УДК 517. 95

О РЕШЕНИИ ДВУХ ТИПОВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Григорян

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

В работе рассматриваются сингулярные интегральные уравнения второго рода с постоянными коэффициентами и с разностными ядрами, выражающимися тригонометрическим или гиперболическим синусом. Для их решения развивается новая методика, основанная на построении обобщенных собственных функций соответствующих интегральных операторов.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение

$$c\varphi(x)+\int_{-\alpha}^{\alpha}K(s-x)\varphi(s)ds=f(x), \tag{1.1}$$

где c – постоянная, а ядерная функция имеет один из следующих видов:

$$1)\ K(x)=\frac{1}{\sin(x/2)}; \qquad 2)\ K(x)=\frac{1}{sh(x/2)}. \tag{1.2}$$

Сингулярные интегральные уравнения типа (1.1) - (1.2) встречаются в разнообразных смешанных задачах математической физики и математической теории упругости. Ранее такие уравнения методами теории краевых задач аналитических функций решались в [1].

Здесь для решения указанных уравнений развивается новая методика, основанная на построении обобщенных собственных функций соответствующих интегральных операторов. Этим методом сначала при помощи математического аппарата интеграла Коши строятся эти обобщенные собственные функции. Затем выводятся формулы обобщенного преобразования Фурье, на основании которых строится замкнутое решение рассматриваемых уравнений. Эта методика для уравнения (1.1) с ядром Коши была развита в [2].

2. Построение обобщенных собственных функций интегральных операторов. Построим обобщенные собственные функции интегральных операторов, порожденных ядерными функциями из (1.2), т.е. построим решения следующих однородных сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi(s,\lambda)}{sh\left((s-t)/2\right)}ds=\lambda\psi(x,\lambda),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega(s,\lambda)}{\sin\left((s-t)/2\right)}ds=\lambda\omega(x,\lambda),\ (-\alpha<x<\alpha),$$

где λ – спектральный параметр. С этой целью рассмотрим функцию

$$f(z)=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu},$$

многозначную в комплексной плоскости z с разрезом вдоль дуги $a^{-1}a$ кривой $y=e^{x}$ $(-\alpha<x<\alpha,\, a=e^{\alpha})$. Возьмем ту однозначную ветвь функции $f(z)$, которая при $z\to\infty$ имеет асимптотику

$$f(z)\cong 1/z \qquad (z\to\infty).$$

Затем для этой ветви запишем интегральную формулу Коши в области комплексной плоскости z, ограниченной окружностью Γ_R с радиусом R и контуром C вокруг разреза вдоль дуги $a^{-1}a$ графика функции $y=e^{x}$, причем возьмем R настолько большим, чтобы указанная дуга с контуром C находилась внутри Γ_R (рис. 1). Можем записать:

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\oint_{\Gamma_R}+\oint_{C}\Big)\frac{(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

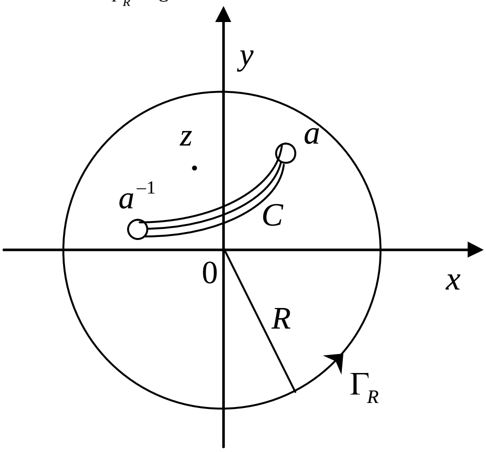

Рис. 1

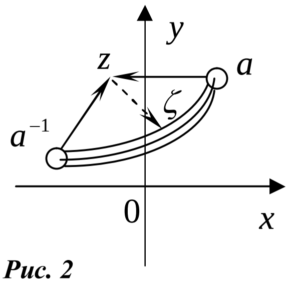

Рис. 2

Так как $f(z)\cong 1/z,(z\to\infty)$, то подынтегральная функция на бесконечности обладает асимптотикой A/z^{2} $\quad (z\to\infty)$.

Теперь, обозначив $\zeta=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, $\varphi=\arg\zeta$, можем оценить интеграл:

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta+a)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}ds\right|\le\left|\oint_{\Gamma_R}\frac{A}{\zeta^{2}}d\zeta\right|=\left|A\int_{0}^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}}{R^{2}e^{2i\varphi}}d\varphi\right|\le\frac{A}{R}\to 0,\ R\to\infty.$$

Таким образом, при $R \to \infty$ интеграл по Γ_R будет стримиться к нулю и, следовательно, придем к формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(\zeta - a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta - a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta - z}d\zeta = (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}. \quad (2.1)$$

Теперь подробно рассмотрим краевые значения функции $f(z)$ на берегах разреза $a^{-1}a$. Когда $\zeta \in a^{-1}a$ и $z \to \zeta$ сверху, то (рис. 2)

$$z-a \to (a-\zeta)e^{i\pi},\ z-a^{-1} \to \zeta - a^{-1},$$

и тогда

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu} \to -ie^{\pi\mu}(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta - a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Когда же $\zeta \in aa^{-1}$ и $z \to \zeta$ снизу, то (рис. 3)

$$z-a \to (a-\zeta)e^{-i\pi},\quad z-a^{-1} \to \zeta - a^{-1},$$

и тогда

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu} \to ie^{-\pi\mu}(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta - a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

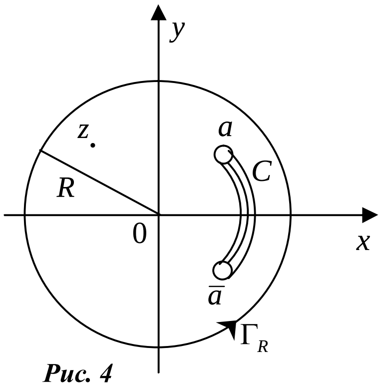

Рис. 4

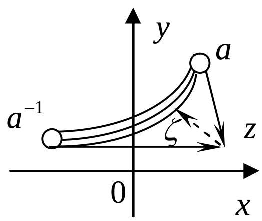

Рис. 3

Далее контур C будем стягивать к разрезу по дуге $a^{-1}a$ кривой $y = e^x$ и учтем приведенные краевые значения. Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a^{-1}}^{a}\frac{(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}(-i)e^{\pi\mu}}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{a^{-1}}\frac{(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}ie^{-\pi\mu}}{\zeta - z}d\zeta =$$

$$= (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Откуда получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a^{-1}}^{a}\frac{-2ich(\pi\mu)(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta - a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta - z}d\zeta = (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}. \quad (2.2)$$

Теперь в (2.2) перейдем к пределу $z \to t \;\; (t \in a^{-1}a)$, учитывая при этом приведенные выше краевые значения и инвестные формулы Племеля – Сохоцкого [1, 3]. В результате можем записать:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{a^{-1}}^{a}\frac{-2ich(\pi\mu)(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(1-e^{2\pi\mu})ie^{-\pi\mu}(t-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(t-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Отсюда придем к следующему интегральному соотношению с ядром Коши:

$$\frac{1}{\pi}\int_{a^{-1}}^{a}\frac{(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-t}d\zeta=ith(\pi\mu)(a-t)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(t-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

В этой формуле произведем замену переменых

$$e^{\alpha}=a,\, e^{-\alpha}=a^{-1},\, t=e^{x},\, \zeta=e^{s}$$

и тогда будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(e^{\alpha}-e^{s})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(e^{s}-e^{-\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{e^{s}-e^{x}}e^{s}ds=ith(\pi\mu)(e^{\alpha}-e^{x})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(e^{x}-e^{-\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Далее преобразуем числитель подынтегральной функции, в результате чего после простых преобразований придем к необходимому спектральному соотношению

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(sh\frac{\alpha-s}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(sh\frac{\alpha+s}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{2sh\frac{s-x}{2}}ds=th(\pi\mu)(sh\frac{\alpha-x}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(sh\frac{\alpha+x}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu} \quad (2.3)$$

$$(-\alpha<x<\alpha;-\infty<\mu<\infty),$$

или

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi_{\mu}(s)}{2sh((s-x)/2)}ds=th(\pi\mu)\psi_{\mu}(x), \quad (2.4)$$

$$\psi_{\mu}(x)=\left(sh((\alpha-x)/2)\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh((\alpha+x)/2)\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \quad (2.5)$$

$$(-\alpha<x<\alpha;-\infty<\mu<+\infty).$$

Теперь в комплексной плоскости z с разрезом вдоль дуги $\overline{a}a \;\; (a=e^{i\alpha})$ единичной окружности с центром в начале координат рассмотрим следующую многозначную функцию комплексной переменной z:

$$g(z)=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Опять выбирем ту аналитическую ветвь этой функции, которая при $z\to\infty$ обладает асимптотикой

$$g(z)\cong 1/z.$$

Опять, используя интегральную формулу Коши для области, ограниченной окружностью Γ_R радиусом R и контуром C, охватывающим разрез $\overline{a}a$ по дуге единичной окружности (рис. 4), можно записать

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\oint_{\Gamma_R}+\oint_{C}\Big)\frac{(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

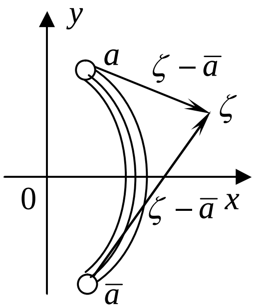

Рис. 6

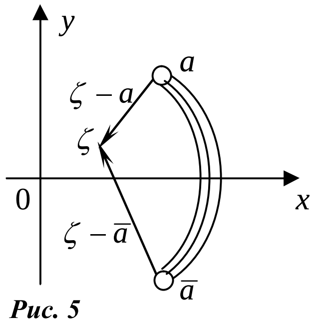

Рис. 5

Так как $g(z)\cong 1/z$ при $z\to\infty$, то для подынтегральной функции будем иметь асимптотику A/z^2 при $z\to\infty$. Тогда, беря $\zeta=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, $\varphi=\arg\zeta$, оценим интеграл по Γ_R:

$$\left|\oint_{\Gamma_R}\frac{(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta\right|\le\left|\oint_{\Gamma_R}\frac{A}{\zeta^2}d\zeta\right|=\left|A\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}}d\varphi\right|\le\frac{A}{R}\to 0,\ R\to\infty.$$

Таким образом, если R стремится к бесконечности, то интеграл Коши по Γ_R стремится к нулю и, в результате,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}. \qquad (2.6)$$

Теперь подробно рассмотрим краевые значения функции $f(z)$ на берегах разреза $\overline{a}a$. Когда $\zeta\in\overline{a}a$ и $z\to\zeta$ слева (рис.5), то

$$z-a\to(a-\zeta)e^{i\pi},\quad z-\overline{a}\to\zeta-\overline{a},$$

и тогда

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\to -ie^{\pi\mu}(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Когда же $\zeta\in a\overline{a}$ и $z\to\zeta$ справа (рис. 6), то

$$z-a\Rightarrow(a-\zeta)e^{-i\pi},\ z-\overline{a}\Rightarrow\zeta-\overline{a}$$

и, следовательно,

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu} \to ie^{-\pi\mu}(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

В результате, после стягивания контура C к разрезу $\overline{a}a$ формула (2.6) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{a}}^{a}\frac{-2ich(\pi\mu)(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Затем, имея ввиду указанные краевые значения функции $g(z)$ и формулы Племеля – Сохоцкого, получим

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\overline{a}}^{a}\frac{-2ich(\pi\mu)(a-\zeta)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\zeta-z}d\zeta=(1-e^{2\pi\mu})ie^{-\pi\mu}(t-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(t-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Далее в этой формуле произведем замены

$$a=e^{i\alpha},\ \overline{a}=e^{-i\alpha},\ t=e^{ix},\ \zeta=e^{is},$$

после чего получим соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(e^{i\alpha}-e^{is})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(e^{is}-e^{-i\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{e^{is}-e^{ix}}ie^{is}ds=th(\pi\mu)(e^{i\alpha}-e^{ix})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(e^{ix}-e^{-i\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Преобразуя далее подынтегральную функцию после несложных операций, получим необходимое спектральное соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(\sin\frac{\alpha-s}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\sin\frac{\alpha+s}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{2\sin\frac{s-x}{2}}ds=th(\pi\mu)(\sin\frac{\alpha-x}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\sin\frac{\alpha+x}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu} \quad (2.7)$$

или

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega_\mu(s)}{2\sin\left((s-x)/2\right)}ds=th(\pi\mu)\omega_\mu(x), \quad (2.8)$$

где

$$\omega_\mu(x)=\left(\sin\left((\alpha-x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\left((\alpha+x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu},\ (-\alpha<x<\alpha;-\infty<\mu<+\infty). \quad (2.9)$$

3. Вывод формул обобщенного интегрального преобразования Фурье по собственным функциям. Для того, чтобы построить решение интегральных уравнении (1.1) – (1.2), нужно выводить формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье по собственным функциям (2.5) и (2.9).

Имея ввиду результаты работы [2], где для обобщенного преобразования Фурье получены следующие формулы:

$$G(\mu)=\int_{-1}^{1}g(x)\varphi_{-\mu}(x)dx,\ g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\mu)\varphi_\mu(x)d\mu,\ \varphi_\mu(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \quad (3.1a,b,c)$$

сначала построим формулы преобразования Фурье по функции (2.5). С этой целью в формулах (3.1a,b) от переменной x $\left(x \in (-1,1)\right)$ перейдем к переменной t $\left(t \in (a^{-1}, a)\right)$, положив

$$x = \frac{2t}{a-a^{-1}} - \frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}.$$

Тогда придем к формулам

$$G(\mu) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(s) e^{i\mu\alpha + \frac{s}{2}} (sh\frac{\alpha - s}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu} (sh\frac{\alpha + s}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu} ds,$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) e^{-i\mu\alpha - \frac{x}{2}} sh\alpha (sh\frac{\alpha - x}{2})^{-\frac{1}{2}-i\mu} (sh\frac{\alpha + x}{2})^{-\frac{1}{2}+i\mu} d\mu.$$

Наконец, обозначив

$$2G(\mu)e^{-i\mu\alpha} = G(\mu),\ g(x)e^{\frac{x}{2}} = g(x),$$

можем записать

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(s)\psi_{-\mu}(s)ds,\ g(x) = \frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\psi_{\mu}(x)d\mu, \quad (3.2a,b)$$

где функция $\psi_{\mu}(x)$ дается формулой (2.5).

Теперь получим формулы обобщенного преобразования Фурье по функциям (2.9). С этой целью в формулах (3.1a,b,c) подставим

$$x = \left(tg\frac{t}{2}\right)\Big/\left(tg\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (-\alpha < t < \alpha),$$

откуда для $\varphi_{\mu}(x)$ будем иметь:

$$\varphi_{\mu}(x) = \left(1 - \left(tg\frac{t}{2}\right)\Big/\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(1 + \left(tg\frac{t}{2}\right)\Big/\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} = \left(\sin\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{t}{2},$$

а для формул обобщенного преобразования Фурье получим

$$G(\mu) = \frac{\cos(\alpha/2)}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\omega_{-\mu}(t)\frac{dt}{\cos(t/2)}, \quad g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\omega_{\mu}(t)\sin(\alpha/2)\cos(t/2)d\mu.$$

Далее, обозначив

$$G(\mu) = \frac{2G(\mu)}{\cos(\alpha/2)}, \qquad g(t) = \frac{g(t)}{\cos(t/2)},$$

можем записать

$$G(\mu) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\omega_{-\mu}(t)dt,\ g(t) = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\omega_{\mu}(t)d\mu, \qquad (3.3a,b)$$

где функция $\omega_\mu(t)$ дается формулой (2.9).

4. Решение сингулярных интегральных уравнений. Теперь приступим к решению сингулярного интегрального уравнения

$$-th(\pi\mu_0)\psi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\psi(s)}{2sh\big((s-x)/2\big)}ds = f(x) \tag{4.1a}$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi(s)ds = Q\,, \tag{4.1b}$$

где Q – известная величина.

Исходя из формулы (3.2a,b) разложения произвольной функции $g(x)\in L^2(-\alpha,\alpha)$ по функциям $\psi_\mu(x)$, решение этого интегрального уравнения представим следующим интегралом:

$$\psi(x)=\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu \quad , \quad (-\alpha<x<\alpha), \tag{4.2}$$

где $\Psi(\mu)$ – неизвестная функция. Далее (4.2) подставим в интегральное уравнение (4.1a)

$$-\frac{th(\pi\mu_0)sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu+\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{ds}{2sh\big((s-x)/2\big)}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(s)\Psi(\mu)d\mu = f(x),$$

а затем во втором интеграле поменим порядок интегрирования

$$-\frac{th(\pi\mu_0)sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu+\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\mu)d\mu\int_{-\alpha}\frac{\psi_\mu(s)}{2sh\big((s-x)/2\big)}ds = f(x)\,.$$

Отсюда, используя спектральное соотношение (2.4), получим

$$-\frac{th(\pi\mu_0)sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu+\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}th(\pi\mu)\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu = f(x)$$

и, следовательно,

$$\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]\psi_\mu(x)\Psi(\mu)d\mu = f(x), \quad (-\alpha<x<\alpha). \tag{4.3}$$

Теперь при помощи (3.2a) обратим интегральное уравнение (4.3):

$$[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]\Psi(\mu)=F(\mu), \qquad (-\infty<\mu<+\infty), \tag{4.4}$$

где

$$F(\mu)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_{-\mu}(t)f(t)dt\,. \tag{4.5}$$

Решение уравнения (4.4) равно сумме общего решения однородного уравнения (когда $F(\mu)\equiv 0$) и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение в классе обобщенных функций обладает решением

$$\Psi_0(\mu)=C_1\delta(\mu-\mu_0), \qquad (-\infty<\mu<+\infty),$$

где C_1 – произвольная постоянная, а $\delta(\mu)$ – известная дельта-функция Дирака. Следовательно, общее решение уравнения (4.4) имеет вид

$$\Psi(\mu)=C_1\delta(\mu-\mu_0)+\frac{F(\mu)}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]}, \quad (-\infty<\mu<+\infty). \tag{4.6}$$

Теперь при помощи (4.2) и (4.6) получим

$$\psi(x)=\frac{sh\alpha}{4\pi}C_1\psi_{\mu_0}(x)+\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_\mu(x)F(\mu)}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu, \quad (-\alpha<x<\alpha). \tag{4.7}$$

Далее преобразуем формулу (4.7), подставив в нее выражение функции $F(\mu)$ из (4.5). Затем, переставив порядок интегрирования, получим

$$\psi(x)=C_1\frac{sh\alpha}{4\pi}\psi_{\mu_0}(x)+\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}K_1(x,s)f(s)ds, \qquad (-\alpha<x<\alpha), \tag{4.8}$$

где ядро $K_1(x,s)$ имеет вид

$$K_1(x,s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_\mu(x)\psi_{-\mu}(s)}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu \qquad (-\alpha<x,s<\alpha). \tag{4.9}$$

Пользуясь выражением (2.5), с помощью простых преобразований для $K_1(x,s)$ получим следующее выражение:

$$K_1(x,s)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\big(sh((\alpha+x)/2)sh((\alpha-s)/2)\big)^{i\mu}\big(sh((\alpha-x)/2)sh((\alpha+s)/2)\big)^{-i\mu}}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu}{\sqrt{sh((\alpha-x)/2)sh((\alpha+x)/2)sh((\alpha-s)/2)sh((\alpha+s)/2)}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}\cdot\sqrt{2(ch\alpha-chs)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu(u-v)}}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu,$$

где введено обозначение

$$u=\ln\frac{sh((\alpha+x)/2)}{sh((\alpha-x)/2)}, \quad v=\ln\frac{sh((\alpha+s)/2)}{sh((\alpha-s)/2)}.$$

Используя выражение интеграла [2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu(u-v)}}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu=ie^{i\mu_0(u-v)}ch^2(\pi\mu_0)cth\frac{u-v}{2}+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(u-v), \tag{4.10}$$

можем записать:

$$K_1(x,s)=\frac{4}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}\cdot\sqrt{2(ch\alpha-chs)}}[ie^{i\mu_0(u-v)}ch^2(\pi\mu_0)cth\frac{u-v}{2}+$$

$$+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(u-v)]. \qquad (4.11)$$

С учетом (4.11) формулу (4.8) после простых преобразований можем записать в виде

$$\psi(x)=C_1\frac{sh\alpha}{4\pi}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)+\frac{ich^2(\pi\mu_0)}{4\pi}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{ch\alpha ch((x-s)/2)-ch((x+s)/2)}{sh((x-s)/2)sh((\alpha-s)/2)sh((\alpha+s)/2)}\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)\cdot$$

$$\cdot f(s)ds+\frac{sh(2\pi\mu_0)sh\alpha}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(ch\alpha-chs)}}\delta\left(\ln\frac{sh((\alpha+x)/2)}{sh((\alpha-x)/2)}-\ln\frac{sh((\alpha+s)/2)}{sh((\alpha-s)/2)}\right)ds, \qquad (4.12)$$

где

$$\begin{cases}\psi_{\mu}^{-\frac{1}{2}}(x)=\psi_{\mu}(x)=\left(sh\left((\alpha-x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\left((\alpha+x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\\ \psi_{-\mu}^{\frac{1}{2}}(x)=\left(sh\left((\alpha-x)/2\right)\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}\left(sh\left((\alpha+x)/2\right)\right)^{\frac{1}{2}-i\mu}.\end{cases} \qquad (4.13)$$

Первый интеграл из (4.12) преобразуем дальше

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{ch\alpha ch((x-s)/2)-ch((x+s)/2)}{sh((x-s)/2)sh((\alpha-s)/2)sh((\alpha+s)/2)}\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)f(s)ds=$$

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha}cth((x-s)/2)f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds-$$

$$-2\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{shs}{ch\alpha-chs}f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds=2\int_{-\alpha}^{\alpha}cth((x-s)/2)f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds-2C_1',$$

где

$$C_1'=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{shs}{ch\alpha-chs}f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds.$$

С учетом последнего формула (4.12) примет вид

$$\psi(x)=A_1\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)+\frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-s}{2}f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds+$$

$$+\frac{sh(2\pi\mu_0)sh\alpha}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(ch\alpha-chs)}}\delta\left(\ln\frac{sh((\alpha+x)/2)}{sh((\alpha-x)/2)}-\ln\frac{sh((\alpha+s)/2)}{sh((\alpha-s)/2)}\right)ds, \qquad (4.14)$$

где положено

$$A_1=\frac{sh\alpha}{4\pi}C_1-i\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{2\pi}C_1'. \qquad (4.15)$$

Вычислим второй интеграл из (4.14):

$$D_1(x)=\frac{sh(2\pi\mu_0)sh\alpha}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(ch\alpha-chs)}}\delta\left(\ln\frac{sh((\alpha+x)/2)}{sh((\alpha-x)/2)}-\ln\frac{sh((\alpha+s)/2)}{sh((\alpha-s)/2)}\right)ds.$$

Далее, имея ввиду обозначения u и v, для $D_1(x)$ получим

$$D_1(x)=\frac{2th(\alpha/2)sh(2\pi\mu_0)sh\alpha}{\sqrt{2(ch\alpha-chx)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(\ln[(1+th(v/2)th(\alpha/2))/(1-th(v/2)th(\alpha/2))])}{\sqrt{2(ch\alpha-ch\ln[(1+th(v/2)th(\alpha/2))/(1-th(v/2)th(\alpha/2))])}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\delta(u-v)}{(1-th^2(v/2)th^2(\alpha/2))(chv+1)}dv=\frac{2sh(\alpha/2)ch(\alpha/2)th(\alpha/2)sh(2\pi\mu_0)f(x)ch^2(x/2)}{2sh^2(\alpha/2)\cdot 2ch^2(x/2)}=$$

$$=\frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x).$$

С учетом последнего формулу (4.14) можем представить в виде

$$\psi(x)=A_1\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)-\frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{s-x}{2}f(s)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds+\frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x). \quad (4.16)$$

Теперь приступим к определению A_1. Сначала для C_1' получим, что

$$C_1'=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}shs\psi_{-\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)ds. \quad (4.17)$$

Перейдя к определению постоянной C_1, при помощи (4.1b) и (4.2) можем записать

$$Q=\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}ds\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\mu(s)\Psi(\mu)d\mu=\frac{sh\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\mu)d\mu\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_\mu(s)ds. \quad (4.18)$$

Отдельно вычислим

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_\mu(s)ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dx=$$

$$=\int_{0}^{\alpha}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dx+\int_{0}^{\alpha}\left(sh\frac{\alpha-x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(sh\frac{\alpha+x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dx=$$

$$=2\int_{0}^{\alpha}\frac{\cos(\mu u)}{\sqrt{sh((\alpha-x)/2)sh((\alpha+x)/2)}}dx,\quad u=\ln\frac{sh((\alpha+x)/2)}{sh((\alpha-x)/2)}.$$

Теперь, с одной стороны,

$$dx=\frac{sh\alpha}{2ch((\alpha-u)/2)ch((\alpha+u)/2)}du,$$

а с другой стороны,

$$dx=\frac{2sh((\alpha-x)/2)sh((\alpha+x)/2)}{sh\alpha}du$$

и, следовательно,

$$sh\big((\alpha-x)/2\big)sh\big((\alpha+x)/2\big)=\frac{sh^2\alpha}{2(ch\alpha+chu)}.$$

С учетом последнего равенства

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_\mu(s)ds=2\sqrt{2}\int_0^\infty\frac{\cos(\mu u)}{\sqrt{chu+\cos(i\alpha)}}du=\frac{2\pi}{ch(\pi\mu)}P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha), \qquad (4.19)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha)$ – известная функция Лежандра [4].

Теперь при помощи (4.19) из (4.18) будем иметь

$$Q=\frac{sh\alpha}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi(\mu)}{ch(\pi\mu)}P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha)d\mu. \qquad (4.20)$$

Далее выражение $\Psi(\mu)$ из (4.6) подставим в (4.20), в результате чего

$$Q=\frac{sh\alpha}{2}\left[C_1\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}{ch(\pi\mu_0)}+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{sh\big((\alpha-s)/2\big)sh\big((\alpha+s)/2\big)}}ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha)e^{-i\mu\nu}}{ch(\pi\mu)[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]}d\mu\right]. \qquad (4.21)$$

С другой стороны, из (4.19) следует, что

$$P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(ch\alpha)=\frac{2ch(\pi\mu)}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(\mu u)}{\sqrt{2(chu+ch\alpha)}}du,$$

которое после подстановки в (4.21) дает

$$Q=C_1\frac{sh\alpha}{2}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}{ch(\pi\mu_0)}+\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Bigg[sh(2\pi\mu_0)+\frac{i}{\pi}ch^2(\pi\mu_0)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-s}{2}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)dx-$$

$$-ich(\pi\mu_0)P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)shs\,\psi_{-\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(s)\Bigg]f(s)ds.$$

Отсюда

$$C_1=\frac{2ch(\pi\mu_0)}{sh\alpha P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}Q-\frac{ch(\pi\mu_0)}{sh\alpha P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Bigg[sh(2\pi\mu_0)+\frac{i}{\pi}ch^2(\pi\mu_0)\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-s}{2}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)dx-$$

$$-ich(\pi\mu_0)P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)shs\,\psi_{-\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(s)\Bigg]f(s)ds. \qquad (4.22)$$

Итак, имея ввиду (4.15), (4.17) и (4.22), будем иметь:

$$A_1=\frac{ch(\pi\mu_0)}{2\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}Q-\frac{ch(\pi\mu_0)sh(2\pi\mu_0)}{4\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(s)ds-$$

$$-\frac{ich^3(\pi\mu_0)}{4\pi^2 P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(ch\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)f(s)ds\int_{-\alpha}^{\alpha}cth\frac{x-s}{2}\psi_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)dx.$$

Теперь приступим к решению сингулярного интегрального уравнения

$$-th(\pi\mu_0)\omega(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\omega(s)}{2\sin(s-x/2)}ds = f(x) \qquad (4.23a)$$

при условии

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega(s)ds = Q\,. \qquad (4.23b)$$

Исходя из формулы (3.3a,b), решение этого интегрального уравнения представим следующим интегралом:

$$\omega(x)=\frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\mu(x)\Omega(\mu)d\mu \quad , \quad (-\alpha<x<\alpha)\,, \qquad (4.24)$$

где $\Omega(\mu)$ – неизвестная функция. Далее (4.24) подставим в интегральное уравнение (4.23a); во втором интеграле, изменяя порядок интегрирования и перегруппировав члены, получим

$$\frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]\omega_\mu(x)\Omega(\mu)d\mu = f(x), \quad (-\alpha<x<\alpha). \qquad (4.25)$$

Далее при помощи (3.3a) обратим интегральное уравнение (4.25):

$$[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]\Omega(\mu)=F(\mu), \qquad (-\infty<\mu<+\infty), \qquad (4.26)$$

где

$$F(\mu)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega_{-\mu}(t)f(t)dt\,. \qquad (4.27)$$

Однородное уравнение (4.26), когда $F(\mu)\equiv 0$, в классе обобщенных функций обладает решением

$$\Omega_0(\mu)=C_2\delta(\mu-\mu_0), \qquad (-\infty<\mu<+\infty)\,,$$

где C_2 – произвольная постоянная, а $\delta(\mu)$ – опять дельта-функция Дирака. Следовательно, общее решение уравнения (4.26) имеет вид

$$\Omega(\mu)=C_2\delta(\mu-\mu_0)+\frac{F(\mu)}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]}, \quad (-\infty<\mu<+\infty)\,. \qquad (4.28)$$

Теперь, имея ввиду (4.28), из (4.24) получим

$$\omega(x)=\frac{\sin\alpha}{4\pi}C_2\omega_{\mu_0}(x)+\frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_\mu(x)F(\mu)}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu, \quad (-\alpha<x<\alpha)\,. \qquad (4.29)$$

Затем преобразуем формулу (4.29), подставив в нее выражение функции $F(\mu)$ из (4.27). Поменяв порядок интегрирования, будем иметь

$$\omega(x)=C_2\frac{\sin\alpha}{4\pi}\omega_{\mu_0}(x)+\frac{\sin\alpha}{4\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}K_2(x,s)f(s)ds,\qquad(-\alpha<x<\alpha), \tag{4.30}$$

где введено ядро

$$K_2(x,s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_\mu(x)\omega_{-\mu}(s)}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu\qquad(-\alpha<x,s<\alpha). \tag{4.31}$$

Пользуясь выражением (2.9), с помощью аналогичных преобразований, сделанных выше, для $K_2(x,\,s)$ получим следующее выражение:

$$K_2(x,s)=\frac{4}{\sqrt{2(\cos x-\cos\alpha)}\cdot\sqrt{2(\cos s-\cos\alpha)}}[ie^{i\mu_0(u-v)}ch^2(\pi\mu_0)cth\frac{u-v}{2}+$$
$$+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(u-v)], \tag{4.32}$$

где

$$u=\ln\frac{\sin\left((\alpha+x)/2\right)}{\sin\left((\alpha-x)/2\right)},\quad v=\ln\frac{\sin\left((\alpha+s)/2\right)}{\sin\left((\alpha-s)/2\right)}.$$

Поставляя (4.32) в (4.30), аналогичным способом получим

$$\omega(x)=C_1\frac{\sin\alpha}{4\pi}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)+i\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{4\pi}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{x+s}{2}-\cos\alpha\cos\frac{x-s}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}\sin\frac{\alpha-s}{2}\sin\frac{\alpha+s}{2}}f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds+$$

$$+\frac{sh(2\pi\mu_0)\sin\alpha}{\sqrt{2(\cos x-\cos\alpha)}}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(\cos s-\cos\alpha)}}\delta\left(\ln\frac{\sin\left((\alpha+x)/2\right)}{\sin\left((\alpha-x)/2\right)}-\ln\frac{\sin\left((\alpha+s)/2\right)}{\sin\left((\alpha-s)/2\right)}\right)ds, \tag{4.33}$$

где

$$\begin{cases}\omega_{\mu}^{-\frac{1}{2}}(x)=\omega_\mu(x)=\left(\sin\left((\alpha-x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\left((\alpha+x)/2\right)\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\\ \omega_{-\mu}^{\frac{1}{2}}(x)=\left(\sin\left((\alpha-x)/2\right)\right)^{\frac{1}{2}+i\mu}\left(\sin\left((\alpha+x)/2\right)\right)^{\frac{1}{2}-i\mu}\end{cases}. \tag{4.34}$$

Первый интеграл из (4.33) преобразуем дальше:

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cos\frac{x+s}{2}-\cos\alpha\cos\frac{x-s}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}\sin\frac{\alpha-s}{2}\sin\frac{\alpha+s}{2}}f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds=2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}ctg\frac{x-s}{2}f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds-2C_2',$$

где

$$C_2'=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sin s}{\cos s-\cos\alpha}f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds.$$

С учетом последнего формула (4.33) примет вид

$$\omega(x) = A_2\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha} ctg\,\frac{x-s}{2}\, f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds +$$

$$+\frac{sh(2\pi\mu_0)\sin\alpha}{\sqrt{2(\cos x-\cos\alpha)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(\cos s-\cos\alpha)}}\delta\left(\ln\frac{\sin((\alpha+x)/2)}{\sin((\alpha-x)/2)}-\ln\frac{\sin((\alpha+s)/2)}{\sin((\alpha-s)/2)}\right)ds, \quad (4.35)$$

где положено

$$A_2 = \frac{\sin\alpha}{4\pi}C_2 - i\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{2\pi}C_2{}'. \quad (4.36)$$

Для второго интеграла из (4.14) аналогичным способом, указанным выше, получим

$$D_2(x) = \frac{sh(2\pi\mu_0)\sin\alpha}{\sqrt{2(\cos x-\cos\alpha)}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)}{\sqrt{2(\cos s-\cos\alpha)}}\delta\left(\ln\frac{\sin((\alpha+x)/2)}{\sin((\alpha-x)/2)}-\ln\frac{\sin((\alpha+s)/2)}{\sin((\alpha-s)/2)}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x).$$

С учетом последнего формулу (4.35) можем представить в виде

$$\omega(x) = A_2\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x) - \frac{ich^2(\pi\mu_0)}{2\pi}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)\int_{-\alpha}^{\alpha} ctg\frac{s-x}{2}\, f(s)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)ds + \frac{1}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x). \quad (4.37)$$

Теперь приступим к определению A_2. Сначала для $C_2{}'$ будем иметь

$$C_2{}' = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin s\,\omega_{-\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(s)f(s)ds. \quad (4.38)$$

Перейдя к определению постоянной C_2, при помощи (4.23b) и (4.24) можем записать

$$Q = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}ds\int_{-\infty}^{\infty}\omega_\mu(s)\Omega(\mu)d\mu = \frac{\sin\alpha}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(\mu)d\mu\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega_\mu(s)ds. \quad (4.39)$$

Отдельно вычислим

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega_\mu(s)ds = 2\sqrt{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\mu u)}{\sqrt{chu+\cos\alpha}}du = \frac{2\pi}{ch(\pi\mu)}P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha), \quad (4.40)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)$ – функция Лежандра [4].

Теперь при помощи (4.40) из (4.39) находим

$$Q = \frac{\sin\alpha}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Omega(\mu)}{ch(\pi\mu)}P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)d\mu. \quad (4.41)$$

Далее в (4.41) подставим выражение $\Omega(\mu)$ из (4.28), в результате чего

$$Q=\frac{\sin\alpha}{2}\left\{C_2\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}{ch(\pi\mu_0)}+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(s)ds}{\sqrt{\sin(\alpha-s/2)\sin(\alpha+s/2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)e^{-i\mu v}}{ch(\pi\mu)[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]}d\mu\right\}. \quad (4.42)$$

Способом, аналогичным вышеуказанному, для C_2 получим

$$C_2=\frac{2ch(\pi\mu_0)}{\sin\alpha P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}Q-\frac{ch(\pi\mu_0)}{\sin\alpha P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[sh(2\pi\mu_0)+\frac{i}{\pi}ch^2(\pi\mu_0)\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}ctg\frac{x-s}{2}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)dx-ich(\pi\mu_0)P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)\sin s\,\omega_{-\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(s)\right]f(s)ds. \quad (4.43)$$

Итак, учитывая (4.36), (4.38) и (4.43), будем иметь:

$$A_2=\frac{ch(\pi\mu_0)}{2\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}Q-\frac{ch(\pi\mu_0)sh(2\pi\mu_0)}{4\pi P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(s)ds-$$

$$-\frac{ich^3(\pi\mu_0)}{4\pi^2 P_{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(\cos\alpha)}\int_{-\alpha}^{\alpha}\omega_{-\mu_0}^{\frac{1}{2}}(s)f(s)ds\int_{-\alpha}^{\alpha}ctg\frac{x-s}{2}\omega_{\mu_0}^{-\frac{1}{2}}(x)dx.$$

Рассмотрим частный случай интегрального уравнения (4.23а), когда $\mu_0=0$ и $f(x)=-if(x)$. Тогда из (4.37) будем иметь

$$\omega(x)=\frac{A_2}{\sqrt{\sin((\alpha+x)/2)\sin((\alpha-x)/2)}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\sin((\alpha+s)/2)\sin((\alpha-s)/2)}{\sin((\alpha+x)/2)\sin((\alpha-x)/2)}}ctg\frac{s-x}{2}f(s)(s)ds. \quad (4.44)$$

Формула (4.44) совпадает с формулой (2.55) - (2.56) работы [5].

В заключение выражаю признательность проф. С.М. Мхитаряну за предложенную тематику и за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Д. Гахов, Краевые задачи. - М.: Наука, 1977.
2. А.Б. Григорян. // Ученные записки ЕГУ, 2007, №1.
3. Н.И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований. Том 1. - М.: Наука, 1969.
5. Л.И. Чибрикова. // Ученные записки Казанского государственного университета им. Ульянова-Ленина, т. 122, кн. 3, 1962.

Поступила в редакцию
04. 11. 2007

ºðÎàô ÎÆäÆ êÆÜ¶àôÈÚ²ð ÆÜî º¶ð²È Ð²ì ²ê²ðàôØÜºðÆ ÈàôÌØ²Ü Ø²êÆÜ

Ð.´. ¶ñÇ·áñÛ³Ý

Աշխատանքում դիտարկվում է եռանկյունաչափական կամ հիպերբոլական սի-նուսով արտահայտված տարբերական կորիզներով, հաստատուն գործակից-Ý»ñáí, »ñÏñáñ¹ ë»éÇ ëÇÝ·áõÉÛ³ñ ÇÝï»·ñ³É Ñ³í³ë³ñáõÙÝ»ñ: ¸ñ³Ýó ÉáõÍÙ³Ý Ñ³Ù³ñ ½³ñ·³óíáõÙ ¿ Ù»Ãá¹, ÑÇÙÝí³Í Ñ³Ù³å³ï³ëË³Ý ÇÝï»·ñ³É ûå»ñ³-ïáñÝ»ñÇ ÁÝ¹Ñ³Ýñ³óí³Í ë»÷³Ï³Ý ýáõÝÏóÇ³Ý»ñÇ íñ³:

SOLUTION OF TWO TYPES OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

H.B. Grigoryan

Current work considers the singular integral equations of second kind with constant coefficients and difference kernels defined by trigonometric or hyperbolic sinuses. The new method of solution that is based on the construction of generalized eigenfunctions of corresponding integral operators is presently developing.