ принадлежит $\Phi\left(\overline{\chi}\right)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\kappa}\prec_T\overline{\chi}$.

Доказательство: ***Необходимость***. Необходимость является непосредственным следствием теоремы 5.

Достаточность. Пусть $\overline{\kappa}\prec_T\overline{\chi}$. Рассмотрим множество $\Delta^+=\left\{i\in\Delta:\kappa_{\sigma(i)}>\chi_i\right\}$, $\Delta^-=\left\{i\in\Delta:\kappa_{\sigma(i)}<\chi_i\right\}$. Если $\Delta^+=\varnothing$, то $\overline{\kappa}_\sigma=\overline{\chi}\in\Phi\left(\overline{\chi}\right)$.

Если $\Delta^+ \neq \varnothing$, $\Delta^+ = \{k_1^+, ..., k_p^+\}$ и $k_1^+ > ... > k_p^+$, из $\overline{\kappa} \prec_T \overline{\chi}$ имеем $\sum_{k_1^+ + 1 \le i \le n, \chi_{k_1^+} < \kappa_{\sigma(k_1^+)} \le \kappa_{\sigma(i)} < \chi_i} \left(\chi_i - \kappa_{\sigma(i)}\right) \ge \kappa_{\sigma(k_1^+)} - \chi_{k_1^+}$, следовательно, существуют $k_s^- \in \Delta^-$, $k_s^- > k_1^+$, $s = 1, ..., l$ и неотрицательные целые числа $\sum_{s=1}^{p} m_{k_s^- k_1^+} = \kappa_{\sigma(k_1^+)} - \chi_{k_1^+}$, $m_{k_s^- k_1^+} \le \chi_{k_s^-} - \kappa_{\sigma(k_1^+)}$, $s = 1, ..., l$. Взяв $\overline{\chi}^{(1)} = \left(\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, ..., \chi_n^{(1)}\right)$,

$$\chi_l^{(1)} = \begin{cases} \chi_l, l \neq k_s^-, l \neq k_1^+, \\ \kappa_{\sigma(k_1^+)}, l = k_1^+, \\ \chi_{k_s^-} - m_{k_s^- k_1^+}, l = m_{k_s^- k_1^+}. \end{cases}, \quad s = 1, ..., l, \quad 1 \le l \le n,$$ будем иметь

$\overline{\kappa} \prec_T \overline{\chi}^{(1)}$. Продолжая эти рассуждения, через p шагов найдем неотрицательные целые числа m_{pk}, $1 \le k < p \le n$, удовлетворяющие условиям теоремы 5.

Заметим, что если в определении T-мажорации условие 1) заменить на условие $\sum_{1 \le i \le k-1, \chi_i < \kappa_{\sigma(i)} \le \kappa_{\sigma(k)} < \chi_k} \left(\kappa_{\sigma(i)} - \chi_i\right) \ge \sum_{1 \le p \le k, \chi_p > \kappa_{\sigma(p)}} \left(\chi_p - \kappa_{\sigma(p)}\right)$, $1 \le k \le n$, то утверждение теоремы 8 останется в силе.

Теорема 9. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда $\Phi(\overline{\chi}) = \{\overline{\kappa} \in Z^n : \overline{\kappa} \prec \overline{\chi}\}$ тогда и только тогда, когда $\chi_i - \chi_j \ge -1$ для всех i и j таких, что $1 \le j < i \le n$.

Доказательство: ***Необходимость***. Пусть условие $\chi_i - \chi_j \ge -1$ для всех i и j таких, что $1 \le j < i \le n$, не выполняется. В этом случае существуют такие i и j, что $\chi_i - \chi_j \le -2$, $1 \le j < i \le n$. Тогда вектор $\overline{\chi}^{(1)} \prec \overline{\chi}$, где

$$\overline{\chi}^{(1)} = \left(\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, ..., \chi_n^{(1)}\right), \quad \chi_m^{(1)} = \begin{cases} \chi_m, m \neq i, m \neq j, \\ \chi_i + 1, m = i, \\ \chi_j - 1, m = j. \end{cases}, \text{ но } \overline{\chi}_{\uparrow}^{(1)} \notin \Phi\left(\overline{\chi}\right).$$

Достаточность. Из теоремы 7 непосредственно следует $\Phi(\overline{\chi}) \subset \{\overline{\kappa} \in Z^n : \overline{\kappa} \prec \overline{\chi}\}$. Пусть $\chi_i - \chi_j \ge -1$ для всех i и j таких, что $1 \le j < i \le n$. Доказажем, что $\{\overline{\kappa} \in Z^n : \overline{\kappa} \prec \overline{\chi}\} \subset \Phi(\overline{\chi})$. Если $\overline{\chi}_{\uparrow} = \overline{\chi}$ и $\overline{\kappa} \prec \overline{\chi}$, тогда в условиях теоремы 7 в качестве перестановки σ можно взять тождественную перестановку. Если же $\chi_i - \chi_j \geq -1$ для всех i и j таких, что $1 \leq j < i \leq n$, $\overline{\kappa} \prec \overline{\chi}$ и $\overline{\chi}_{\uparrow} \neq \overline{\chi}$, то в условиях теоремы 7 можно взять $\sigma = \pi^{-1}$, где $\overline{\chi}_{\uparrow} = \overline{\chi}_{\pi}$.

Заметим, что теорема 9 исчерпывает случай, при котором необходимые условия Спитковского (см. [2]) являются также достаточными.

Теорема 10. Пусть $\overline{\chi} \in Z^n$. Тогда $\Phi\left(\overline{\chi}\right) = \left\{\overline{\chi}_{\uparrow}\right\}$ тогда и только тогда, когда $\chi_i - \chi_j \leq 1$ для всех i и j таких, что $1 \leq j < i \leq n$.

Доказательство: ***Необходимость***. Если $\chi_i - \chi_j \geq 2$ для некоторого i и j такого, что $1 \leq j < i \leq n$, то $\overline{\chi}_{\uparrow}^{(1)} \in \Phi\left(\overline{\chi}\right)$, $\overline{\chi}^{(1)} = \left(\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_n^{(1)}\right)$,

$$\chi_m^{(1)} = \begin{cases} \chi_m, m \neq i, m \neq j, \\ \chi_j + 1, m = i, \\ \chi_i - 1, m = j. \end{cases}$$

и, следовательно, $\Phi\left(\overline{\chi}\right) \neq \left\{\overline{\chi}_{\uparrow}\right\}$.

Достаточность. Если $\chi_i - \chi_j \leq 1$ для всех i и j таких, что $1 \leq j < i \leq n$, то, согласно леммы статьи [4], $P^{-}\left(\overline{\chi}\right) = \{E\}$ и, следовательно, $\Phi\left(\overline{\chi}\right) = \left\{\overline{\chi}_{\uparrow}\right\}$.

Заметим, что по сути, теорема 10 означает, что если $\chi_i - \chi_m \leq 1$ для всех i и m таких, что $1 \leq m < i \leq n$, то при любых изменениях внедиагональных элементов нижне-треугольных м.-ф. с индексами диагональных элементов $\overline{\chi} = \left(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\right) \in Z^n$ частные индексы не меняются и равны компонентам вектора $\overline{\chi}$, упорядоченным по неубыванию. Теорема 9 является обобщением и уточнением теоремы Гохберга – Крейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Д. Гахов, Краевая задача Римана для систем n пар функций. // Успехи матем. наук, 1952.7, #.4, с.3-54.
2. Н.И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.
3. Н.П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1970.
4. K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of matric functions and singular integral operators, Birkhauser Verlag, Basel, 1981.
5. G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovskii, Factorization of measurable Matrix Function, Akademie - Verlag, Berlin, 1987.
6. Ф.Д. Гахов, Краевые задачы. - М.: Наука, 1977.
7. З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений. - М.: Мир, 1979.

8. И.М. Спитковский, О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций. // Мат. сборник, 1988, т. 135, вып. 4, с. 553-550.
9. А.Г. Камалян, Некоторые свойства ядер теплицевых операторов. // ДНАН Армении, 2007, т.107, вып.4. с. 316-322.
10. А.Г. Камалян, Индексная факторизация матриц-функций. // ДНАН Армении, 2008, т. 108 вып. 1.
11. Р.А. Амирджанян, А.Г. Камалян, Факторизация мероморфных матриц-функций. // Изв. НАН Армении, 2007, т. 42, # 3.
12. И.И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций. - М.: ГИТЛ, 1950.
13. Г.М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1966.
14. Г.Ц. Тумаркин, С.Я. Хавинсон, К определению аналитических функций класса E в многосвязных областях. // Успехи матем. наук, 1958, # 13, вып. 1, с. 201-206.
15. Б.В. Хведелидзе, Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. // Современные проблемы математики, т. 7 (Итоги науки и техники). - М.: ВИНИТИ, 1975, с. 5-162.

Поступила в редакцию
11. 10. 2007

**ºè²ÜÎÚàôÜ Ø²îðÆò – üàôÜÎòÆ²ÜºðÆ Ø²êÜ²Ìàð ÆÜ¸ºøêÜºðÆ àðàÞ
Ð²îÎàôÂÚàôÜÜºð**

Î.Ì. Ð³ñáõÃÛáõÝÛ³Ý, ².Ð. ø³Ù³ÉÛ³Ý

²ßË³ï³ÝùáõÙ ÝÏ³ñ³·ñíáõÙ ¿ ý³ÏïáñÇ½³óíáÕ ³ÝÏÛáõÝ³·Í³ÛÇÝ »é³ÝÏÛáõÝ Ù³ïñÇó – ֆունկցիաների մասնակի ինդեքսների բազմությունը, ըստ անկյունա-·Í³ÛÇÝ ï³ññ»ñÇ ÇÝ¹»ùëÝ»ñÇ Ù³ÅáñÇ½³óÇ³ÛÇ:

**ON THE VECTORIAL BOUNDARY PROBLEM OF RYMAN WITH
MEROMORPHIC COEFFICIENT**

K.V. Harutyunyan, A.G. Kamalyan

In this article provides an explicit description of the set of partial indices triangular matrix-functions with factorizable fixed-diagonal elements, in terms of majorization.