УДК 517. 968. 23

# О ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА С МЕРОМОРФНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**Р.А. Амирджанян, А.Г. Камалян**

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

В работе изучается векторная задача Римана с коэффициентом, допускающим индексную факторизацию. Наиболее детально изучается случай, когда коэффициент допускает мероморфное продолжение во внутреннюю или внешнюю область контура.

Как известно, в основе теории векторной краевой задачи Римана лежит проблема факторизации коэффициента задачи Винера – Хопфа (см. [1 - 5]). В терминах факторизации выписываются условия разрешимости и общий вид решения задачи Римана, а через частные индексы выражаются ее дефектные числа: размерность линеала решений однородной задачи и коразмерность замыкания образа. Следует заметить, что исследование задачи Римана весьма затруднительно в тех случаях, когда коэффициент задачи не допускает стандартной факторизации (см. [6 - 8]). В работах [9 - 11] вводится понятие индексной факторизации матриц-функций (м.-ф.), которая по своим свойствам близка к факторизации Винера – Хопфа и совпадает с ней в случае ее существования. Класс м.-ф., допускающих индексную факторизацию, существенно шире класса м.-ф., допускающих стандартную факторизацию Винера – Хопфа. В данной работе задача Римана исследуется в случае, когда коэффициент допускает индексную факторизацию.

Пусть $\Omega_j (j=0,1,...,m)$ односвязные ограниченные области комплексной плоскости $C$ такие, что $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0, \overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_i = \emptyset (i, j=1,...,m)$, а границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j (j=0,...,m)$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Предполагается, что контур $\Gamma = \bigcup\limits_{j=0}^{m} \Gamma_j$ ориентирован таким образом, что при его обходе внутренняя область $\Omega^+ = \Omega_0 \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overline{\Omega}_j$ остается слева, внешняя область $\Omega^- = \overline{C} \setminus \overline{\Omega}^+$ – справа.

Пусть $E_p^{\pm}(0 < p \le \infty)$ классы Смирнова областей $\Omega^{\pm}$ (см. [12 - 14], а также [5]), $\overset{0}{E}{}_p^-$ – класс функций из $E_p^-$, исчезающих на бесконечности, а $L_p^{\pm}$ $(\overset{0}{L}{}_p^-)$ – множество функций из $L_p$ $(= L_p(\Gamma))$, совпадающих почти всюду на $\Gamma$ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^{\pm}$ ($\overset{0}{E}{}_p^-$). Скажем, $\Gamma \in \mathcal{S}$, если все области $\Omega_j, C \setminus \bar{\Omega}_j (j = 0,...m)$ являются смирновскими (относительно определения смирновской области и достаточных условий $\Gamma \in \mathcal{S}$ (см. [12 - 15], а также [5]).

Ниже через $R$ будем обозначать множество рациональных функций, а через $R_0$ – множество рациональных функций с полюсами вне контура $\Gamma$. Множество мероморфных в $\Omega^+$ $(\Omega^-)$ функций $\varphi$, для каждой из которых существует ненулевой многочлен $q_+$ (существуют ненулевой многочлен $q_-$ и целое число $k(k \ge 0)$ такой (такие), что $(q_+\varphi)(t) \in L_p^+$ $(t^{-k}(q_-\varphi)(t) \in \overset{0}{L}{}_p^-)$, будем обозначать через $\tilde{M}_p^+(\tilde{M}_p^-)$. Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathcal{L}_p := L_p^+ \dot{+} \overset{0}{L}{}_p^-, \quad M_p^{\pm} := L_p^{\pm} \dot{+} R_0, M^{\pm} := \bigcup_{p>0} M_p^{\pm}.$$

Пространство вектор-столбцов порядка $n$ (матриц порядка $n \times m$) с элементами из линейного пространства $X$ будем обозначать через $X^n (X^{n\times m})$, а операторы, проектирующие прямую сумму $\mathcal{L}_p$ на $L_p^+(\overset{0}{L}{}_p^-)$ вдоль $\overset{0}{L}{}_p^-(L_p^+)$, – через $P_{\pm}$. Действие проекторов $P_{\pm}$ в $\mathcal{L}_p^n(\mathcal{L}_p^{n\times m})$ понимается покомпонентно.

Пусть $(1 \le p \le \infty)$ – G м.-ф. порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Г принимают конечные комплексные значения, $D_p^+$(G) – пространство всех вектор-функций (в.-ф.) $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, $D_p^-$(G) – пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (L_p^-)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$, а $\overset{0}{D}{}_p^-$ (G) – пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$ таких, что $G\varphi_- \in \mathcal{L}_1^n$.

Через $\tau_\alpha$ $(\alpha \in C)$ и $\tau'_\alpha$ $(\alpha \in \bar{C}/\{0\})$ обозначим операторы сдвига, действующие на функцию (соответственно на в.-ф. и м.-ф.) $f$ по формулам

$(\tau_\alpha f)(t)=(t-\alpha)f(t),\quad \tau'_\alpha=-(\alpha)^{-1}\tau_\alpha(\tau_0)^{-1}$. В частности, предполагается, что $\tau'_\infty=(\tau_0)^{-1}$.

Скажем, что м.-ф. G допускает конечную $(r_+,p)$-индексную факторизацию ($1\le p\le\infty$) (далее $I(r_+,p)$-факторизацию) (см. [10]), если G допускает представление

$$G(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t),$$

а факторы $G_\pm$ и $\Lambda$ удовлетворяют следующим условиям: (1) $G_\pm\in(L_p^\pm)^{n\times n}$; (2) для любых $z\in\overline{\Omega}^+,V\in C^n,V\ne 0$ в.-ф. $(\tau_z)^{-1}G_+V$ не принадлежит $D_p^+(G)$; (3) для любых $z\in\Omega^-,V\in C^n,V\ne 0$ в.-ф. $(\tau'_z)^{-1}G_-V$ не принадлежит $D_p^-(G)$; (4) $\Lambda(t)=diag[\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n]$, где $\kappa_1\le\kappa_2...\le\kappa_n$ целые числа.

Краевая задача Римана с матричным коэффициентом $G$ и с правой частью $h$ состоит в определении аналитических в.-ф. $\varphi_+\in(E_p^+)^n$, $\varphi_-\in(\overset{0}{E_p^-})^n$ ($1<p<\infty$) при условии

$$\varphi_+(t)+G(t)\varphi_-(t)=h(t) \tag{1}$$

почти всюду на $\Gamma$.

Для м.-ф. $G^T$, допускающей $I(r_+,q)$ ($q=p/(p-1)$) факторизацию,

$$G^T(t)=G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t), \tag{2}$$

где $\Lambda(t)=diag[\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n]$, определим следующий класс полиномиальных в.-ф.:

$$\Phi(G)=\{g;(G_+^T)^{-1}g\in(L_p^+)^n,(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g\in(\overset{0}{L_p^-})^n\},$$

где $g$ векторный многочлен, j-ая компонента которого является многочленом степени $\kappa_j-1$ при $\kappa_j>0$, и тождественно равна нулю при $\kappa_j\le 0$ ($j=1,...,n$). Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть (2) является $I(r_+,q)$ факторизацией м.-ф. $G^T$. Тогда количество линейно независимых решениий однородной задачи

$$\varphi_+ + G\varphi_- = 0 \tag{3}$$

совпадает с $\dim\Phi(G)$. Любое решение (3) допускает представление: $\varphi_+=(G_+^T)^{-1}g,\ \varphi_-=-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$, где $g\in\Phi(G)$.

**Доказательство.** Пусть $(\psi_+,\psi_-)$ является нетривиальным решением задачи (3), т.е. $\psi_+ + G\psi_-=0$. Отсюда следует, что $\psi_+ + (G_-\Lambda G_+^{-1})^T\psi_-=0$. Следовательно, $\psi_+ + (G_+^T)^{-1}\Lambda G_-^T\psi_- = 0$ и потому $(G_+^T)\psi_+ = -\Lambda G_-^T\psi_-$. Поскольку $G_\pm^T \in (L_q^\pm)^{n\times n}$, $\psi_+ \in (L_p^+)^n$ и $\psi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$, то $G_+^T\psi_+ \in (L_1^+)^n$ и $G_-^T\psi_- \in (\overset{0}{L}{}_1^-)^n$.

Таким образом, существует ненулевой многочлен $g$, j-ая компонента которого является многочленом степени $\kappa_j - 1$ при $\kappa_j > 0$ и тождественно равна нулю при $\kappa_j \le 0$ такой, что $(G_+^T)\psi_+ = g$ и $-\Lambda(G_-^T)\psi_- = g$. Т.е. любое решение (3) допускает представление: $\varphi_+ = (G_+^T)^{-1}g,\quad \varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$, где $g \in \Phi(G)$.

Пусть теперь существует ненулевой $g \in \Phi(G)$. Определим $\psi_+$ и $\psi_-$ равенствами: $\psi_+ = (G_+^T)^{-1}g,\ \psi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g$.

Очевидно, что $\psi_+ \in (L_p^+)^n, \psi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$. Нетрудно проверить, что ($\psi_+$, $\psi_-$) является решением задачи (3).

**Теорема 2.** Пусть (2) является $I(r_+, q)$ факторизацией м.-ф. $G^T$. Тогда неоднородная задача Римана (1) разрешима тогда и только тогда, когда $G_+^T h \in (\mathcal{L}_1)^n$ и существует векторный многочлен $\mathsf{P}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) j-ая компонента в.-ф. $\mathsf{P}$ является многочленом степени $\kappa_j - 1$, если $\kappa_j > 0$ и тождественно равно нулю при $\kappa_j \le 0$;

б) $(G_+^T)^{-1}\mathsf{P} + (G_+^T)^{-1}P_+(G_+^T h) \in (L_p^+)^n$;

в) $-(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathsf{P} + (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^T h) \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$.

Если задача (1) разрешима и $\mathsf{P}$ удовлетворяет условию а), б), в), то все решение (1) допускает представления:

$$\varphi_+ = (G_+^T)^{-1}g + (G_+^T)^{-1}\mathsf{P} + (G_+^T)^{-1}P_+(G_+^T h) \tag{4}$$

$$\varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}g - (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathsf{P} + (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}P_-(G_+^T h), \tag{5}$$

где $g \in \Phi(G)$. Верно также обратное, если $g \in \Phi(G)$, а $\varphi_+$, $\varphi_-$ допускают представление (4), (5), то пара ($\varphi_+, \varphi_-$) является решением задачи (1).

**Доказательство.** Пусть ($\varphi_+, \varphi_-$) является решением задачи (1). Отсюда следует, что $\varphi_+ + (G_-\Lambda G_+^{-1})^T\varphi_- = h$ и потому $(G_+^T)\varphi_+ + \Lambda G_-^T\varphi_- = G_+^T h$. Поскольку $G_\pm^T \in (L_q^\pm)^{n\times n}$, $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$ и $\varphi_- \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$, то $G_+^T h \in (\mathcal{L}_1)^n$. С другой стороны, из равенства

$$(G_+^T)\varphi_+ - P_+(G_+^T h) = -\Lambda G_-^T\varphi_- + P_-(G_+^T h)$$

следует, что существует векторный многочлен $\mathsf{P}$, удовлетворяющий условию а), такой, что

$$(G_+^T)\varphi_+ - P_+(G_+^T h) = \mathsf{P}, \quad -\Lambda G_-^T \varphi_- + P_-(G_+^T h) = \mathsf{P},$$

т.е.

$$\varphi_+ = (G_+^T)^{-1}\mathsf{P} + (G_+^T)^{-1} P_+(G_+^T h), \quad \varphi_- = -(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1}\mathsf{P} + (G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1} P_-(G_+^T h).$$

Последнее означает выполнение условий б) и в).

Пусть $(\psi_+, \psi_-)$ также является решением задачи (1). Тогда очевидно, что $(\psi_+ - \varphi_+, \psi_- - \varphi_-)$ является решением задачи (3). Из теоремы 1 следует существование в.-ф. $g \in \Phi(G)$. Таким образом, любое решение задачи (1) допускает представление (4), (5). Пусть теперь $G_+^T h \in (\mathcal{L}_1)^n$ и существует векторный многочлен $\mathsf{P}$, удовлетворяющий условию а), б), в). Определим $\varphi_+$, $\varphi_-$ с помощью (4) и (5). Очевидно, что $\varphi_+ \in (L_p^+)^n, \varphi_- \in (\overset{0}{L_p^-})^n$ и пара $(\varphi_+, \varphi_-)$ удовлетворяет равенству (1).

М.-ф., мероморфную в области $\Omega^+ (\Omega^-)$, имеющую почти всюду на $\Gamma$ угловые граничные значения, назовем q-допустимой в $\Omega^+$ $(\Omega^-)$, если существует ненулевой многочлен $\mathsf{g}$ (ненулевой многочлен $\mathsf{g}$ и число $k \in Z(k \geq 0)$) такой (такие), что из условия $\varphi_+ \in D_q^+(G)$ $(\varphi_- \in \overset{0}{D_q^-}(G))$ следует, что $\mathsf{g} G \varphi_+ \in (L_1^+)^n$ $(\tau_0^{-k} \mathsf{g}\, G \varphi_- \in (\overset{0}{L_1^-})^n)$. Обозначим множество q-допустимых в $\Omega^+$ $(\Omega^-)$ через $\mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ $(\mathcal{MF}_q(\Omega^-))$.

Заметим, что для $G \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 [5] ):

1) $G \in (\tilde{M}_p^+)^{n\times n}$, где $(p = q/(q-1))$;

2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $G \in (M^+)^{n\times n}$.

Соответственно, для $G \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 [5]):

1) $G \in (\tilde{M}_p^-)^{n\times n}$, где $(p = q/(q-1))$;

2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $G \in (M^-)^{n\times n}$.

В работе [11] получены критерии факторизации м.-ф. $G^T$ в случаях, когда $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ либо $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$. Эти результаты позволяют уточнить теоремы 1,2 в вышесказанных случаях.

**Теорема 3.** Пусть либо $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ и $(G^T)^{-1} \in (\tilde{M}_q^+)^{n\times n}$, либо $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ и $G^T \in (\tilde{M}_q^-)^{n\times n}$. Тогда утверждения теоремы 1 справедливы. Кроме того, если $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$, $(G^T)^{-1} \in (M_q^+)^{n\times n}$, то условие $(G_-^T)^{-1}\Lambda^{-1} g \in (\overset{0}{L}{}_p^-)^n$, участвующее в определении $\Phi(G)$, выполняется автоматическим образом. Соответственно, если $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$, $G^T \in (M_q^-)^{n\times n}$, то условие $(G_+^T)^{-1} g \in (L_p^+)^n$, участвующее в определении $\Phi(G)$, выполняется автоматическим образом.

**Теорема 4.** Пусть либо $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ и $(G^T)^{-1} \in (\tilde{M}_q^+)^{n\times n}$, либо $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ и $G^T \in (\tilde{M}_q^-)^{n\times n}$. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.

Кроме того, если $G^T \in \mathcal{MF}_q(\Omega^+)$ ,$(G^T)^{-1} \in (M_q^+)^{n\times n}$, то условие в) теоремы 2 выполняется автоматическим образом. Соответственно, если $(G^T)^{-1} \in \mathcal{MF}_q(\Omega^-)$ ,$G^T \in (M_q^-)^{n\times n}$, то условие б) теоремы 2 выполняется автоматическим образом.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ф.Д. Гахов, Краевая задача Римана для систем n-пар функций. // Успехи матем. наук, 1952, 7 #4, с. 3-54.
2. Н.И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.
3. Н.П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1970.
4. K. Clancey, I. Gohberg, Factorization of matric functions and singular integral operators, Birkhauser *Verlag*, Basel, 1981.
5. G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovskii, Factorization of measurable Matrix Function, Akademie - Verlag, Berlin, 1987.
6. Ф.Д. Гахов, Краевые задачы. - М.: Наука, 1977.
7. З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений. - М.: Мир, 1979.
8. И.М. Спитковский, О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций. // Мат. сборник, 1988, т. 135, вып. 4, с. 553-550.
9. А.Г. Камалян, Некоторые свойства ядер теплицевых операторов. // ДНАН Армении, 2007, т.107, вып.4, с. 316-322.
10. А.Г. Камалян, Индексная факторизация матриц-функций. // ДНАН Армении, 2008, т.108, вып. 1.
11. Р.А. Амирджанян, А.Г. Камалян, Факторизация мероморфных матриц-функций. // Изв. НАН Армении, 2007, т. 42, # 3.
12. И.И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций.- М.: ГИТЛ, 1950.
13. Г.М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексной переменного. - М.: Наука, 1966.
14. Г.Ц. Тумаркин, С.Я. Хавинсон, К определению аналитических функций класса Е в многосвязных областях. // Успехи матем. наук, 1958, # 13, вып. 1, с. 201-206.

15. Б.В. Хведелидзе, Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. // Современные проблемы математики, т. 7 (Итоги науки и техники). - М.: ВИНИТИ, 1975, с. 5-162.

Поступила в редакцию
05. 11. 2007

**Øºðàøàðü ¶àðÌ²Îòàì èÆØ²ÜÆ º¼ð²ÚÆÜ ìºÎîàð²Î²Ü ÊÜ¸ÆðÆ Ø²êÆÜ**

è.².²ÙÇñç³ÝÛ³Ý, ².¶.ø³Ù³ÉÛ³Ý

Աշխատանքում քննարկվում է Ռիմանի եզրային վեկտորական խնդիրը, երբ ËÝ¹ñáõÙ Ù³ëÝ³Ïóáõ ·áñÍ³ÏÇóÁ Ãáõ÷É ¿ ï³ÉÇë ÇÝ¹»ùë³ÛÇÝ ý³Ïïáñ½³óÇ³: Ուսումնասիրվում է այն դեպքը, երբ գործակիցը թույլ է տալիս մերոմորֆ շարու-Ý³ÏáõÃÛáõÝ ÏáÝïáõñÇ ³ñï³ùÇÝ Ï³Ù Ý»ñùÇÝ ïÇñáõÛÃÝ»ñáõÙ:

**VECTORIAL BOUNDARY PROBLEM OF RYMAN WITH MEROMORPHIC COEFFICIENT**

R.A. Amirjanyan, A.G. Kamalyan

In the article the vectorial problem of Ryman is investigated with the admission of index factorization coefficient. The case has been reviewed when the coefficient admits meromorphic continuation at inner or outside field of contour.