

УДК 519. 26

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ МЕТОДАМИ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

А.Г. Багдоев¹, Х.В. Керопян^{2,3}, Г.Г. Нерсисян¹, Р.Э. Даниелян²

¹Институт Механики НАН Армении

²Ереванский государственный университет

³Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

Методами волновой динамики выводятся нелинейные уравнения для динамических процессов в экономике и информатике и дается их решение.

В последнее время имеет место интенсивное применение методов, развитых в механике и прикладной математике, в смежных областях. Из большого количества работ данного направления отметим монографию П. Хабермана¹. Настоящая работа является первой из серии запланированных авторами статей, посвященных применению методов волновой динамики в экономике и информатике.

Как сказано в [1], “почти все явления экономической жизни, подобно многим другим процессам: социальным, метеорологическим и прочим, происходят в виде последовательности повышательных и понижительных движений, как волна” (“Евгений Слуцкий”).

В настоящей статье на основе аналогии с газовой динамикой и теорией упругости [2, 3], изучаются нелинейные слабые волны, описывающие динамику экономических процессов. Полученные результаты можно также применить в известной экономической задаче [11] о динамике ценных бумаг.

1. Детерминированные процессы.

В работе [2] дается применение методов газовой динамики в рассматриваемой как детерминированный поток задаче о движении транспорта вдоль одной линии.

Вводится понятие плотности ρ , измеряемой как сглаженное значение количества частиц на единицу длины дороги, и потока $j = \rho v$, значения количества частиц, проходящих через точку x в единицу времени t . Затем счита-

¹ Richard Haberman, Mathematical models. Mechanical vibrations, Population dynamics and Traffic flow. SIAM, 1977.

ется, что экспериментально определена зависимость $j=j(\rho)$, которая, например, в [2] имеет вид рис. 1 и записывается уравнение сохранения числа частиц

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + j'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

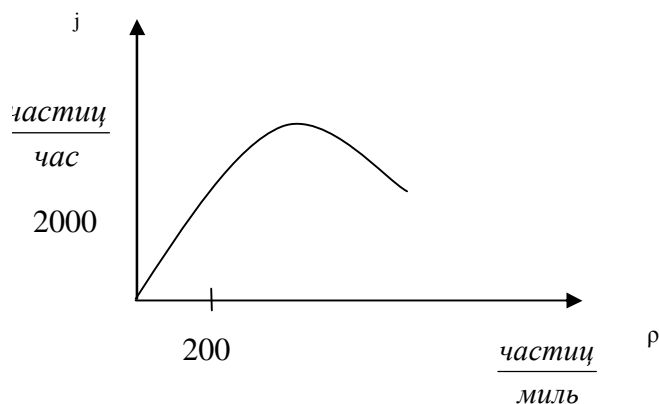


Рис. 1.

При заданном начальном распределении $\rho=\rho_0(x)$ можно для любого момента времени t определить, решая задачу Коши для (1.1), значения $\rho(x,t)$, которые, в силу (1.1), постоянны на характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = j'(\rho), \rho = c, x = x_0 + j'(c)t, \quad (1.2)$$

имеющих вид прямых (рис. 2).

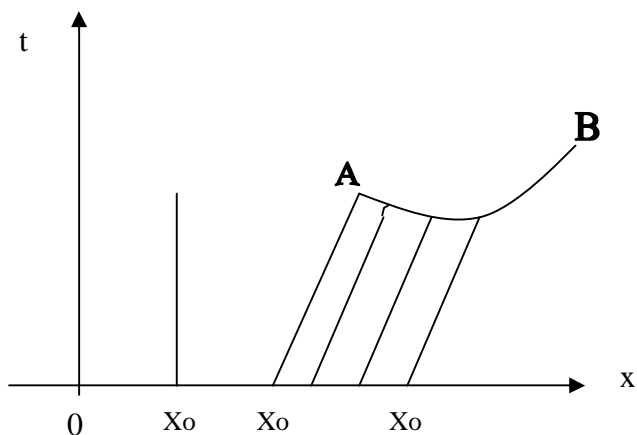


Рис.2.

Эти характеристики, в зависимости от $\rho_0(x)$, могут сходиться и в точках их пересечения будет многозначность решения, которая устраняется введением [2] ударной волны АВ. Все эти рассуждения применимы также к однонаправленным потокам в экономике, таким как движение товаров между магазинами, складами, странами, движение ценных бумаг между фирмами, движение цен [1], а также к соответствующим задачам движения информации в сетях массового обслуживания [4]. В [1] приведено много графиков зависимости валового дохода стран и других экономических показателей от времени, представляющих колебательный процесс для данной страны, т.е. при выборе оси x условно в качестве линии, на которой расположены страны Еврорынка, каждая кривая показывает изменение ВВП для данной страны или для данного значения x в функции времени t . Так или иначе, эти кривые ВВП, т.е. $\rho(x,t)$ должны при некоторых допущениях описываться теоретически решениями (1.2). Правда, для этого нужно знать зависимость $j=j(\rho)$, которую можно экспериментально определять в каждом конкретном случае, например, по подсчету количества товаров в данном объекте ρ и их потока j , т.е. количества товаров, проходящего через поток в единицу времени. Такие зависимости можно считать известными и в задачах прогнозирования сетевого трафика, и в чип-дизайне. Для простоты и конкретности считаем, что в момент $t=0$ плотность $\rho=\text{const}$, $\rho=\rho_1$, а в данном объекте $x=0$ полагается $\rho'=\rho-\rho_1$ и можно считать известным изменение ρ

$$\rho'=F(t), \tag{1.3}$$

причем следует определить $\rho(x,t)$ во всей плоскости x,t (рис. 3).

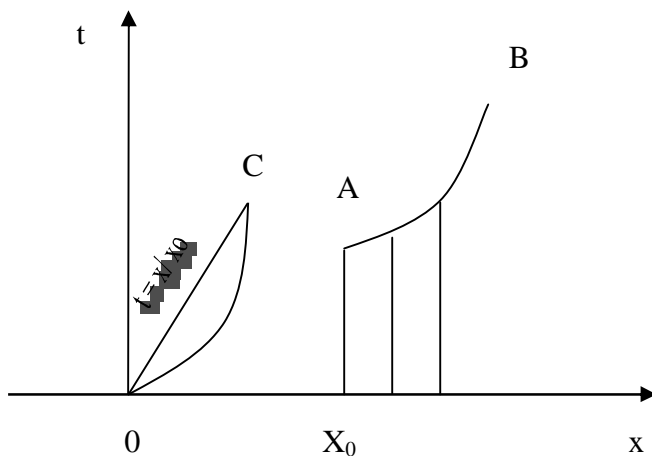


Рис. 3.

Для малых ρ' можно линеаризовать уравнение (1.1), заменяя

$$j'(\rho)=j'(\rho_1), \quad j'(\rho_1)=a_0, \tag{1.4}$$

где a_0 есть невозмущенная скорость волн.

В окрестности самой волны $x=a_0t$ необходимо с той же точностью учитывать нелинейные члены в (1.1), причем

$$j'(\rho) = a_0 + \gamma \rho', \quad \gamma = j''(\rho_1), \quad (1.5)$$

а после введения эйконала [3] $\tau = t - \frac{x}{a_0}$ (1.1) примет вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\gamma}{a_0^2} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = 0, \quad (1.6)$$

где производная по x берется при постоянном τ , $\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t = \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_\tau - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Общее решение (1.6) имеет вид [3],

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} F(y_1) = y_1, \quad (1.7)$$

где $y_1 = \text{const}$ есть уравнение нелинейных характеристик (рис. 3).

После пересечения характеристик образуется ударная волна, на которой из (1.6) получается условие [3]

$$V = a_0 + \frac{\gamma}{2} \rho', \quad (1.8)$$

где V есть скорость ударной волны, впереди которой $\rho = \rho_1$. Подставляя (1.7) в (1.8), где $V = \frac{dx}{dt}$, дифференцируя (1.7) по t , причем $x = x(t)$ вдоль (1.8), можно получить [3]

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \int_0^{y_1} F(y_1') dy_1' \quad (1.9)$$

на ударной волне. Здесь вид зависимости $F(y_1)$ дается условием (1.3) на объекте $x=0$. При 1) $F(y_1)\gamma < 0$. В (1.9) имеет место лишь решение $F(y_1)=0$, т.е. имеется отсутствие ударной волны, а при 2) $F(y_1)\gamma > 0$ ударная волна ОС образуется в точке 0 рис. 1. Случай 1) будет при $j''(\rho_1) < 0$, $F(y_1) > 0$, т.е. осуществляется для кривой ОС (рис. 1) в том случае, когда в первом пункте $x=0$ при $t=0$ плотность товаров больше, чем при $t>0$, т.е. увеличивается со временем и ударной волны нет, а при $F(y_1) < 0$ ударная волна образуется. При 2) для $F(y_1) < 0$, $j''(\rho_1) < 0$ образуется ударная волна, начиная с первого объекта при $t=0$, а для других x – в некоторый момент t , даваемая кривой ОС (рис. 3). Этот процесс в [2] назван пробкой.

Полагая, что на первом объекте плотность меняется по формуле $x=0$,

$$F(t) = \rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{t}, \quad (1.10)$$

т.е. при $t=0$ скачком изменяется от начального ρ_1 , $\rho_2 > \rho_1$, $A < 0$ можно из (1.9) получить, интегрируя

$$(\rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{y_1})^2 = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \left\{ (\rho_2 - \rho_1)y_1 + \frac{2}{3}Ay_1^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (1.11)$$

Откуда, задавая числа $\rho_{1,2}$, A, γ, a_0^2 , можно решением кубического уравнения для $y_1^{\frac{1}{2}}$ численно найти y_1 в функциях x , затем определить $\rho' = F(y_1)$ по (1.10), а по (1.7) найти уравнение ударной волны. В частном случае $\rho_2 = \rho_1$ из (1.9) получится

$$y_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4a_0^2} A\gamma x, \quad \rho' = \frac{3A^2\gamma x}{4a_0^2}, \quad (1.12)$$

а уравнение ударной волны ОС (рис.1) по (1.7) (1.12) будет

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{3A^2\gamma^2 x^2}{16a_0^4} = 0, \quad \gamma < 0. \quad (1.13)$$

Разумеется, можно в волновом уравнении (1.6) учесть и диффузионные члены с $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2}$ и найти соответствующие решения [5] со сглаженной ударной волной, что можно подробно сделать для стохастических процессов.

2. Стохастические процессы.

Нами рассмотрены все указанные выше задачи в случае более реальных стохастических марковских процессов в приближении диффузионных малых возмущений для переходной плотности вероятности $p(s, x/t, y)$ от значения случайной величины $\xi = x$ в момент s к значению $\xi = y$ в момент t , причем для p получено в [8] обратное и прямое линейное уравнение Колмогорова

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial a p}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b p}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

где для (2.1) при промежуточном состоянии $u = s + \Delta t$, z близком s, x ,

$$a(s, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < \varepsilon} (z-x) p(s, x, s + \Delta t, z) dz, \quad (2.3)$$

$$b(s, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < \varepsilon} (z-x)^2 p(s, x, s + \Delta t, z) dz, \quad (2.4)$$

которые называются коэффициентами сноса и диффузии, и по смыслу записи a есть средняя скорость изменения величины x . Те же соотношения имеют место для (2.2) с заменой $s + \Delta t, x$ на $t + \Delta t, y$. Эти же уравнения получены в [9] и названы уравнениями Фоккера – Эйнштейна. Там же, полагая $s = t_0$, $x = x_0$, $y = x$, и считая, что при $t = t_0$ задано $p_0(t_0, x_0)$, вводится одномерная функция распределения

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t_0, x_0) p(t_0, x_0, t, x) dx_0. \quad (2.5)$$

Умножив (2.2) на $p_0(t_0, x_0)$ и проинтегрировав, нетрудно убедиться, что вероятность состояния $P(t, x)$ удовлетворяет тому же уравнению (2.2), где $y \rightarrow x$, с начальным условием $P_1(t_0, x) = P_0(t_0, x)$.

Таким образом, можно записать для вероятности осуществления в момент t состояния x линейное уравнение в предположении, что $a = \text{const}$, $a = a_0$, $b = \text{const}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

Это уравнение совпадает с линейным волновым уравнением с учетом малой диссипации, газовой, и вообще волновой, динамики, в котором a есть линейная скорость волны и, по аналогии с механикой сплошных сред, можно считать задачу слабонелинейной и полагать $a = a_0 + \gamma P'$ (2.7), где a_0 дается правой частью (2.3); $P' = P - P_0$, P_0 есть вероятность основного невозмущенного процесса.

$$p_0(t_0, x_0, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0-a_0 t+a_0 t_0)^2}{2b(t-t_0)}} \quad (2.8)$$

с математическим ожиданием $a_0(t-t_0)$, равным среднему значению переменной $x-x_0$, причем p_0 удовлетворяет (2.6), γ – коэффициент, который должен определяться экспериментально. Вначале записывается линейное уравнение для $P' = P - P_0$ в виде (2.6), где стоит коэффициент a_0 , затем a_0 заменяется на a по (2.7) и получается

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P'}{\partial x} + \gamma \tau' \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0. \quad (2.9)$$

В волновой области, переходя, как и в §1, к переменной τ , можно из (2.9) получить, обозначая

$$P'(t, x) = p'(t, x), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\gamma}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2.11)$$

Отбросив последний член в левой части, можно получить уравнение (1.6), где вместо p' имеется p' . Все решения (1.7) - (1.13) сохраняются. Для них можно провести расчеты с вероятностной интерпретацией. Например, считая за x концентрацию ценных бумаг в данном офисе или количество информации в канале, можно определить по (1.7) всюду функции $p'(t, x)$, а по решению (1.9), (1.12) – скачок от нуля до p' решения на ударной волне ОС, даваемой (1.13) и соответствующей для каждого x значению времени резкого нарушения непрерывности случайного процесса.

Согласно решения §1, на ударной волне можно и для функции $p'(t, x)$, заменяющей $p'(t, x)$, как в простом случае $b=0$, так и в общем случае, задавать

для возмущенной нелинейностью вероятности p' начальные значения $p'=0$ концентраций x всех ценных бумаг в данном офисе, а для выбранной их концентрации $x = x_0$, условно взятой за $x=0$, – распределение по t (1.10).

$$p'(t,0) = p_2 - p_1 + A\sqrt{t}, \quad p_2 p_1 = const. \quad (2.11')$$

При этом можно в случае $b=0$ использовать решение для p' возмущенной нелинейными эффектами вероятности величины x в момент t на ударной волне (1.9).

Для общего случая (2.11') дано численное решение (1.11) при некоторых типичных параметрах $a_0=0$, $\gamma=3/2$, $p_2-p_1=1/5$, $A=-1/6$, результаты которого для p' приведены в таблице.

x	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\sqrt{y_1}$	0.049	0.066	0.079	0.089	0.098
p'	0.199	0.188	0.187	0.185	0.184
t	0.023	0.045	0.068	0.089	0.112

Разумеется, кроме этого, согласно решения $p'=p_2-p_1+A\sqrt{y_1}$, (1.7), (1.10), можно найти p' для всех t,x позади ОС. Эти результаты применимы и к определению вероятностей наличия в данный момент t данного количества информации. Можно обобщать указанные рассуждения на многомерные уравнения диффузии, которые в линейном случае выведены в [6] для плазмы, названные там уравнением Фоккера – Планка.

В частности, для компьютерных сетей [4], обозначая через k_1, k_2, \dots, k_k число заявок, через $P(t, k_1, k_2, \dots, k_k)$ общую их вероятность, можно уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка [6, 7] записать, считая процессы переходов марковскими и диффузионными

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_i \frac{\partial P}{\partial k_i} + \frac{1}{2} b_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial k_i \partial k_j} = 0. \quad (2.12)$$

При этом, как и в одномерном случае (2.5), $P(t, k_i)$ можно выразить интегралом от переходной плотности вероятности процессов от t_0, k_{0i}, k, t, k_i ($p(t_0, k_{0i}, k, t, k_i)$). Обозначим через p_0 переходную вероятность для гауссова процесса [7]. Параметры a_i, b_{ij} считаются известными для каждой системы $i=1, 2, \dots, k$; a_i – есть скорость изменения средних значений заявки k_i , b_{ij} – коэффициент диффузии. Обозначим $p'=P-P_0$, где P_0 дается через p_0 согласно (2.5), тогда p' снова удовлетворяет (2.12) и считается $P-P_0=p'(t, k_i)$ малой. В момент $t=0$ задаем $p'=p_1$, где $p_1=const$ для всех k_i . Для p' в нелинейном случае добавляется в уравнении (2.12) в вектор скорости волны a_i нелинейное слагаемое

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + a_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + a'_i p' \frac{\partial p'}{\partial n_i} + \frac{1}{2} b_{ij} \frac{\partial^2 p'}{\partial n_i \partial n_j} = 0. \quad (2.13)$$

Пусть линейные скорости волн в каждом канале $a_i = aN_i$, где N_i – единичный вектор. Вводя $P = t - \frac{1}{a} n_i N_i$, суммируя по n_{oi} , из (2.13) получаем

$$\frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{n_i} = \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{\tau} + \frac{\partial p'}{\partial \tau}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{a_i N_i}{a} p' \frac{\partial p'}{\partial P} + \frac{1}{2} b_{ij} N_i N_j \frac{\partial^2 p'}{\partial P^2} = 0.$$

3. Решение нелинейного уравнения.

В §2 были получены нелинейные диффузионные уравнения для экономических случайных процессов (2.11) и компьютерных сетей (2.14). Поскольку $\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{\tau} = -\frac{\partial p'}{\partial t} \frac{1}{a_0}$, их можно записать так:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\gamma}{a_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}. \quad (3.1)$$

Следует заметить, что указанные ранее и приведенные в [1] кривые зависимости экономических случайных величин, таких как валовый национальный продукт x отдельных стран и т.д., позволяют оценить величину средней скорости $\frac{dx}{dt}$ изменения величины x по наклону кривой для некоторого t . Например, для Великобритании за 1960-1994 гг., при использовании поквартальных значений колебания экономической активности вокруг тренда, они становятся более наглядными и дются на рис. 4.

На кривой рис.4 $\frac{dx}{dt}$ имеет почти постоянное значение для тренда $a_0 = 14 \frac{\text{млрд. ф.}}{\text{год}}$ [1]. Причем в точке $t=13.5$ лет, где на рис. 4 отсчет t идет с 1960г., имеет место скачок после перехода от логарифмической шкалы к обычной $\xi = e^{5.96}$, а в соседней точке $t-\Delta t$, в которой $\Delta t = \frac{5}{7}$ года, $\xi = e^{5.9}$, $\Delta \xi = 490 \times 0.06$.

Значение a_0 можно получить из рис. 4 приближенно для области относительно медленных изменений ξ $a_0 = \frac{e^{5.9} - e^{5.96}}{13}$, $a_0 \approx \frac{512.03}{13}$, откуда получится указанное выше значение. Сильные отклонения от трендовой кривой имеются в областях, указанных на рис. 4 вблизи точек $t=13$, $t=20$ или рис.1,2 работы [1]; ставится задача выяснить причины такого сильного отклонения ВНП от его трендового значения и избежать связанных с ним разрушительных явлений.

В настоящей статье, как видно из вышеизложенного, при объяснении этих изменений основной упор делается на определении места и интенсивности ударной волны, вероятности распределения значения $\xi = x$, т.е. ВНП. Для случайной величины ξ марковского процесса имеет место уравнение [7]

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\xi) + \sqrt{2b(\xi)} \frac{d\eta(t)}{dt}, \tag{3.2}$$

где $\eta(t)$ – процесс броуновского движения. (3.2), после отбрасывания члена с диффузией, имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\xi), \tag{3.3}$$

где $a(\xi)$ дает среднюю скорость изменения x , как было сказано выше и в [9]. (3.3) можно считать скоростью изменения процесса и для нелинейной задачи. Согласно (2.7), $a = a_0 + \gamma r'$, где, как видно из рис. 4, взятого из [1], сделан переход от $\ln \xi$ к ξ млрд.ф.

Значение наклона $\frac{dx}{dt}$ приближенно постоянно по t , поэтому можно считать, что $a_0 = \text{const}$ и соответствует значению для тренда; его значение указано выше, $\gamma r'$ есть отклонение от него из-за нелинейности, которое проявляется в областях $t = 13.5$, $t = 20$ лет (рис. 4).



Рис. 4.

В окрестности этих точек можно полагать

$$a(\xi) = a_0 + a'(\xi_0) \Delta \xi, \tag{3.4}$$

и (3.3) приближенно запишется так:

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} = a_0 + a'(\xi_0) \Delta \xi. \quad (3.5)$$

При этом a_0 получается согласно распределения $P_0(t, x)$ из (2.5), (2.8).

В качестве простейшего варианта теоретического решения общего уравнения нелинейной диффузии в областях быстрого изменения кривой рис. 4 $t=13.5$, $t=20$ можно взять решение упрощенного уравнения (1.6), где заменяется ρ' на $p'=P-P_0$, причем начальное условие P_0 берется постоянным, $P_0=p_1$. При этом в качестве начала отсчета в уравнении (1.6) приняты значения $t=0$, $x=0$, где $t-t_0$, $x-x_0$ заменены на t , x и для первой области (рис. 4) взято $t_0=13.5-5/7$, $x_0=e^{5.9}$, а для второй области – $t_0=20-5/7$, $x_0=e^6$.

В этих точках, соответственно, в новых координатах $t=0$, $x=0$, начальные условия будут

$$p'=0, x>0, t=0, \quad (3.6)$$

т.е. вероятности всех доходов x одинаковы во времени, а граничные условия в новых переменных будут, соответственно, задаваться при $x=0$, $t>0$. Эти значения вероятности P величины ВВП x_0 , которая считается известной x функцией времени, могут определяться или из опыта, или из некоторых соображений прогнозирования об увеличении или уменьшении вероятности в указанных областях в зависимости от изменения t . Следуя (1.12), считается в новых переменных

$$p'(0, t) = A\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

причем знак A может быть выбран из указанных соображений. Согласно §1, на рис.1 линия ОС для решения при наличии условий (1.7) может быть ударной волной, впереди которой $p'=0$, или непрерывной линией, на которой p' непрерывно, $p'=0$. В обоих случаях найденное ранее решение

$$p' = A\sqrt{y_1}, \quad t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} A\sqrt{y_1} = y_1 \quad (3.8)$$

применимо и описывает указанные области на рис. 4. Следует учесть, что по (1.8) на ударной волне прирост ее скорости за счет нелинейности вдвое меньше, чем скорость волн a , и можно получить

$$\gamma p' = \frac{3A^2 \gamma^2 t}{2a_0}. \quad (3.9)$$

Условие наличия ударной волны §1 $A\gamma > 0$ (3.10). С другой стороны, поскольку $a = a_0 + \gamma p'$, $a = \frac{d\xi}{dt}$ с учетом (3.5), (3.9) получаем соотношение

$$\frac{3A^2 \gamma^2 t}{2a_0} = \frac{\Delta \xi}{\Delta t} - a_0, \quad \xi = x, \quad (3.11)$$

где x, t есть первоначальные переменные.

Из рис. 4 для $t_0=13.5-5/7$, $\xi_0=e^{5.9}$, в точке $t=13.5$, $\xi_0=e^{5.96}$, тогда

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} \approx \frac{512.0.06}{5} \approx 4.3 \frac{\text{млрд.}\phi}{\text{год}} \text{ и, поскольку } a_0 = 14 \frac{\text{млрд.}\phi}{\text{год}},$$

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} a_0 = 29 \frac{\text{млрд.ф}}{\text{год}} \quad (3.12)$$

При этом (3.11) дает на ударной волне ОС $A^2 \gamma^2 = \frac{29}{3.14} 2.14$

$$A \gamma \approx 4.5 \quad (3.13)$$

В частности, при $A = \frac{1}{6}$ получится $\gamma = 27$ (3.14), что соответствует ударной

волне как в газовой динамике, а $A = -\frac{1}{6}$ дает $\gamma = -30$, что соответствует удар-

ной волне разрежения как в теории упругости [3]. Таким образом, определяется экспериментально нелинейный коэффициент. Для проверки порядка полученного значения γ (3.14) рассмотрим на рис. 4 следующий пик $t_0 = 20 - 5/7$,

$t = 20$, $\xi_0 = e^6$, $\xi = e^{6.05}$, $\frac{\Delta \xi}{\Delta t} \approx \frac{512.0.05}{5} 7 \approx 36$ и тогда

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta t} - a_0 = 22 \frac{\text{млрд.ф}}{\text{год}} \quad (3.14)$$

(3.11) дает $t = 20$, $a_0 = 14$,

$$A^2 \gamma^2 = 10.2 \quad (3.15)$$

и для ударной волны, $A \gamma > 0$,

$$A \gamma \approx 3.4 \quad (3.16)$$

Даже считая, что A (3.7) имеет близкое значение в граничных условиях в точках старых переменных $t = 13.5$, $x = e^{5.96}$ и $t = 20$, $x = e^{6.05}$, т.е. новых переменных

$t = 0$, $x = 0$, можно видеть, что порядок величин γ по (3.14) и (3.16), где $A = \frac{1}{6}$,

$\gamma \approx 20.4$ близкий. Уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{\tau} - \frac{V}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.16')$$

Как и выше, можно интерпретировать коэффициент b диффузии в виде [8]

$b = \frac{(\Delta \xi)^2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta \xi}{\Delta t} - a_0 = a - a_0$, причем для b , из записи в точках $t = 13.5$ лет, $t = 20$ лет (рис.4), получится по (3.5) $b \approx 10^3 (\text{млрд.ф})^2 / \text{год}$. С другой стороны, для га-

зодинамической задачи [5], с учетом $\frac{\partial p'}{\partial x} \Big|_{\tau} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{\tau}$ и обозначений $u - a^* = p'$,

$\Gamma = \gamma$, $v'' = b$, имеет место решение для сглаженной ударной волны в виде гра-

фиков $\gamma p' \sqrt{\frac{t}{b}} = \varphi$ от $\frac{x}{\sqrt{bt}}$ для различных постоянных $\text{Re} = \ln \frac{\varphi(-\infty)}{\varphi(\infty)}$. В сред-

нем получаются для абсциссы 5 значений $\varphi = 3-5$. Взяв на рис. 4 $t = 15$, $x \approx 800$ и

получив $b=10^3$, получим $\frac{x}{\sqrt{bt}} = 5, \varphi = \gamma p' \cdot 1.2 \cdot 10^{-1}$, и, как было посчитано ранее, $\gamma p' = 40$. Тогда $\varphi = 5$, что согласуется с вышеуказанными значениями из [5]. Таким образом, сравнения кривой рис. 4 с решениями уравнения (3.1) дают удовлетворительное согласие со значениями (3.16) постоянных γ, a_0 .

Кроме того, получены значения нелинейного коэффициента, обозначаемого в данном случае γ_1 , для кривых доли труда $\xi(t)$ в национальном доходе [1] (рис.1.3). При этом получается $t=25, \Delta t = \frac{4}{7}, \xi = 75\%, \xi_0 = 70\%, \frac{\Delta \xi}{\Delta t} = 8 \frac{\%}{год}$,

$a_0 = \frac{\%}{3год}$, и тогда из (3.11) имеем

$$A\gamma_1=0.2, \quad (3.17)$$

что, как следовало ожидать, отличается по порядку от (3.15) и (3.16). В механике – другая среда с другими коэффициентами нелинейности. Выбранное граничное условие (2.11') можно также интерпретировать как известную тенденцию изменения со временем на основании предшествующих лет характерной величины для ВВП $x=x_0$, условно выбираемой в качестве начала отсчета $x=0$, вероятности или частотности ее появления в разные годы. Можно, конечно, объяснения отклонений от тренда в виде ударных волн применить также к задаче об условиях, когда при $t=0$ задается или переходная вероятность $p'(t,x,t_0,x_0)$ от состояний t,x и t_0,x_0 , для которой имеется прямое уравнение Колмогорова и его нелинейный аналог в виде (2.11), или, что то же самое, для начальной переменной по x , заданной вероятности $p'(0,x)=P(0,x)-P_0(0,x)$.

Хотя этот подход является весьма приближенным и основан на предположении о том, что резкие отклонения от равномерного тренда связаны с ударной волной для вероятности $p'(t,x)$ появления величины x ВВП, он может считаться эффективным и быть полезным в применении к другим аналогичным стохастическим процессам, характеризующимся кривыми изменения экономических показателей [1]. Аналогичные рассуждения можно распространить на более общее уравнение (3.1) при наличии правой части, решения которого получены для сглаженных ударных волн за счет коэффициентов b в газовой динамике [5]. Записывая уже (3.2), как и выше, в окрестности указанных точек рис. 4 и сравнивая с решениями [5], можно определить также и

коэффициент при второй производной в (3.1), причем [8] $b = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$. Однако,

наиболее существенное в данный момент времени значение случайной величины x , например ВВП, для которого имеется нарушение непрерывности процесса или ударной волны, т.е толчков по терминологии [1], может быть вычислено более простыми решениями (3.7) - (3.9).

Разумеется, самой трудной задачей следует считать определение $p'(0,t)$ из опыта для заданной величины x ВВП по (3.7), т.е при постоянной A . Мож-

но те же рассуждения применить к известной экономической задаче определения вероятности и выбора из запасов x ценной бумаги, динамика которой описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - rx \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} v^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.18)$$

где постоянная v^2 означает скорость возвращения запасов, r – скорость интереса, т.е. возвращение запасов в сдвинутую позицию $\Delta x - \frac{\Delta u}{\frac{\partial u}{\partial x}}$ [11]. Это уравнение, не считая члена ru , есть частный случай линейных уравнений для плотности вероятности марковских диффузионных процессов [8], приведенных в данной работе в §2. Легко видеть, что замена $x = ce^z$ дает уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - \left(r - \frac{1}{2} v^2 \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.11), заменой $u = Ve^{\lambda z}$,

$$r - \left(r - \frac{1}{2} v^2 \right) \lambda - \frac{1}{2} v^2 \lambda^2, \quad \lambda = 1 \quad \text{или} \quad \lambda = -\frac{2r}{v^2}, \quad (3.20)$$

можно привести к известному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= -a_0 \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ a_0 &= r - \frac{1}{2} v^2 + \lambda v^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

В дальнейшем выбирается значение $\lambda=1$. Здесь a_0 может считаться скоростью волны. Естественно, в нелинейном случае, обозначая через V_0 решение некоторой невозмущенной задачи и считая возмущения $V' = V - V_0$ малыми, можно записать нелинейное уравнение в виде

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = -(a_0 - \gamma V') \frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}. \quad (3.22)$$

В работе [11] вводится время окончания процесса ценных бумаг t^* и можно ввести новое время $t' = t^* - t$, $t' > 0$. В целях упрощения рассмотрения отбросим в (3.14) член с $\frac{1}{2} v^2$ и запишем (3.14) в виде

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} - \frac{\partial V'}{\partial z} a_0 + \gamma V' \frac{\partial V'}{\partial z} = 0. \quad (3.23)$$

Будем считать $a_0 > 0$ в (3.21) и введем, как и выше, эйконал; заменяя t на t' , получаем $a_0 = r$

$$\tau = t' + \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial V'}{\partial t'} \Big|_{\tau} + \frac{\gamma}{r} V' \frac{\partial V'}{\partial \tau} = 0. \quad (3.24)$$

Как и в §1, можно записать решение (3.24) в виде

$$y_1 = \tau - \frac{\gamma}{a_0} t' F(y_1), \quad V' = F(y_1). \quad (3.25)$$

Как и в статье [11], можно задавать условие в момент окончания выбора $t=t^*$,

$$u(x, t^*) = x - c + u_2 - u_1, \quad (3.26)$$

где c есть задаваемая наперед постоянная цена бумаг и, можно считать, что для $x=c$

$$u(c, t^*) = 0. \quad (3.27)$$

Точнее, в [11] считается $u_2 - u_1 = 0$, т.е. переход (3.26), (3.27) непрерывен при $t=t^*$, $x=c$. Для общности рассмотрим пока $u_2 \geq u_1$.

Введем новые переменные

$$t' = t^* - t, \quad x' = x - c. \quad (3.28)$$

Принимается на оси t' значение $u=0$. При этом в плоскости x' , t' рассмотрено решение при $x' \geq 0$, $t' \geq 0$. Тогда, считая в (3.12) $\lambda=1$, и то, что за невозмущенное решение можно брать $u_0=0$, $v_0=0$, при этом $V'=V$, получим, полагая

$u = V \frac{x}{c}$, вместо (3.26), (3.27) условия:

$$t' = 0, \quad V(0, x') = \frac{c(x' + u_2 - u_1)}{x}, \quad (2.29)$$

$$x' = 0, \quad V(t', 0) = 0.$$

При этом $a_0 = \gamma$ есть скорость возврата в запас после выемки, и чем она больше, тем меньше u , т.е. затраты на покупку бумаг по (3.18"), и возможен дефолт, и наоборот, чем меньше γ , тем больше u , т.е. затраты.

В случае учета нелинейных эффектов образуется ударная волна ОВ впереди линейной волны ОА (рис. 5, рис. 6).

Для общности рассмотрим случай условий (3.29), подправленных с добавкой Мертона [11]:

$$t' = 0, \quad u = x - c + u_2 - u_1, \quad x \geq c, \quad \ln \frac{x}{c} \geq 0, \quad (3.30)$$

где $u_2 - u_1 > 0$ и постоянно. Тогда в точке 0 функция $u(x, t')$ разрывом меняется от $u=0$ на оси t' к $u=u_2 - u_1$ на оси $\ln \frac{x}{c}$. Согласно (3.29), граничное условие будет

$t'=0$, $V = F(x - c + u_2 - u_1) = \frac{c}{x} (x - c + u_2 - u_1)$ (3.31). Условие на ударной волне

(1.9) в новых переменных будет:

$$F^2(y_1) = -\frac{2a_0}{\gamma t'} \int_0^{y_1} F(y_1') dy_1', \quad V = F(y_1) = c - (c - u_2 + u_1)e^{-a_0 y_1}, \quad (3.32)$$

где в силу (3.24), (3.25) при $t'=0$, $y_1 = \frac{z}{a_0}$, $\gamma < 0$, (3.32) дает для y_1 , V на

ударной волне соотношения

$$\left\{ 1 - e^{-a_0 y_1} \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}^2 = -\frac{2}{\gamma t' c} \left\{ a_0 y_1 + \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) (e^{-a_0 y_1} - 1) \right\},$$

$$V = 1 - (c - u_2 + u_1)e^{-a_0 y_1}. \quad (3.33)$$

Для существования ударной волны следует считать $\gamma < 0$, которое для заданных γ , $\frac{u_2 - u_1}{c}$ выражает y_1 в функции t и может численно решаться вместе с (3.25). В частном случае, рассмотренном в [11], $u_2 - u_1 = 0$ и (3.33) дает

$$\left(-e^{a_0 y_1} + 1 \right)^2 = -\frac{2}{\gamma t' c} \left(a_0 y_1 + e^{-a_0 y_1} \right), \quad (3.34)$$

а уравнение ударной волны из (3.25) получится в виде

$$t' + \frac{\ln \frac{x}{c}}{a_0} - \frac{\gamma c}{a_0} t' \left\{ 1 - \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-a_0 y_1} - x \right\} = y_1, \quad (3.34')$$

где $a_0 y_1 > 0$ дается (3.33) или (3.34). Впереди ударной волны $V=0$, $u=0$, а позади нее дается $V=F(y_1)$ и (3.34'). Рассмотрим линейное решение, где $\gamma=0$, при этом получится для (3.21), при $v=0$, решение, удовлетворяющее условиям (3.29), где $u_2=u_1$:

$$V(t', z) = \begin{cases} c - ce^{-r'z} - z & t' > -\frac{z}{r}, \\ 0 & t' < -\frac{z}{r}. \end{cases} \quad (3.35)$$

$$u(t', z) = V(t', z)e^z,$$

которое изображено на рис. 5.

Переходя к $z = \ln \frac{x}{c}$, получим

$$u(t', x) = \begin{cases} x - ce^{-r't'} & t' > -\frac{1}{r} \ln \frac{x}{c}, \\ 0 & t' < -\frac{1}{r} \ln \frac{x}{c}. \end{cases} \quad (3.36)$$

При стремлении t' к нулю в области $x \geq c$ и уменьшается до $x-c$. Таким образом, для $t' > 0$, $x > c$ возможность дефолта при сравнительно малых u будет вблизи точки 0. Но еще меньшее значение u будет в области $t' > 0$, $x < c$, $z < 0$,

ниже волны $t' = -\frac{z}{r}$ (рис. 5), где $u=0$ и выше нее, где $e^z > e^{-rt'}$, $u = c(e^z - e^{-rt'})$, причем на оси t' $u = c(1 - e^{-rt'})$, $u < c$.

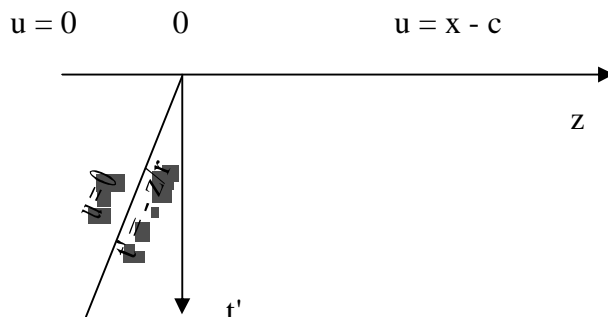


Рис. 5.

Для полного условия (3.29) решение (3.13), где $v=0$, имеет вид

$$V(t', z) = \begin{cases} c - (c + u_1 - u_2)e^{-rt'-z} & t' > -\frac{z}{r}, \\ 0 & t' < -\frac{z}{r}, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$u(t', z) = V(t', z)e^z, \quad \frac{x}{c} = e^z,$$

которое изображено на рис. 6.

При $t'=0$, $z=0$ имеется скачок u от 0 до $u_2 - u_1$. По-прежнему в области $x \geq 0$, $z \geq 0$, а точнее, при $z > -rt'$, u уменьшается согласно (3.37) при стремлении t' к нулю до значения $u = x - c + u_2 - u_1$. Таким образом, для $t' > 0$, $x > c$ возможность дефолта или сравнительно малых u будет вблизи точки 0, в области $t' > 0$, $x < c$, $z < 0$, ниже волны $t' = -\frac{z}{r}$ (рис. 6), где $u=0$ и выше нее, где

$$u = c \left\{ e^z - e^{-rt'} \left(1 + \frac{u_1 - u_2}{c} \right) \right\}, u > 0 \text{ на оси } t', \quad u = c \left\{ e^z - e^{-rt'} \left(1 + \frac{u_1 - u_2}{c} \right) \right\}, u < c.$$

Как видно из рис. 5 и рис. 6, ударная волна при $\gamma < 0$ возможна лишь вблизи линейной волны $t' = -\frac{z}{r}$, где $x < c$. Решение на ней дается согласно (3.21):

$$u = \frac{x}{c} F(y_1), \quad \frac{x}{c} = e^z,$$

$$F(y_1) = c - (c - u_2 + u_1) e^{-a_0 y_1}, \quad a_0 = r, \quad (3.38)$$

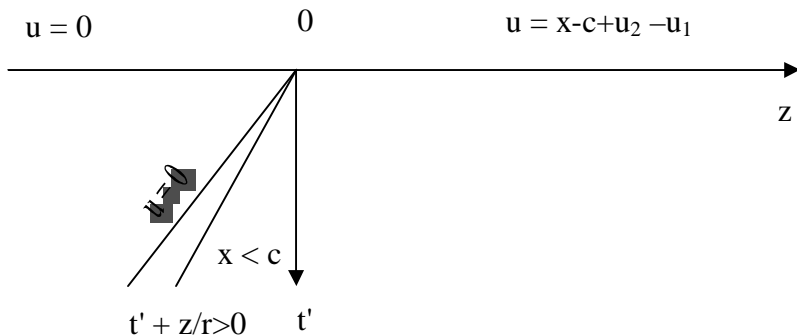


Рис. 6.

причем $a_0 y_1 > 0$ и уравнение ударной волны дается (3.32), (3.34'), соответственно, которые можно решать численно, определяя $a_0 y_1, a_0 t' \left(\frac{x}{c} \right)$.

Таким образом, следует рассчитать ударную волну, на которой

$$u = e^{-rt'} F(y_1), \quad \frac{F(y_1)}{c} = 1 - \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-ry_1},$$

где y_1 есть решение трансцендентного уравнения

$$\left\{ 1 - e^{-ry_1} \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}^2 = \frac{2r}{-\gamma crt'} \left\{ ry_1 + \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) (e^{-ry_1} - 1) \right\}, \quad ry_1 > 0, rt' > 0,$$

а затем найти уравнение ударной волны

$$rt' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{r} rt' \left\{ 1 - \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) e^{-ry_1} \right\} = ry_1,$$

$$-\frac{\gamma c}{r} = \frac{1}{2}, \quad \frac{u_2 - u_1}{c} = \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{3}.$$

Следует отметить, что линейное уравнение (3.19), вообще говоря, как то принято в газовой динамике и теории упругости [3], имеет место лишь для малых величин V . При этом начальное условие при $t=t^*, u=x-c, x \geq c$, [11] соответствует немалым u , а условия (3.29) уже для V можно для малых постоянных $u_2 - u_1 > 0$ и малых u_1 , т.е. в окрестности волны $\tau=0$, считать малыми. Вне нее, т.е. в большей части области $t' > 0, x > c$ при немалых c, V не мало, и с точки зрения волновой динамики правильность (3.21) сомнительна. Вместе с тем для малых волновых окрестностей $\tau=0$, где, как было сказано, V мала, нелинейное уравнение (3.22) и решение на ударной волне должны выполняться.

Из (3.33) можно для малых $\frac{u_2 - u_1}{c}, u_1$ получить на ударной волне

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\gamma c} r y_1 &= \frac{u_2 - u_1}{c} r t', & F(y_1) &= u_2 - u_1 + c \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) r y_1, \\
V(x, t) &= (u_2 - u_1) \left\{ 1 - \frac{r \gamma c}{2} r t' \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) \right\}, & u &= V \frac{x}{c}, \\
r t' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{r} r t' &\left\{ \frac{u_2 - u_1}{c} + \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) r y_1 \right\} & &= r y_1, \\
r t' + \ln \frac{x}{c} - \frac{\gamma c}{2r} r t' &\frac{u_2 - u_1}{c} + r^e c^2 \frac{u_2 - u_1}{2c} r^2 t'^2 &\left(1 - \frac{u_2 - u_1}{c} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

По формулам (3.39) сделаны расчеты для g_{y_1} , значения $\frac{u}{c}$, а также уравнения ударной волны $r t' \left(\frac{x}{c} \right)$ (ОВ на рис. 6), выбирая постоянные $\frac{u_2 - u_1}{c}$. Результаты приведены в таблицах 1.2 и 3. Эти значения описывают область небольших $\frac{x}{c}$, т.е. возможность дефолта вблизи точки 0 (рис. 6).

Таблица 1 для значений g_{y_1} .

$\frac{u_2 - u_1}{c}, / \frac{x}{c}$	0.5	0.25	0.1	0.01
0.001	0.000238012	0.000804113	0.208617	1.30001
0.1	0.0219543	0.0633835	0.228349	1.017741
1/3	0.0629455	0.151495	0.325586	1.0024

Таблица 2 для значений $r t'$.

$\frac{u_2 - u_1}{c}, / \frac{x}{c}$	0.5	0.25	0.1	0.01
0.001	0.695311	1.386676	2.29427	4.32972
0.1	0.674776	1.34525	2.21648	4.24763
1/3	0.636988	1.26721	2.08701	4.07052

Таблица 3 для значений $\frac{u}{c}$.

$\frac{u_2 - u_1}{c}, / \frac{x}{c}$	0.5	0.25	0.1	0.01
0.001	0.0006175	0.0004505	0.0190684	1.009585
0.1	0.06088	0.040405	0.0309251	1.0103337
1/3	0.197804	0.1202264	0.064335	1.01289

