УДК 517. 95

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОСЕТОЧНЫХ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МАТРИЦ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ II. МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ

Ю.Р. Акопян, А.Г. Манукян

Ереванский государственный университет
Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

В работе, состоящей из двух частей, предлагается метод построения алгебраических многосеточных переобуславливателей для матриц жесткости, возникающих при конечно-элементной аппроксимации эллиптических уравнений с краевыми условиями смешанного типа: условие Дирихле и краевое условие третьего рода. Во второй части работы строится многосеточный переобуславливатель с внутренними чебышевскими итерациями.

1. Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [1]. Поэтому здесь мы будем использовать все обозначения и результаты упомянутой статьи, делая соответствующие ссылки. Например, ссылки на формулы из [1] будут иметь следующий вид: ([1] (номер формулы)).

2. Построение переобуславливателя

В статье [1] нами была построена последовательность конечноэлементных матриц

$$L \equiv L^{(p)}, L^{(p-1)}, \dots, L^{(1)}, L^{(0)} \tag{2.1}$$

и соответствующая последовательность переобуславливателей

$$B^{(p)}, B^{(p-1)}, \dots, B^{(1)}. \tag{2.2}$$

При этом, согласно ([1] (4.20)), матрица $B^{(k)}$ имеет следующий блочный вид:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & \frac{1}{2} L^{(k-1)} + B_{21}^{(k)} {B_{11}^{(k)}}^{-1} B_{12}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Возьмем за основу общие принципы построения алгебраических многосеточных переобуславливателей с внутренними чебышевскими итерациями, развитые в работах [2, 5]. Выберем некоторое целое число $\nu \ge 1$ и для значений $k = 1, 2, ..., p$ последовательно определим матрицы

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & \frac{1}{2} R^{(k-1)} + B_{21}^{(k)} B_{11}^{(k)^{-1}} B_{12}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{cases} R^{(0)} = L^{(0)} & \text{для} \quad k=1, \\ R^{(k-1)} = L^{(k-1)} \left[I^{(k-1)} - \prod_{j=1}^{\nu} \left(I^{(k-1)} - \theta_j^{(k-1)} M^{(k-1)^{-1}} L^{(k-1)} \right) \right]^{-1} & \text{для} \quad 2 \le k \le p. \end{cases} \tag{2.5}$$

(здесь $I^{(k-1)}$ – единичная матрица порядка n_{k-1}). В качестве параметров $\theta_j^{(k-1)}$ выбираются числа

$$\theta_j^{(k-1)} = \frac{2}{\left(\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}\right) + \left(\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\right) \xi_j^{(\nu)}}, \qquad j = 1, 2, ..., \nu, \tag{2.6}$$

где

$$\xi_j^{(\nu)} = \cos \frac{2j-1}{2\nu} \pi, \qquad j = 1, 2, ..., \nu$$

есть корни многочлена Чебышева первого рода степени ν, а $\left[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}\right]$ – отрезок, содержащий собственные числа матрицы $M^{(k-1)^{-1}} L^{(k-1)}$, то есть

$$sp\left(M^{(k-1)^{-1}} L^{(k-1)} \right) \subset \left[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}\right]$$

(в дальнейшем символом sp будем обозначать *спектр* матрицы).

Получим формулы, по которым вычисляются границы $\left[\alpha_k, \beta_k\right]$ спектра матрицы $M^{(k)^{-1}} L^{(k)}$, где $k = 1, 2, ..., p$. Так как, по определению, $M^{(1)} = B^{(1)}$ (см. (2.3) – (2.5)), то по теореме 2.4.2

$$sp\left(M^{(1)^{-1}} L^{(1)} \right) \subset \left[\alpha_1, \beta_1\right], \tag{2.7}$$

где

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 5 . \tag{2.8}$$

Пусть для некоторого $k \ge 2$ имеем

$$sp\left(M^{(k-1)^{-1}} L^{(k-1)} \right) \subset \left[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}\right], \tag{2.9}$$

где $\alpha_{k-1} > 0$. Справедливо равенство

$$M^{(k)^{-1}} L^{(k)} = \left(M^{(k)^{-1}} B^{(k)} \right) \left(B^{(k)^{-1}} L^{(k)} \right). \tag{2.10}$$

Согласно теореме 2.4.2, имеем:

$$sp\left(B^{(k)^{-1}}L^{(k)}\right)\subset[1,5]. \tag{2.11}$$

Оценим границы спектра матрицы $M^{(k)^{-1}}B^{(k)}$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$B^{(k)}u=\lambda M^{(k)}u. \tag{2.12}$$

Как нетрудно заметить из блочных представлений (2.3) и (2.4) матриц $B^{(k)}$ и $M^{(k)}$, соответственно, $\lambda=1$ является собственным числом задачи (2.12). Далее, при дополнительном условии $\lambda\neq 1$ задача (2.12) сводится к спектральной задаче

$$L^{(k-1)}u=\lambda R^{(k-1)}u. \tag{2.13}$$

Из (2.5) и (2.13) последовательно получаем:

$$L^{(k-1)}u=\lambda L^{(k-1)}\left[I^{(k-1)}-\prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)\right]^{-1}u,$$

$$u=\lambda\left[I^{(k-1)}-\prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)\right]^{-1}u,$$

$$\left[I^{(k-1)}-\prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)\right]u=\lambda u,$$

$$\prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)u=(1-\lambda)u.$$

Следовательно, $\lambda=1-\mu$, где μ – собственное число задачи

$$\prod_{j=1}^{\nu}\left(I^{(k-1)}-\theta_j^{(k-1)}M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}\right)u=\mu u.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mu=\prod_{j=1}^{\nu}\left(1-\theta_j^{(k-1)}\eta\right), \tag{2.14}$$

где η – собственное число матрицы $M^{(k-1)^{-1}}L^{(k-1)}$. Таким образом, собственными числами матрицы $M^{(k)^{-1}}B^{(k)}$ являются числа

$$\lambda=1-\prod_{j=1}^{\nu}\left(1-\theta_j^{(k-1)}\eta\right). \tag{2.15}$$

Имеем

$$\max_{\eta}\left|\prod_{j=1}^{\nu}\left(1-\theta_j^{(k-1)}\eta\right)\right| \le \max_{\alpha_{k-1}\le x\le\beta_{k-1}}\left|\prod_{j=1}^{\nu}\left(1-\theta_j^{(k-1)}x\right)\right| \equiv \gamma_{k-1}. \quad (2.16)$$

Из (2.15) и (2.16) получим, что собственные числа матрицы ${M^{(k)}}^{-1}B^{(k)}$ находятся в пределах $1-\gamma_{k-1}\le\lambda\le 1+\gamma_{k-1}$, то есть

$$sp\left({M^{(k)}}^{-1}B^{(k)}\right)\subset\left[1-\gamma_{k-1},1+\gamma_{k-1}\right]. \quad (2.17)$$

Из (2.10), (2.11) и (2.17) следует, что

$$sp\left({M^{(k)}}^{-1}L^{(k)}\right)\subset\left[\alpha_k,\beta_k\right], \quad (2.18)$$

где

$$\alpha_k = 1-\gamma_{k-1},\ \beta_k = 5\left(1+\gamma_{k-1}\right). \quad (2.19)$$

При этом, как следует из теории чебышевских итерационных методов (см. [4]),

$$\gamma_{k-1}=\frac{2q_{k-1}^{\nu}}{1+q_{k-1}^{2\nu}},\ q_{k-1}=\frac{\sqrt{t_{k-1}}-1}{\sqrt{t_{k-1}}+1},\ t_{k-1}=\frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}. \quad (2.20)$$

Таким образом, нами построена последовательность матриц

$$M^{(1)},M^{(2)},\dots,M^{(p)}\equiv M. \quad (2.21)$$

Матрицу M назовем *многосеточным переобуславливателем* для матрицы L из (2.1). Она же, при определенном выборе параметров κ_m, будет рассматриваться в качестве многосеточного переобуславливателя для матрицы A конечноэлементной системы уравнений ([1] (2.5)).

Получим оценку спектрального числа обусловленности матрицы $M^{-1}L$, следуя работам [2, 5]. Выше, в (2.20), мы ввели в рассмотрение числа

$$t_k=\frac{\beta_k}{\alpha_k},\quad k=1,2,\dots,p. \quad (2.22)$$

При этом для спектральных чисел обусловленности матриц ${M^{(k)}}^{-1}L^{(k)}$ выполняются оценки

$$cond\left({M^{(k)}}^{-1}L^{(k)}\right)\le t_k,\quad k=1,2,\dots,p. \quad (2.23)$$

Как следует из формул (2.8), (2.19) и (2.20), величины t_k могут быть получены с помощью рекуррентной процедуры

$$t_1=5;\ t_k=5\left[\frac{\left(\sqrt{t_{k-1}}+1\right)^{\nu}+\left(\sqrt{t_{k-1}}-1\right)^{\nu}}{\left(\sqrt{t_{k-1}}+1\right)^{\nu}-\left(\sqrt{t_{k-1}}-1\right)^{\nu}}\right]^2,\ k=2,3,\dots,p. \quad (2.24)$$

Простой анализ показывает (см., например, [5]), что для значений ν, удовлетворяющих условию

$$\nu^2 > 5, \tag{2.25}$$

последовательность чисел $\{t_k\}_{k=1}^{p}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху (при неограниченном росте числа уровней измельчения сетки):

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_*, \tag{2.26}$$

где t_* есть положительное решение уравнения

$$t = 5\left[\frac{\left(\sqrt{t}+1\right)^{\nu} + \left(\sqrt{t}-1\right)^{\nu}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^{\nu} - \left(\sqrt{t}-1\right)^{\nu}}\right]^2. \tag{2.27}$$

Таким образом, мы можем брать лишь значения $\nu \geq 3$. С другой стороны, чем больше ν, тем больший объем вычислительной работы требуется для решения системы с матрицей M. Непосредственный подсчет числа арифметических операций показывает, что оптимальным (с точки зрения пропорциональности объема вычислений числу узлов самой малой сетки ω_p) является выбор $\nu \leq 3$ (см. ниже п. 3). Итак, возьмем $\nu = 3$. В этом случае рекуррентная процедура (2.24) принимает следующий вид:

$$t_1 = 5;\; t_k = 5t_{k-1}\left(\frac{t_{k-1}+3}{3t_{k-1}+1}\right)^2,\;\; k = 2,3,\ldots,p. \tag{2.28}$$

При этом величина t_* из (2.26) определяется как положительное решение уравнения

$$t = 5t\left(\frac{t+3}{3t+1}\right)^2$$

(см. (2.27)). Вычисляя, получим

$$t_* = 3 + 2\sqrt{5} \leq 7.48\;. \tag{2.29}$$

Подводя итог вышесказанному, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. При $\nu = 3$, независимо от выбора положительных параметров κ_m в ([1] (4.3)), а также значений кусочно-постоянных коэффициентов c и σ в подобластях Δ_m и на звеньях ломаной Γ_1, соответственно, справедлива оценка

$$cond(M^{-1}L) \leq 3 + 2\sqrt{5}. \tag{2.30}$$

Пусть теперь величины κ_m в ([1] (4.3)) выбраны согласно формулам ([1] (3.7)). Тогда, как нетрудно заметить, матрица $L \equiv L^{(p)}$ из (2.1) совпадает с матрицей L из ([1] (3.5)). Имеем неравенство

$$cond(M^{-1}A) \leq cond(M^{-1}L)cond(L^{-1}A).$$

Числа обусловленности, стоящие в правой части последнего неравенства, у нас уже оценены. Это оценки (2.30) и ([1] (3.8)). Тем самым получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2 . Пусть $\nu = 3$ и параметры κ_m в ([1] (4.3)) выбраны согласно ([1] (3.7)). Тогда справедлива оценка

$$cond(M^{-1}A) \leq \left(3+2\sqrt{5}\right)\max_{1\leq m\leq l}\frac{\delta_m^{(2)}}{\delta_m^{(1)}} \ , \tag{2.31}$$

где $\delta_m^{(1)}$ и $\delta_m^{(2)}$ – величины из отношения эквивалентности ([1] (3.4)).

Замечание 2.1. В случае, когда исходная область представляет собой объединение равносторонних треугольников Δ_m, $m = 1, 2, ..., l$, отпадает необходимость в осуществлении линейных отображений $\Lambda_m : \Delta_m \to \Delta$. На каждом уровне измельчения сетки мы будем иметь дело с регулярной триангуляцией исходной области. Тем самым исключается задача выбора положительных параметров κ_m, участвующих в построении конечноэлементных матриц (точнее, так как, фактически $L = A$, то для всех значений m полагаем $\kappa_m = 1$). В итоге оценка (2.31) спектрального числа обусловленности матрицы $M^{-1}A$ принимает следующий вид:

$$cond(M^{-1}A) \leq \left(3+2\sqrt{5}\right). \tag{2.32}$$

3. Арифметическая цена переобуславливателя

В итерационных методах с матрицей $M = M^{(p)}$ в качестве многосеточного переобуславливателя нам необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений с матрицами $M^{(k)}$, где $k = 1, 2, ..., p$. Рассмотрим систему

$$M^{(k)}u = g \ , \tag{3.1}$$

где

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}; \quad u_i, g_i \in G_k^{(i)}, \ i = 1, 2 .$$

Исходя из блочного представления (2.4) матрицы $M^{(k)}$, решение системы (3.1) осуществляется с помощью следующего алгоритма.

ПРОЦЕДУРА MG PREC/$M^{(k)}$

1. вычисляется сеточная функция

$$z_2 = 2\left(g_2 - B_{21}^{(k)}B_{11}^{(k)^{-1}}g_1\right); \tag{3.2}$$

2. определяется u_2: решается система

$$R^{(k-1)}u_2 = z_2; \tag{3.3}$$

при $2 \le k \le p$:

решение системы (3.3) эквивалентно выполнению ν шагов чебышевского итерационного метода

$$M^{(k-1)} \frac{u_2^{(j)} - u_2^{(j-1)}}{\theta_j^{(k-1)}} = -L^{(k-1)} u_2^{(j-1)} + z_2, \tag{3.4}$$

$$j = 1, 2, \ldots, \nu, \quad u_2^{(0)} = 0; \quad u_2 = u_2^{(\nu)};$$

при $k = 1$:

решается система

$$L^{(0)} u_2 = z_2; \tag{3.5}$$

3. определяется u_1:

$$u_1 = B_{11}^{(k)^{-1}} \left(g_1 - B_{12}^{(k)} u_2 \right). \tag{3.6}$$

Конец процедуры

Замечание 3.1. Дадим некоторые пояснения к процедуре. Во-первых, согласно результатам п.2, следует взять $\nu = 3$. Далее, матрица $B_{11}^{(k)}$ является диагональной. Поэтому вычисления по формулам (3.2) и (3.6) не вызывают затруднений. На самой грубой сетке, соответствующей нулевому уровню, система сеточных уравнений (3.5) с матрицей $L^{(0)}$ решается с помощью некоторого прямого метода с затратой $O(1)$ арифметических операций.

В заключение дадим оценку числа арифметических операций, затрачиваемых на выполнение одного шага переобуславливания. Введем следующие обозначения:

$A_{ops}^{(k)}$ – число арифметических операций, требуемых для решения системы (3.1) с матрицей $M^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$;

$A_{ops}^{(0)}$ – число арифметических операций, требуемых для решения системы (3.5) с матрицей $L^{(0)}$ (согласно замечанию 3.1, предполагается, что $A_{ops}^{(0)} = O(1)$).

Путем прямых вычислений выводятся следующие выражения, ограничивающие сверху введенные сложностные характеристики:

$$\begin{aligned} &A_{ops}^{(k)} \le (6 + 4\nu) n_k - 8 n_{k-1} + \nu A_{ops}^{(k-1)}, \quad 2 \le k \le p, \\ &A_{ops}^{(1)} \le 10 n_1 - 9 n_0 + A_{ops}^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В работе [6] устанавливается связь между числом узлов на двух соседних уровнях. А именно, справедливы следующие оценки:

$$4 - O\left(2^{-k}\right) \le \frac{n_k}{n_{k-1}} \le 4, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.8}$$

Пользуясь правым из неравенств (3.8), из (3.7) получим:

$$A_{ops}^{(k)} \le 4\left(1+\nu\right)n_k + \nu A_{ops}^{(k-1)}, \quad 2 \le k \le p \ ,$$

$$A_{ops}^{(1)} \le 7.75 n_1 + A_{ops}^{(0)}.$$

Отсюда легко следует неравенство

$$A_{ops}^{(p)} \le 4\left(1+\nu\right)\left[n_p + \nu n_{p-1} + \ldots + \nu^{p-2} n_2\right] + 7.75 \nu^{p-1} n_1 + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)},$$

а так как $7.75 \le 4\left(1+\nu\right)$, то

$$A_{ops}^{(p)} \le 4\left(1+\nu\right)\left[n_p + \nu n_{p-1} + \ldots + \nu^{p-2} n_2 + \nu^{p-1} n_1\right] + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)} . \quad (3.9)$$

Из оценки (3.9), принимая во внимание левое из неравенств (3.8), получим:

$$A_{ops}^{(p)} \simeq 4\left(1+\nu\right)\left[1 + \left(\frac{\nu}{4}\right) + \left(\frac{\nu}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\nu}{4}\right)^{p-1}\right] n_p + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)} . \quad (3.10)$$

Отсюда, для значений $\nu \le 3$

$$A_{ops}^{(p)} \simeq \frac{16\left(1+\nu\right)}{4-\nu} n_p + \nu^{p-1} A_{ops}^{(0)} . \quad (3.11)$$

В построенном нами многосеточном переобуславливателе $\nu = 3$. Следовательно,

$$A_{ops}^{(p)} \simeq 64 n_p + 3^{p-1} A_{ops}^{(0)} . \quad (3.12)$$

Далее, пользуясь легко проверяемым неравенством $3^{p-1} \le n_p$, получим:

$$A_{ops}^{(p)} \simeq \left(64 + A_{ops}^{(0)}\right) n_p . \quad (3.13)$$

Величина $A_{ops}^{(p)}$ называется *арифметической ценой* переобуславливателя M. Таким образом, построенный многосеточный переобуславливатель можно рассматривать как оптимальный в том смысле, что он спектрально эквивалентен исходной матрице жесткости, а его арифметическая цена пропорциональна размерности алгебраической задачи с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от шага сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Р. Акопян, А.Г. Манукян, Построение алгебраических многосеточных переобуславливателей для конечноэлементных матриц эллиптических краевых задач. I. Двухсеточные переобуславливатели. // Вестник РАУ, серия: физико-математические и естественные науки, 1, 2007, с.
2. Yu.A. Kuznetsov, Algebraic multigrid domain decomposition methods. // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 4, № 5, 1989, pp. 351- 379.
3. Ю.Р. Акопян, Ю.А. Кузнецов, Алгебраический многосеточный метод решения конечноэлементных уравнений на иерархических треугольных сетках. // Препринт № 250, ОВМ АН СССР. - М., 1990.

4. А.А. Самарский, Е.С. Николаев, Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978.
5. Yu.R. Hakopian, Yu.A. Kuznetsov, Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v.6, № 6, 1991, pp. 453-483.
6. O. Axelsson and P.S. Vassilevski, Asymptotic work estimates for AMLI methods. // Appl. Numer. Math., 7, 1991, pp. 437-451.

Поступила в редакцию
26.06.2007

¾ÈÆäî²Î²Ü º½ð²ÚÆÜ ÊÜ¸ÆðÜºðÆ ìºðæ²ìàð î²ðð²ÚÆÜ Ø²îðÆòÜºðÆ Ð²Ø²ð Ð²Üð²Ð²Þì²Î²Ü ´²½Ø²ò²Üò²ÚÆÜ ìºð²ä²ÚØ²Ü²ìàðÆâÜºðÆ Î²èàôòàôØÀ

II. ´²½Ø²ò²Üò²ÚÆÜ ìºð²ä²ÚØ²Ü²ìàðÆâ

Յու.Ռ. Հակոբյան, Ա.Գ. Մանուկյան

Աշխատանքը, որը բաղկացած է երկու մասից, նվիրված է էլիպտական հավասա-ñáõÙÝ»ñÇ í»ñç³íáñ ï³ññ³ÛÇÝ Ùáï³ñÏÙ³Ý ¹»åùáõÙ ³é³ç³óáÕ Ïáß ïáõÃÛ³Ý մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչ-Ý»ñÇ Ï³éáõóÙ³ÝÁ: º½ñ³·ÍÇ ÙÇ Ù³ëÇ íñ³ ¹ñí³Í ¿ ¸ÇñÇËÉ»ÛÇ å³ÛÙ³ÝÁ, ÇëÏ ÙÛáõëÇ` »ññáñ¹ ë»éÇ »½ñ³ÛÇÝ å³ÛÙ³ÝÁ: ²ßË³ï³ÝùÇ »ñÏñáñ¹ Ù³ëáõÙ Ï³éáõó-վում է ներքին չեբիշևյան իտերացիաներով բազմացանցային վերապայմանավորիչ:

CONSTRUCTING OF ALGEBRAIC MULTIGRID PRECONDITIONERS FOR FINITE ELEMENT MATRICES OF ELLIPTIC BOUNDARY PROBLEMS

II. MULTIGRID PRECONDITIONER

Yu.R. Hakopian, A.G. Manukyan

The paper, consisting of two parts, is devoted to constructing of algebraic multigrid preconditioners for stiffness matrices arising in finite element approximation of elliptic problems. The Dirichlet condition is placed on the one part of the boundary and the third type condition on the rest of the boundary. In the second part of the paper the multigrid preconditioner with the inner Chebyshev iterations is constructed.