РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

В Е С Т Н И К

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

№2

ISSN 1829-0450

ЕРЕВАН 2010

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

В Е С Т Н И К

СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

№2

Издательство РАУ

Ереван 2010

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ. №2. – Ер.: Изд-во РАУ, 2010. – с. 85.

Журнал входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА

ISSN 1829-0450

УДК 519.17

ОБ ОДНОСТОРОННЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РАСКРАСКАХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Р.Р. Камалян

Институт информатики и проблем автоматизации НАН РА

Для двудольных графов некоторых классов найдены оценки наименьшего возможного числа цветов в таких правильных реберных раскрасках, которые интервальны во всех вершинах одной доли графа.
Ключевые слова: двудольный граф, правильная реберная раскраска, интервальный спектр.

1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные связные графы без кратных ребер и петель [1]. Не определяемые понятия и обозначения можно найти в [2 – 4]. Для графа G и произвольного подмножества $V_0 \subseteq V(G)$ через $<V_0>_G$ обозначаем подграф графа G, порожденный подмножеством V_0 его вершин. Скажем, что правильная реберная раскраска $\varphi \in \alpha(G)$ интервальна (непрерывна) в вершине $x_0 \in V(G)$ графа G, если $S_G(x_0,\varphi)$ является интервалом (если $S_G(x_0,\varphi) = Int(1, d_G(x_0))$); скажем, что φ интервальна (непрерывна) на подмножестве $R_0 \subseteq V(G)$ вершин графа G, если для $\forall x \in R_0$ φ интервальна (непрерывна) в x; $\varphi \in \alpha(G)$ назовем интервальной раскраской графа G, если φ интервальна на $V(G)$.

Если G – граф, и подмножество $R \subseteq V(G)$ его вершин таково, что $\exists \varphi_0 \in \alpha(G)$, интервальная на R, то через $w_R(G)$ и $W_R(G)$ обозначаем, соответственно, наименьшее и наибольшее t, при котором $\exists \varphi \in \alpha(G,t)$, интервальная на R. Так как не для всех графов существует интервальная раскраска, то важной является задача изучения правильных реберных раскрасок графов, интервальных на некотором подмножестве R его вершин. Особый интерес представляет случай, когда граф является двудольным, а R есть множество вершин любой из его долей, так как в этом случае задача может быть полезной при составлении таких учебных расписаний, которые обеспечивают работу без «окон» для одной из сторон учебного процесса – например, для преподавателей. Весьма ценна при этом задача вычисления значения параметра $w_R(G)$, так как оно соответствует наименьшей возможной длительности такого расписания. Отметим, что точное значение $w_R(G)$ для произвольного двудольного графа G, в котором R – множество вершин одной из его долей, пока не известно. Целью работы является оценка параметра $w_R(G)$ для случаев, когда G является двудольным графом, а R – множеством вершин одной из его долей. Мы предложим полиномиальный алгоритм, позволяющий оценивать этот параметр для произвольного двудольного графа и укажем его точное значение для полных двудольных графов $K_{m,n}$.

Сперва напомним о двух известных результатах.

Теорема 1 [5, 6]**.** Пусть G – двудольный граф, и R – множество вершин любой из его долей. Тогда: 1) $\exists\varphi\in\alpha(G)$, интервальная на R; 2) $W_R(G)=|E(G)|$; 3) для $\forall t$, $w_R(G)\le t\le W_R(G)$, $\exists\varphi\in\alpha(G,t)$, интервальная на R.

Теорема 2 [6, 7]**.** Пусть $G=G(X,Y,E)$ – двудольный граф. Если для любого $e=(x,y)\in E$, $x\in X$, $y\in Y$, верно неравенство $d_G(x)\le d_G(y)$, то существует $\exists\varphi\in\alpha(G,\Delta(G))$, непрерывная на Y.

Пусть $H(\mu,\nu)$ – $(0,1)$-матрица с μ строками, ν столбцами, с элементами h_{ij}, $1\le i\le\mu$, $1\le j\le\nu$. i-ую строку матрицы $H(\mu,\nu)$, $1\le i\le\mu$, назовем собранной, если из $h_{ip}=h_{iq}=1$, $p\le t\le q$ следует $h_{it}=1$, и верно неравенство $\sum_{j=1}^{\nu}h_{ij}\ge 1$. Аналогично, j-ый столбец матрицы $H(\mu,\nu)$, $1\le j\le\nu$, назовем собранным, если из $h_{pj}=h_{qj}=1$, $p\le t\le q$ следует $h_{tj}=1$, и верно неравенство $\sum_{i=1}^{\mu}h_{ij}\ge 1$. Для i-ой строки матрицы $H(\mu,\nu)$, все строки и столбцы которой собранные, определим число $\varepsilon(i,H(\mu,\nu))=\min_{h_{ij}=1}j$, $i=1,\dots,\mu$. $H(\mu,\nu)$ назовем r-регулярной $(r\ge 1)$ матрицей, если $\sum_{j=1}^{\nu}h_{ij}=r$, $i=1,\dots,\mu$. $H(\mu,\nu)$ назовем r-сжатой $(r\in\mathbb{Z})$ матрицей, если $\sum_{i=1}^{\mu}h_{ij}\le r$, $j=1,\dots,\nu$. $H(\mu,\nu)$ назовем собранной матрицей, если все ее строки и столбцы собранные, $h_{11}=h_{\mu\nu}=1$ и $\varepsilon(1,H(\mu,\nu))\le\cdots\le\varepsilon(\mu,H(\mu,\nu))$.

Лемма 1. Если собранная n-регулярная $(n\ge 1)$ матрица $P(m,w)$ с элементами p_{ij}, $1\le i\le m, 1\le j\le w$, является n-сжатой, то $w\ge\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil n.$

Доказательство индукцией по $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$.

При $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = 1$ доказываемое очевидно.

Пусть теперь $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \lambda_0 \geq 2,$ и для всех собранных n'-регулярных n'-сжатых матриц $P'(m', w')$ с $\left\lceil \frac{m'}{n'} \right\rceil \leq \lambda_0 - 1$ неравенство $w' \geq \left\lceil \frac{m'}{n'} \right\rceil n'$ справедливо.

Убедимся, что $\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right) \geq n+1.$

Предположим противное: $\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right) \leq n.$ Из того, что $P(m,w)$ является собранной n- регулярной матрицей, вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} p_{in} \geq \sum_{i=1}^{n+1} p_{in} \geq n+1,$$

противоречащее n-сжатости матрицы $P(m,w)$. Полученное противоречие показывает, что $\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right) \geq n+1.$

Теперь из матрицы $P(m,w)$ образуем матрицу

$$P'\Big(m-n, w-\big(\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right)-1\big)\Big)$$

удалением тех и только тех элементов p_{ij}, для которых имеет место хотя бы одно из неравенств $i \leq n,\ j \leq \varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right)-1.$

Легко видеть, что $P'\Big(m-n, w-\big(\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right)-1\big)\Big)$ является собранной n-регулярной n-сжатой матрицей с $\left\lceil \frac{m-n}{n} \right\rceil = \lambda_0 - 1,$ откуда, в силу предположения индукции, получаем

$$w-\big(\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right)-1\big) \geq \left\lceil \frac{m-n}{n} \right\rceil n$$

и, следовательно,

$$w \geq (\lambda_0 - 1)n + \big(\varepsilon\left(n+1, P(m,w)\right)-1\big) \geq (\lambda_0 - 1)n + n = \lambda_0 n = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil n.$$

Лемма 1 доказана.

Для натуральных чисел m, l, n, k, где $m \geq n$, определим класс $Bip(m,l,n,k)$ двудольных графов следующим образом:

$$Bip(m,l,n,k)=\left\{G=G(X,Y,E)\ \middle|\ \begin{array}{c} G=G(X,Y,E) \text{ является связным}, \\ |X|=m,\ |Y|=n, \\ \text{для } \forall x\in X\ \ d_G(x)=l, \text{ для } \forall y\in Y \\ d_G(y)=k. \end{array}\right\}$$

§2. Основные результаты

Пусть $G=G(X,Y,E)$ – двудольный граф.

Скажем, что система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1),\ldots,G_s(X_s,Y_s,E_s)$ графа G является Y-лестничной, если удовлетворяются следующие условия: 1) для $i=1,\ldots,s$ $X_i\subseteq X$, $Y_i\subseteq Y$, $E_i\subseteq E$, $X_i\neq\varnothing$, $Y_i\neq\varnothing$, $E_i\neq\varnothing$; 2) при $1\le i'<i''\le s$ $E_{i'}\cap E_{i''}=\varnothing$, $Y_{i'}\cap Y_{i''}=\varnothing$; 3) $\bigcup\limits_{i=1}^{s}E_i=E$; $\bigcup\limits_{i=1}^{s}X_i=X$; $\bigcup\limits_{i=1}^{s}Y_i=Y$; 4) для $\forall i,\ 1\le i\le s$, существует непрерывная на Y_i $\Delta(G_i)$-раскраска графа $G_i(X_i,Y_i,E_i)$.

Если система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов графа G является Y-лестничной, то положим $\nu(\mathfrak{g}_s(G))\equiv\sum\limits_{i=1}^{s}\Delta(G_i)$. Легко видеть, что для любого двудольного графа $G(X,Y,E)$ Y -лестничная система подграфов существует.

Очевидно, что имеет место

Теорема 3. Если система $\mathfrak{g}_s(G)$ подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1)$,..., $G_s(X_s,Y_s,E_s)$ двудольного графа $G=G(X,Y,E)$ является Y-лестничной, то: 1) существует интервальная на Y $\nu(\mathfrak{g}_s(G))$-раскраска графа G; 2) $w_Y(G)\le\nu(\mathfrak{g}_s(G))$.

Заметим, что из теоремы 2 вытекает важное

Следствие 1. Пусть $G=G(X,Y,E)$ – двудольный граф, а система $H_s(G)$ его подграфов $G_1(X_1,Y_1,E_1),\ldots,G_s(X_s,Y_s,E_s)$ такова, что удовлетворяются условия: 1) для $i=1,...,s$, $X_i\subseteq X$, $Y_i\subseteq Y$, $E_i\subseteq E$, $X_i\neq\varnothing$, $Y_i\neq\varnothing$, $E_i\neq\varnothing$; 2) при $1\le i'<i''\le s$, $E_{i'}\cap E_{i''}=\varnothing$, $Y_{i'}\cap Y_{i''}=\varnothing$; 3) $\bigcup\limits_{i=1}^{s}E_i=E$, $\bigcup\limits_{i=1}^{s}X_i=X$, $\bigcup\limits_{i=1}^{s}Y_i=Y$; 4) для $\forall i, 1\le i\le s$, из $e=(x,y)\in E_i$, где $x\in X_i, y\in Y_i$, вытекает неравенство $d_{G_i}(x)\le d_{G_i}(y)$.

Тогда система $H_s(G)$ является Y -лестничной системой подграфов графа G.

Теперь опишем алгоритм **А** построения Y -лестничной системы подграфов произвольного графа $G=G(X,Y,E)$.

Алгоритм A.

Вход: Двудольный граф $G = G(X, Y, E)$.

Выход: Система $H_s(G)$ подграфов графа G, удовлетворяющая условиям следствия 1.

Шаг 1: $q := 1$

Шаг 2: $m := 0$

Шаг 3: $Seq := \varnothing$

Шаг 4: $Y[1] := Y$

Шаг 5: $X[1] := X$

Шаг 6: Перенумеровать вершины множества $Y[q]$ в порядке убывания степеней.

Шаг 7: $G[q] :=< X[q] \cup Y[q] >_G$

Шаг 8: $p := 1$

Шаг 9: $Y_{\exp} := \varnothing$

Шаг 10: $X_{\exp} := \varnothing$

Шаг 11: $z := y_{\text{p}}$

Шаг 12: $Y_{p\ \exp} := Y_{\exp} \cup \{z\}$

Шаг 13: $X_{p\ \exp} := X_{\exp} \cup I_{G,v}(z)$

Шаг 14: $G_{p\ \exp} :=< X_{p\ \exp} \cup Y_{p\ \exp} >_G$

Шаг 15: Проверка. Если $\exists e_0 = (x, y) \in E(G_{p\ \exp})$, где $x \in X_{p\ \exp}, y \in Y_{p\ \exp}$, для которого $d_{G_{p\ \exp}}(x) > d_{G_{p\ \exp}}(y)$, то выполнить **Шаг 18**.

Шаг 16: $Y_{\exp} := Y_{p\ \exp}$

Шаг 17: $X_{\exp} := X_{p\ \exp}$

Шаг 18: Проверка. Если $p \neq |Y| - m$, то выполнить **Шаг 35**.

Шаг 19: $Y_q := Y_{\exp}$

Шаг 20: $X_q := X_{\exp}$

Шаг 21: $G_q :=< X_q \cup Y_q >_G$

Шаг 22: $Seq := Seq, G_q$

Шаг 23: $\widetilde{Y} := Y[q] \setminus Y_q$

Шаг 24: $\widetilde{X} := \bigcup_{y \in \widetilde{Y}} I_{G,v}(y)$

Шаг 25: $m := m + |Y_q|$

Шаг 26: Проверка. Если $m \neq |Y|$, то выполнить **Шаг 31**.

Шаг 27: $s := q$

Шаг 28: $H_s(G) := Seq$

Шаг 29: Выдать $H_s(G)$ на **Выход**.

Шаг 30: Стоп.

Шаг 31: $q := q + 1$

Шаг 32: $Y[q] := \widetilde{Y}$

Шаг 33: $X[q] := \widetilde{X}$

Шаг 34: Перейти к **Шагу 6**.

Шаг 35: $p := p + 1$

Шаг 36: Перейти к **Шагу 11**.

Комментарий к Алгоритму А.

Граф $G[q]$, определяемый на Шаге 7, является подграфом исходного графа G, порожденным подмножеством $X[q] \cup Y[q]$ его вершин. При $q = 1$ $G[q]$ совпадает с G, что ясно из Шагов 4,5.

На Шаге 3 вводится последовательность Seq подграфов графа G с начальным значением $\varnothing$. Конечное значение последовательности Seq в качестве Y-лестничной системы $H_s(G)$ подграфов графа G на Шагах 28 и 29 будет выдано на Выход Алгоритма **А**.

Из графа $G[q]$ в результате осуществления определенной экспериментально-поисковой процедуры будет выбран подграф G_q, порожденный подмножеством $X_q \cup Y_q$ его вершин (Шаг 21), и на Шаге 22 G_q будет добавлен к последовательности Seq.

На Шагах 23 и 24 вычисляются новые значения Y и X, и, если граф G еще не исчерпан подграфами последовательности Seq (проверка на Шаге 26, где, по существу, проверяется, осталась ли хотя бы одна вершина в доле Y, не вошедшая ни в один из подграфов последовательности Seq), то вычисленные новые значения Y и X на Шагах 32 и 33 становятся новыми значениями для $Y[q]$ и $X[q]$ при возросшем на Шаге 31 значении q, приводя к рассмотрению на Шаге 7 очередного графа $G[q]$.

Если же проверка на Шаге 26 показывает, что граф G исчерпан подграфами последовательности Seq, то Шаги 27, 28, 29 и 30 завершают работу Алгоритма **А**. Заметим при этом, что параметр m, участвующий в проверке Шага 26, вводимый на Шаге 2 с нулевым начальным значением и в дальнейшем увеличиваемый на Шаге 25, содержательно представляет собой суммарное число вершин из Y, вошедших в подграфы последовательности Seq.

Теперь рассмотрим «внутренний» цикл Алгоритма **А**, предназначенный для осуществления вышеупомянутой экспериментально-поисковой процедуры выбора подграфа G_q из графа $G[q]$.

На Шаге 8 параметру p присваивается его начальное значение 1.

На Шагах 9 и 10 вводятся экспериментальные подмножества $Y_{\exp}$ и $X_{\exp}$ множеств $Y[q]$ и $X[q]$, соответственно, с начальными значениями $\varnothing$ и $\varnothing$. Конечные значения $Y_{\exp}$ и $X_{\exp}$ на Шагах 19 и 20 окажутся значениями Y_q и X_q, соответственно.

На Шаге 11 вершина y_p выбирается в качестве экспериментальной вершины z. На Шагах 12 и 13 в связи с выбором вершины z назначаются экспериментальные подмножества $Y_{p\ \exp}$ и $X_{p\ \exp}$, после чего на Шаге 14 определяется участвующий в эксперименте по включению вершины z подграф $G_{p\ \exp}$ графа G, порожденный подмножеством $X_{p\ \exp} \cup Y_{p\ \exp}$ его вершин.

На Шаге 15 осуществляется эксперимент, состоящий в выяснении того, существует ли в графе $G_{p\ \exp}$ ребро $e_0 = (x, y) \in E(G_{p\ \exp})$, где $x \in X_{p\ \exp}$, $y \in Y_{p\ \exp}$, для которого $d_{G_{p\ \exp}}(x) > d_{G_{p\ \exp}}(y)$. Если такого ребра e_0 не существует, то эксперимент признается удачным, и на Шагах 16 и 17 вычисляются новые значения $Y_{\exp}$ и $X_{\exp}$. После этого на Шаге 18 осуществляется проверка того, есть ли в рассматриваемом графе $G[q]$ (в действительности, во множестве $Y[q]$) вершина, не принимавшая участия в экспериментах в качестве вершины z. Если такой вершины нет, то на Шагах 19, 20 и 21 вычисляются значения Y_q, X_q и G_q, соответственно. Если же такая вершина есть, то на Шаге 35 параметр p получает новое значение, инициируя на Шагах 36 и 11 новый эксперимент.

Если же на Шаге 15 обнаруживается ребро e_0 упомянутого типа, то эксперимент признается неудачным, и мы, пропуская Шаги 16 и 17 и не меняя значений $Y_{\exp}$ и $X_{\exp}$, переходим к уже обсужденной проверке на Шаге 18.

Время работы алгоритма **A** не превосходит $O\left(\left(\Delta(G)\right)^2 \cdot \left|V(G)\right|^2\right)$.

Из следствия 1 и теоремы 3 вытекает

Следствие 2. Пусть $G = G(X, Y, E)$ – двудольный граф, и система $H_s(G)$ подграфов графа G построена в результате применения к графу G алгоритма **A**. Тогда существует интервальная на Y $\nu(H_s(G))$-раскраска графа G.

Сделаем некоторые выводы о величинах $w_X(G)$ и $w_Y(G)$ для графов класса $Bip(m, l, n, k)$ и, в частности, найдем их точные значения для полных двудольных графов $K_{m,n}$.

Утверждение 1. Если $G = G(X,Y,E) \in Bip(m,l,n,k)$, то $w_Y(G) = k$.

Замечание 1. Легко видеть, что если $G = G(X,Y,E) \in Bip(m,l,n,k)$, и на вход алгоритма **A** дать граф $G(Y,X,E)$, то в результате работы алгоритма **A** будет построена X-лестничная система $H_s(G)$ подграфов $G_1(Y_1,X_1,E_1),\ldots$ $G_s(Y_s,X_s,E_s)$ графа G с $\nu(H_s(G)) = l \cdot \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil$.

Из следствия 2 и замечания 1 вытекает

Следствие 3. Если $G = G(X,Y,E) \in Bip(m,l,n,k)$, то $w_X(G) \le l \cdot \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil$.

Рассмотрим граф $K_{m,n}$, где $m \ge n$, $V(K_{m,n}) = X \cup Y$, $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$, $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$, $E(K_{m,n}) = X \times Y$.

Из утверждения 1 вытекает

Следствие 4. $w_Y(K_{m,n}) = m$.

Теорема 4. $w_X(K_{m,n}) = n \cdot \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$.

Доказательство. Неравенство $w_X(K_{m,n}) \le n \cdot \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ вытекает из следствия 3, так как $K_{m,n} \in Bip(m,n,n,m)$.

Убедимся, что $w_X(K_{m,n}) \ge n \cdot \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$.

Рассмотрим интервальную на X $w_X(K_{m,n})$-раскраску φ графа $K_{m,n}$. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что

$$l\left(S_{K_{m,n}}(x_1,\varphi)\right) \le \cdots \le l\left(S_{K_{m,n}}(x_m,\varphi)\right)$$

Определим $(0,1)$-матрицу $P\left(m, w_X(K_{m,n})\right)$ с m строками и $w_X(K_{m,n})$ столбцами следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in S_{K_{m,n}}(x_i,\varphi), \\ 0 - & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$1 \le i \le m,\ 1 \le j \le w_X(K_{m,n}).$$

Из свойств раскраски φ вытекает, что $P\left(m, w_X(K_{m,n})\right)$ является собранной n-регулярной n-сжатой матрицей, откуда, в силу леммы 1, вытекает доказываемое неравенство.

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA. 1969.
2. *Камалян Р.Р.* О числе цветов в циклически непрерывных реберных раскрасках простых циклов // Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, № 1, 2010 г., С. 13–21.
3. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t-цветных раскрасок «лестниц Мебиуса» при варьировании t // Сборник научных статей Годичной научной конференции (декабрь, 2008) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер.: Изд-во РАУ, 2009. С. 81–84.
4. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О параметре μ_{12} дерева // Сборник научных статей Годичной научной конференции (декабрь, 2009) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер.; Изд-во РАУ, 2010. С. 149–151.
5. *Камалян Р.Р.* Интервальные реберные раскраски графов // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. н., ИМ СО АН СССР, 1990.
6. *Asratian A.S., Kamalian R.R.* Interval colorings of edges of a multigraph // Appl. Math., 5 (1987), Yerevan State University, PP. 25–34.
7. *Асратян А.С.* Исследование одной математической модели теории расписаний. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м. н. // МГУ, 1980.

ON ONE-SIDED INTERVAL COLORINGS OF BIPARTITE GRAPHS

R.R. Kamalian

For bipartite graphs of some classes the estimates are found for the least possible number of colors in such proper edge colorings which are interval in all vertices of one part of the graph.

ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ՄԻՋԱԿԱՅՔԱՅԻՆ ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ.Ռ. Քամալյան

Որոշ դասերի երկկողմանի գրաֆների համար գտնված են ճիշտ կողային և մեկ կողմի բոլոր գագաթների համար նաև միջակայքային ներկման մեջ օգտագործվող գույների հնարավոր նվազագույն թվի գնահատականներ:

УДК 621.391.15

КОРРЕКЦИЯ ОШИБОК В АДДИТИВНОМ КАНАЛЕ

В.К. Леонтьев, Г.Л. Мовсисян, Ж.Г. Маргарян

Computer center, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
BIT Group, Moscow, Russia YSU, Departament of Informatics and Applied Mathematics, Yerevan, Armenia

Для аддитивных каналов, с множеством ошибок $A \subseteq B^n$, в пространстве B^n определено новое расстояние МЛМ, которое является обобщением расстояния Хэмминга. Приведены необходимые и достаточные условия, когда код $V \subseteq B^n$ исправляет ошибки A аддитивного канала. Построены семейства совершенных кодов, которые аналогичны совершенным кодам Хэмминга и Голея. Описан алгоритм декодирования для группового кода.

§1. Введение

Существует много способов передачи информации и все они так или иначе связаны с понятием канала связи. Что происходит в этом канале? Мы будем исходить из того, что все, что происходит в канале связи – это преобразование одних слов в другие, т.е. в каждом канале реализуется некоторая словарная функция

$$B^n \to B^n,$$

где $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – конечный алфавит и B^n множество всех слов длины n над алфавитом B.

В этой работе мы рассмотрим так называемый аддитивный канал связи и ряд задач, связанных с построением кодов, исправляющих ошибки этого канала [2, 5].

Пусть $B = \{0,1\}$ – поле Галуа из двух элементов и $B^n = \{0,1\}^n$ векторное пространство размерности n над этим полем.

С подмножеством $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \subseteq B^n$ связывается аддитивный канал A следующим образом [1]: любой из векторов $x \in B^n$ в канале A преобразуются в один из векторов вида

$$y = x \oplus y_k, \qquad y_k \in A. \qquad (1)$$

где $\oplus$ – операция сложения (сложения по $\mathrm{mod}\,2$) в пространстве B^n.

Таким образом, каждое из преобразований вида (1) осуществляет «сдвиг» на вектор y_k. В результате «сдвига» y_k вектор x преобразуется в другой вектор y, который может совпадать с x, если $y_k = (00\ldots0)$.

В терминах теории графов описанную выше ситуацию можно изложить следующим образом. На множестве вершин B^n определим отношение смежности, соединив вершины u и v ребром, если во множестве A существует такой вектор y_k, что

$$u = v \oplus y_k. \qquad (2)$$

Тем самым мы получаем неориентированный граф $G = \left(B^n, E_A\right)$, множество ребер E_A которого задается соотношением (2). Этот граф имеет 2^n-вершин и $2^{n-1}(m+1)$-ребер, 2^n из которых являются петлями, если A содержит нулевой вектор и $2^{n-1}m$-ребер, если A без нулевого вектора.

Примеры.

1) Если $n = 2$ и $A = \{(11)\}$, то граф $\left(B^2, E_A\right)$ представлен на рис.1, а если $A = \{(00),(11)\}$, то граф $\left(B^2, E_A\right)$ представлен на рис. 2.

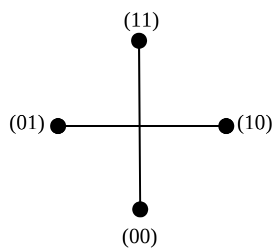

Рис. 1.

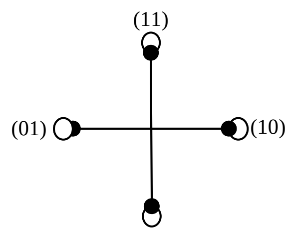

Рис. 2.

2) Если $A = \{(0^{k-1}10^{n-k}), k = \overline{1,n}\}$, то $\left(B^n, E_A\right)$ – это «обычный» куб B^n.

На графе $\left(B^n, E_A\right)$ естественным образом вводятся расстояния ρ между вершинами $u, v \in B^n$ как минимальное число ребер в цепи, соединяющей эти вершины. Если такой цепи нет, то $\rho(u,v) \stackrel{def}{=} \infty$. Тем самым мы получаем стандартное конечное метрическое пространство.

В содержательном смысле аддитивный канал может служить неплохой моделью для многих уже известных преобразователей информации.

Например, если во время передачи двоичного вектора длины n происходит не более чем t искажений вида $0 \to 1$, $1 \to 0$, то эта классическая ситуация может быть представлена аддитивным каналом $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, где A – это шар радиуса t с центром в нуле, т.е. $m + 1 = \sum_{k=0}^{t} C_n^k$.

Для того чтобы «промоделировать» двоичный симметричный канал, нужно в качестве множества A взять весь куб B^n и ввести на нем вероятностную меру

$$P(v) = p^{\|v\|}(1-p)^{n-\|v\|},$$

где $v \in B^n$, $\|v\|$ – вес Хэмминга, p – параметр двоичного симметричного канала.

Другие примеры содержательных ситуаций, связанных с аддитивным каналом, можно найти в работах [1-5].

Определение кода V, исправляющего ошибки аддитивного канала A копирует стандартное определение кода, исправляющего ошибки и состоит в следующем.

Определение. Окрестность вектора $v \in B^n$ k-го порядка по $C \subseteq B^n$ определим следующим образом [5]:

$$C^k(v) = \{u \oplus y : u \in C^{k-1}(v), y \in C\}, \quad C^0(v) = \{v\}.$$

Определение. Код $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$ исправляет ошибки аддитивного канала $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, если выполняется условие:

$$A^1(v_i) \cap A^1(v_j) = \varnothing, \quad \textit{где } i, j = \overline{1, N}, \ i \neq j.$$

Эквивалентное определение выглядит так

код $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$ исправляет ошибки аддитивного канала $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, если

$$v_i \oplus v_j \neq y_r \oplus y_s, \quad \textit{где } i, j = \overline{1, N}, \ r, s = \overline{0, m}, \ i \neq j, \ r \neq s.$$

Ясно, что предыдущие определения являются симметричными относительно пары (A, V) и потому порождение «ошибок» и «исправление» ошибок имеют одинаковую природу.

Утверждение 1. Если код V исправляет ошибки аддитивного канала A, то код A исправляет ошибки аддитивного канала V.

Поскольку мощность окрестности k-ого порядка не зависит от вектора v, то обозначим $A^k = |A^k(v)|$.

Отметим теперь, что для мощности кода V исправляющего ошибки аддитивного канала $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ справедливы следующие границы [1–3]

$$\frac{2^n}{A^2} \leqslant |V| \leqslant \frac{2^n}{A^1}.$$

При этом код V на котором достигается верхняя граница называется совершенным кодом, исправляющим ошибки аддитивного канала A.

Для заданного канала A основной задачей является построение кода $V(A)$ максимального объема, исправляющего ошибки каналам A.

На парах (A,V) – подмножеств куба B^n введем предикат:

$$X(A,V)=\begin{cases}1, & \textit{если код } V \textit{ исправляет ошибки } A,\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

1) $X(A,V)=X(V,A)$,

2) $X\left(A\oplus x, V\oplus y\right)=X\left(V,A\right),\quad x,y\in B^n$,

3) $X(A,V)=X(TA,TV)$, где T – произвольное линейное обратимое преобразование B^n.

Действительно, из $X(A,V)=1$ и $Tv_i\oplus Ty_r=Tv_j\oplus Ty_s$, $i,j=\overline{1,N}$, $r,s=\overline{0,m}$ следует что $X(A,V)=1$ и $(v_i\oplus y_r)T=(v_j\oplus y_s)T$, то есть $X(A,V)=1$ и $v_i\oplus y_r=$ $=v_j\oplus y_s$. Что является противоречием.

Задача о построении кода максимальной мощности, исправляющего ошибки аддитивного канала A выглядит следующим образом. Найти или оценить $|V(A)|$.

Если фиксировать мощность множества A, то существует $\binom{2^n}{m+1}$ различных аддитивных каналов и, кака обычно, целесообразно рассмотреть нижнюю и верхнюю границы мощности соответствующих корректирующих кодов

$$\overline{D}_s(n)=\max_{|A|=s}|V(A)|,$$

$$\underline{D}_s(n)=\min_{|A|=s}|V(A)|.$$

Содержательный смысл этих функций, рассмотренных в работе [1] для класса групповых кодов, достаточно очевиден и вряд ли нуждается в дополнительных комментариях.

Ясно, что аддитивных каналов столько, сколько существует булевых функций и, как показывает свойство 2 и 3, некоторые из них по существу не отличаются друг от друга. Как может выглядеть классификация таких каналов не ясно, но следующие определения соответствуют общепринятой точке зрения.

Определение. Каналы A и C называются эквивалентными, если любой код, исправляющий ошибки аддитивного канала A исправляет ошибки канала C и наоборот.

Формально можно описать введя отношение частичного порядка

$$A\le C;\quad X(C,V)=1\to X(A,V)=1,\quad \textit{для всех } V\subseteq B^n.$$

Если $A\subseteq C$, то $A\le C$, что выглядит вполне естественно.

Это свойство позволяет для каждой мощности $m < 2^n$ искать аддитивные каналы с «наилучшими» и «наихудшими» корректирующими свойствами.

Утверждение 1. Аддитивные каналы $(A \oplus u)$ и $(A \oplus v)$ являются эквивалентными для любых $u, v \in B^n$.

Утверждение 3. *Если* $X(A,V) = 1$, *то* $|A \cap V| \leq 1$.

Из предыдущих утверждений следует, что без ограничения общности можно считать:

а) если $\{A\}$ – класс аддитивных каналов, эквивалентных A, то проблему кодирования достаточно решить для любого представителя этого класса;

б) аддитивный канал A содержит нулевой вектор, что можно интерпретировать как возможность безошибочной передачи сигнала по этому каналу.

Поскольку $X(A,V) = 1$ следует $X(V, A) = 1$,то аналогичное утверждение верно и для кода V, т.е. достаточно рассматривать коды, содержащие нулевой вектор.

Таким образом, из $X(A,V) = 1$ следует, что множество A и V «ортогональны» и могут пересекаться только в нуле, а поиск кода V, надо организовать в множестве $\{B^n \setminus A\} \cup \{(00\ldots0)\}$. В дальнейшем $y_0 = (00\ldots0) \in A$, $v_0 = (00\ldots0) \in V$.

Утверждение 4. Если $X(A,V) = 1$, то имеет место

$$\left(\bigcup_{u \in A} A^1(u)\right) \cap \left(\bigcup_{v \in V} V^1(v)\right) = \{(00\ldots0)\}.$$

Доказательство. Допустим для $u \in A$, $v \in V$ и существует $x \in B^n$ такое, что $x \neq (00\ldots0)$ и $x \in A^1(u) \cap V^1(v)$. Это возможно, если

$$x = u = v, \quad т.е. \;\; x \in A \cap V, \;\; x \neq (00\ldots0),$$

что противоречит предыдущему утверждению 3.

В содержательном смысле имеем: множество всех окрестностей первого порядка векторов $u \in A$ по A и множество всех окрестностей первого порядка векторов $v \in V$ по V «ортогональны» относительно нулевого вектора.

Отсюда следует что поиск кода V для которого $X(A,V) = 1$ надо организовать в множестве $\left\{B^n \setminus \bigcup_{u \in A} A^1(u)\right\} \cup \{(00\ldots0)\}$ при условии, что $\bigcup_{v \in V} V^1(v)$ тоже принадлежит этому множеству.

Примеры.

3) Пусть $A = \{(000), (100), (101)\}$, тогда имеем:

$$A^1(000) = \{(000),(100),(101)\}$$
$$A^1(100) = \{(100),(000),(001)\}$$
$$A^1(101) = \{(101),(001),(000)\}$$
$$B^n \setminus \{A^1(100) \cup A^1(101) \cup A^1(000)\} = \{(010),(110),(011),(111)\}.$$

Отсюда получаем, что

$$V = \{(000), v\}, \quad где \;\; v \in \{(010),(110),(011),(111)\}.$$

Ясно, что построенный в этом примере код V является максимальным по мощности.

Построим теперь примеры классификации аддитивных каналов $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ для малых значений m.

4) Если $m = 0$ и $A = \{y_0\}$, где $y_0 = (00\ldots0)$, то код $V = B^n$ является исправляющим ошибки аддитивного канала A. Следовательно, $\overline{D}_1(n) = 2^n$.

5) Если $m = 1$ и $A = \{y_0, y_1\}$, где $y_0 = (00\ldots0)$, $y_1 = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\}$, то в качестве кода V, исправляющего ошибки аддитивного канала A могут фигурировать различные подмножества B^n. Ясно, что код V исправляет ошибки канала A если и только если выполняется условие

$$v_i \oplus v_j \neq y, \;\; где \;\; V = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}.$$

Выбрав любое обратимое линейное преобразование T, удовлетворяющее условию

$$Ty_1 = e_1 = (10\ldots0),$$

мы можем в силу свойств 3), считать, что $y_1 = e_1$.

Пусть $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\} = \{(a_s, b_s), s = \overline{0, N}\}$, где $b_s \in B^{n-1}$. Разобьем теперь все векторы из V на классы эквивалентности $R_1, R_2, \ldots, R_k$, где $R_p = \{(a, b_p)\}$, $1 \leqslant p \leqslant k$, т.е. все векторы из R_p совпадают в $(n-1)$-ом разряде. Для R_p имеем $(a_1 b_p) \oplus (a_2 b_p) = \big((a_1 \oplus a_2)(0\ldots0)\big) = e_1$ и, таким образом, если V исправляет ошибки канала A, то $|R_p| = 1$ для $p = \overline{1, k}$.

Другими словами $V = \{(a_s b_s)\}$, $b_s \in B^{n-1}$, и все b_s, разные ($0 \leqslant s \leqslant N$). Отсюда следует, что $\overline{D}_2(n) = 2^{n-1}$ и все корректирующие коды можно «привести» к структуре V.

6) Для случая $m = 2$ и $A = \{y_0, y_1, y_2\}$, где $y_0 = (00\ldots0)$, можно использовать предыдущую схему рассуждения. Пусть

$$\begin{aligned} y_1 &= e_1 = (10\ldots0), \\ y_2 &= e_2 = (01\ldots0), \end{aligned} \qquad (3)$$

и T одно из обратимых линейных преобразований, реализующих условие (3). Поэтому достаточно рассматривать канал $A=\{0,e_1,e_2\}$. Если V исправляет ошибки A, то будем использовать представление $V=\{v_0,v_1,\dots,v_N\}=$ $=\{(a_s,b_s,c_s),\ s=\overline{0,N}\}$, где $c_s\in B^{n-2}$. Разобьем V на классы эквивалентности $R_1,\dots,R_k$, где $R_p=\{(abc_p)\}$, $1\le p\le k$. Для суммы любых двух векторов из класса R_p имеем:

$$d_p=(abc_p)\oplus(a_1b_1c_p)=(a\oplus a_1b\oplus b_10\dots0)$$

и поэтому $d_p=(u0\dots0)$, где $u=(01)$ или $u=(10)$ или $u=(11)$. Таким образом R_p не исправляет опшбки A, если $|R_p|\geqslant 2$. Поэтому $|R_p|=1$ и каждый код V может быть «приведен» к виду $V=\{(a_sb_sc_s)\}$, где $c_s\in B^{n-2}$, и все c_s разные ($0\le s\le N$).

Поэтому $\overline{D}_3(n)=2^{n-2}$ и структура кода V определена.

7) Пусть $m=3$ и $A=\{y_0,y_1,y_2,y_3\}$, где $y_0=(00\dots0)$. В этом случае можно продублировать все аргументы предыдущего пункта и получить полностью аналогичные результаты, то есть $\overline{D}_4(n)=2^{n-2}$. А коды исправляющие ошибки аддитивного канала A, могут быть «приведены» к виду аналогичному описанному в предыдущем пункте.

Для $m\geqslant 4$ исследование оптимальных кодов, возможно, требует других идей и математические подходы.

§2. Базисные каналы

Пусть подмножество $A=\{y_0,y_1,\dots,y_m\}\subseteq B^n$. Определим норму МЛМ следующим образом: для любого вектора $x\in B$,

$$\|x\|_A=\begin{cases}\min\left\{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\right\}, & \textit{где } x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i y_i,\\ \infty, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, что когда $rang\,A=n$, то

$$\|x\|_A=\min\left\{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\right\},\quad \textit{где } x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i y_i,.$$

А если $A\setminus y_0$ базис для B^n, то норма МЛМ – это

$$\|x\|_A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

где суммирование ведётся в поле действительных чисел.

Лемма 1. Для $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \subseteq B^n$, $\rho_A(u,v) = \|u \oplus v\|_A$; $u, v \in B^n$ является метрикой в B^n.

Если $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – натуральный базис, где $e_k = (0^{k-1}10^{n-k})$, то порожденная этим базисом метрика МЛМ совпадает с метрикой Хэмминга.

Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

тогда

$$\|x\|_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \tag{4}$$

где суммирование в (4) ведется в поле действительных чисел.

В дальнейшем в этом параграфе $A \setminus y_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – произвольный базис, H_A матрица строками которой являются ненулевые векторы множества A, а $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Тогда

$$\|x\|_A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Координаты вектора $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ в базисе $A \setminus y_0$ получаются в стандартной форме: $v = xH_A^{-1}$, где $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ и $v = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, а метрика Хэмминга и МЛМ метрика связаны соотношениями:

Лемма 2. Справедливы следующие формулы:

$$\rho_A(u,v) = \rho_E\left(uH_A^{-1}, vH_A^{-1}\right),$$
$$\rho_E(u,v) = \rho_A\left(uH_A, vH_A\right), \quad u, v \in B^n.$$

Примеры.

8) Пусть $A = \{(00\ldots0), (10\ldots0), \ldots, (11\ldots1)\}$. Тогда

$$H_A = \begin{Vmatrix} 10\ldots0 \\ 11\ldots0 \\ \ldots \\ 11\ldots1 \end{Vmatrix}, \qquad H_A^{-1} = \begin{Vmatrix} 10\ldots00 \\ 11\ldots00 \\ 01\ldots00 \\ \ldots \\ 00\ldots11 \end{Vmatrix},$$

а A порождает следующую норму

$$\|x\|_A = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i \oplus x_{i+1}) + x_n,$$

где $x = (x_1 x_2 \ldots x_n)$.

В частности для $n = 3$ нормы векторов выглядят следующим образом:

$\|000\|_A = 0$ $\|011\|_A = 2$

$\|001\|_A = 2$ $\|101\|_A = 3$

$\|010\|_A = 2$ $\|110\|_A = 1$

$\|100\|_A = 1$ $\|111\|_A = 1$

Несмотря на то, что метрики (Хэмминга и МЛМ) могут сильно отличаться друг от друга спектр весов пространства B^n всегда один и тот же.

Лемма 3. Пусть $t_k(A)$ – число точек из B^n с $\|x\|_A = k$. Тогда $t_k(A) = C_n^k$, $k = \overline{0,n}$.

Доказательство. По определению $\|x\|_A = k$ – это число ненулевых векторов из $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, входящих в разложение $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, $x \in B^n$.

Поэтому число векторов $\|x\|_A = k$ – это число решений уравнения $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$, $\alpha_i \in B$, которое равно C_n^k.

Замечание. Если выбрать метрику в форме примера 8), т.е. $\|x\|_A = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i \oplus x_{i+1}) + x_n$, то предыдущее утверждение эквивалентно формуле

$$\sum_{\{x_1 x_2 \ldots x_n\}} Z^{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i \oplus x_{i+1}) + x_n} = (1+Z)^n.$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$f(x) = xH_A, \tag{5}$$

где $x \in B^n$.

Для $V \subseteq B^n$ обозначим через $f(V)$ – образ множества V при преобразовании, т.е.

$$f(V) = \{ f(x) : x \in V\}. \tag{6}$$

Лемма 4. Если $V \subseteq B^n$ и V – совершенный код в метрике Хэмминга. то $f(V)$ – совершенный код в метрике МЛМ.

Доказательство. Если $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_N\}$ – заданный совершенный код с расстоянием $d=2t+1$, то шары $S_t(v_k)$ не пересекаясь образуют покрытие B^n.

Так как в силу леммы 2 и (6)

$$\rho_A\big(f(u),f(v)\big)=\rho_E(u,v),$$

то образом шара радиуса t в метрике Хэмминга является шар такого же радиуса в метрике МЛМ. Даже если вектор u лежит в «шаре Хэмминга» радиуса t с центром в векторе v_k, то вектор $f(u)$ лежит в шаре радиуса t с центром в векторе $f(v_k)$. Таким образом, шары радиуса t с центром в множестве $f(V)$ покрывают куб B^n. Аналогичным образом показывается что эти шары не пересекаются. Поэтому $f(V)$ – совершенный код в метрике МЛМ.

Отметим, что в общем случае с помощью метрики МЛМ можно выразить способность кода $V=\{v_0,v_1,\ldots,v_N\}$ исправить ошибки канала $A=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$ следующим образом.

Лемма 5. Код V исправляет ошибки аддитивного канала A, если и только если выполняется условие

$$\rho_A(v_i,v_j)\geq 3 \qquad i,j\in\overline{0,N}, \qquad i\neq j.$$

Доказательство. Если $\rho_A(v_i,v_j)\leqslant 2$ то, по определению

$$v_i\oplus v_j=\alpha_1 y_r\oplus\alpha_2 y_s, \quad r,s\in\overline{0,m}, \tag{7}$$

где $\alpha_1+\alpha_2\leqslant 2$. Из (7) следует, что $v_i\oplus\alpha_1 y_r=v_j\oplus\alpha_2 y_s$, что противоречит определению кода V, исправляющего ошибки аддитивного канала A.

Если же $\rho_A(v_i,v_j)\geqslant 3$ для всех пар (i,j), то $v_i\oplus v_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$, где $\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant 3$. Но тогда равенство $v_i\oplus\alpha_r y_r=v_j\oplus\alpha_s y_s$ невозможно и, значит, код V исправляет ошибки аддитивного канала A.

Примеры.

9) Пусть $n=3$. Рассмотрим совершенный код $V=\{(000),(111)\}$, исправляющий одну ошибку. Пусть H_A (пример 8) выглядит следующим образом:

$$H_A=\begin{Vmatrix}100\\110\\111\end{Vmatrix}.$$

Тогда образом совершенного кода V при преобразовании $f(x)=xH$ является код $f(V)=\{(000),(101)\}$. Следуя примеру 8) легко видеть, что в метрике МЛМ имеем :

$$S_1(000) = \{(100),(110),(111),(000)\},$$
$$S_1(101) = \{(101),(010),(001),(011)\}.$$

Для сравнения в метрике Хэмминга

$$S_1(000) = \{(000),(100),(010),(001)\},$$
$$S_1(111) = \{(111),(110),(101),(011)\}.$$

Предыдущие утверждения позволяют построить совершенные коды в «геометрическом» смысле для любых метрик, порожденных базисами пространства B^n.

Фраза о совершенных кодах в «геометрическом смысле» означает лишь то, что речь идет о разбиениях куба B^n на непересекающиеся шары одинакового радиуса при заданной метрике.

Стандартное определение совершенного кода означает, что это множество, на котором достигается верхняя граница мощности кода исправляющего заданное число ошибок. Эти два понятия отнюдь не всегда совпадают, что хорошо, известно на примере канала с выпадением и вставкой символов.

Теорема 1. *Если* $n = 2^e - 1$ *и* $A \setminus y_0$ *произвольный базис пространства* B^n, *то существует совершенный код, исправляющий ошибки канала* A.

Доказательство. Для $n = 2^e - 1$ можно построить совершенный код Хэмминга V с расстоянием $d = 3$. Рассмотрим матриц H_A, строки которой – векторы из $A \setminus y_0$. Пусть $f(u) = uH_A$ – преобразование, порожденное матрицей H_A и $f(V)$ образ кода Хэмминга при этом преобразовании.

По лемме 4 образ $f(V)$ – это совершенный код в метрике МЛМ с расстоянием 3, а в силу леммы 3 код $f(V)$ исправляет ошибки канала A.

Так как мощности кодов $f(V)$ и V совпадают, а также $A^1 = n+1$, то имеем:

$$|f(V)| = \frac{2^n}{A^1} = \frac{2^n}{n+1}.$$

Последнее означает, что $f(V)$ совершенный код, исправляющий ошибки аддитивного канала A.

Следствие. Если $n = 23$ и $A \setminus y_0$ – базис пространства B^n, то существует совершенный код, исправляющий ошибки аддитивного канала $A^3(00\ldots0)$.

В доказательстве этого следствия используется факт существования совершенного кода Голея [6] с радиусом три в метрике Хэмминга.

Примеры.

10) Рассмотрим канал $A = \{(00\ldots0),(10\ldots0),(11\ldots0),\ldots,(11\ldots1)\}$, который уже неоднократно был использован ранее в виде иллюстрированных примеров. Физически канал A означает, что «ошибки» вида $0 \to 1$, $1 \to 0$ происходят либо

в 1-ом символе кодового вектора $(x_1 x_2 \dots x_n)$, либо в 1-ом и 2-ом одновременно и т.д. Ясно, что A базис пространства B^n и можно использовать все уже полученные результаты.

Для того, чтобы построить совершенный код, исправляющий ошибки аддитивного канала A, нужно взять код Хэмминга и его образ при преобразовании $f(u) = uH_A$.

В частности для $n = 3$ соответствующий код (см. пример 8) выглядит так

$$u = (000), \quad v = (101).$$

«Окрестность» вектора u – это множество

$$A^1(u) = \{(000)(100)(110)(111)\}.$$

«Окрестность» вектора v – это множество

$$A(u) = \{(101),(001),(011),(010)\}.$$

Так как $A^1(u) \cap A^1(v) = \varnothing$, то код $V = \{u,v\}$ исправляет ошибки аддитивного канала A.

§3. Декодирование группового кода

Пусть для исправления ошибок аддитивного канала $A = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ используется групповой код V с проверочной матрицей $H(V)$. Условие того, что код V исправляет ошибки A состоит в следующем:

Лемма 6. Групповой код V с проверочной матрицей $H(V)$ исправляет ошибки аддитивного канала A если и только если выполняется условие

$$y_i H(V)^T \neq y_j H(V)^T, \tag{8}$$

где $A = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$.

Условие (8) означает:

а) сумма любых векторов из A, не является кодовым вектором;

б) синдромы разных ошибок разные.

Рассмотрим переходы от пары (A,V) к паре $(f(A), f(V))$. Образ $f(V)$ группого кода A с проверочной матрицей $H(V)$, при преобразовании $f(x) = xH_A$, является групповым кодом с проверочной матрицей $H(f(V))$, т.е. для соответствующих проверяющих матриц справедливо соотношение:

$$H\big(f(V)\big)^T = H_A^{-1} H(V)^T.$$

Отсюда следует:

Лемма 7. Синдром любого вектора $x \in V$ совпадает с синдромом вектора $f(x) \in f(V)$.

В частности для предыдущего примера $(n = 3)$

$$H\left(f(V)\right)^T = \begin{Vmatrix} 100 \\ 110 \\ 011 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 01 \\ 10 \\ 11 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 01 \\ 11 \\ 01 \end{Vmatrix}.$$

Для $n = 7$ имеем $$H\left(f(V)\right)^T = \begin{Vmatrix} 1000000 \\ 11000000 \\ 0110000 \\ 0011000 \\ 0001100 \\ 0000110 \\ 0000011 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 001 \\ 011 \\ 001 \\ 111 \\ 001 \\ 011 \\ 001 \end{Vmatrix}.$$

Используя предыдущие две леммы, опишем алгоритм группового кода V, с проверочной матрицей $H(V)$, исправляющего ошибки канала $A = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, где $A \setminus y_0$ является базисом B^n.

1. По принятому вектору y вычислим синдром $yH_A^{-1}H(V)^T$.

2. Находим число k, представление которого в виде двоичного вектора совпадает с синдромом $yH_A^{-1}H(V)^T$.

3. $y \oplus e_k H_A$ является переданным вектором из V, где $e_k = \left(0^{k-1}10^{n-k}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деза М.Е.* Проблемы передачи информации. М., 1965, т. 1. 3, 29–39.

2. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л.* Об аддитивном канале связи, Доклады АН Армении, 2004, том 104, 1. С. 23–27.

3. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* Совершенные коды в аддитивных каналах. Доклады РАН, 2006, т. 411, 3. С. 306–309.

4. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.Г.* О совершенных кодах в аддитивном канале. «Проблемы передачи информации», т. 44, вып. 4, 2008. С. 12–19.

5. *Леонтьев В.К., Мовсисян Г.Л., Маргарян Ж.* Коды в аддитивных каналах. Доклады АН Армении, т. 110, 4, 2010.

6. *Мак-Вильяме Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А.* Теории кодов, исправляющих ошибки. М.: «Связь», 1979.

ERROR CORRECTION IN AN ADDITIVE CHANNEL

V.K. Leont'ev, G.L. Movsissyan, Zh.G. Margaryan

A new MLM distance has been defined for additive channels with the set of errors $A \subseteq B^n$ in B^n. The above-mentioned distance is the generalization of Hamming's distance. We have adduced necessary and sufficient conditions when the $V \subseteq B^n$ code corrects the A errors in an additive channel. Classes of perfect codes have been built which are the analogues of Golay's and Hamming's perfect codes. A decoding algorithm has been discribed for group codes.

ՍԽԱԼՆԵՐԻ ՈՒՂՂՈՒՄԸ ԱԴԴԻՏԻՎ ԿԱՊՈՒՂՂՈՒՄ

Վ.Կ. Լեոնտև, Գ.Լ. Մովսիսյան, Ժ.Գ. Մարգարյան

Սխալների $A \subseteq B^n$ բազմությունով ադդիտիվ կապուղղիների համար B^n-ում սահմանված է նոր ՄԼՄ հեռավորություն, որը Հեմմինգի հեռավորության ընդհանրացումն է: Բերված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, երբ $V \subseteq B^n$ կոդը ուղղում է A սխալները ադդիտիվ կապուղղում: Կառուցված են կատարյալ կոդերի դասեր, A սխալներով ադդիտիվ կապուղղիների համար, որոնք Հեմմինգի և Գոլեյաի կատարյալ կոդերի նմանատիպն են: Նկարագրված է ապակոդավորման ալգորիթմ խմբային կոդերի համար:

УДК 517.956.226

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Л. Тепоян, Есмаил Юсефи Есмаил

Ереванский Государственный Университет tepoyan@yahoo.com
Азад университет Карраджа, Иран u3phi@kiau.ac.ir

В работе рассматривается смешанная задача для уравнения

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f \quad (1)$$

где $t \in [0,b], \alpha \ge 0,\ f \in L_2((0,b),H)$, а линейный оператор A действует в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H и обладает полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в H. Рассматривается вопрос существования и единственности обобщенного решения смешаной задачи для уравнения (1), а также дается описание спектра для соответствующего оператора.

Ключевые слова: Смешанная задача, весовые пространства Соболева, дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах, спектр линейного оператора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается смешанная задача для вырождающегося дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f\ , \tag{1}$$

где $0 \le \alpha \le 4$, $t \in [0,b]$, $f \in L_2((0,b),H)$, а оператор A обладает полной системой $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций $A\varphi_k = a_k\varphi_k$, $k \in N$, образующих базис Рисса в H, т.е., для любого $x \in H$ имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\varphi_k$ и существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$, так что выполняется неравенство $c_1\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \le \|x\|^2 \le$ $\le c_2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$. Сперва мы приводим определения и некоторые свойства весовых пространств Соболева W_α^2, $W_\alpha^2(0)$, $W_\alpha^2(b)$ и $\dot{W}_\alpha^2$, а также определение обобщенного решения смешанной задачи для одномерного уравнения (1), т.е. когда оператор $Au = au,\ \ a \in C$ (см. [8], [10]). Затем дается описание спектра $\sigma(L)$ для оператора L.

Наш подход основан на исследовании одномерного уравнения. Отметим, что этот метод для вырождающихся уравнений второго и четвертого порядка был применен в работах [3] и [8]. Затем, используя общий метод А. А. Дезина, осуществляется переход к операторному случаю и доказывается существование и единственность обобщенного решения уравнения (1) при некотором условии на оператор A. Заметим, что оператор $A: H \to H$, вообще говоря, неограничен.

2.ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

2.1. Пространства W_α^2, $W_\alpha^2(0)$, $W_\alpha^2(b)$, $\dot{W}_\alpha^2$. Пусть $\alpha \ge 0$ и $t \in [0,b]$. Обозначим через W_α^2 множество функций $u(t)$, которые имеют обобщенные производные второго порядка и полунорма $\|u\|_1 = \int_0^b t^\alpha \left|u''(t)\right|^2 dt$ конечна. Сперва заметим, что для функций $u \in W_\alpha^2$ при любых $t_0 \in (0,b]$ существуют конечные значения $u(t_0)$ и $u'(t_0)$ (см. [2], [5]). Доказательство следующих двух утверждений можно найти в [8] и [10].

Утверждение 1. *Для элементов* $u \in W_\alpha^2$ *вблизи к* $t = 0$ *имеют место следующие оценки*

$$| u(t) |^2 \le c_1 + c_2 t^{3-\alpha} \| u \|_1^2,\ \ \alpha \ne 1,\ \ \alpha \ne 3, \tag{2}$$

$$| u'(t) |^2 \le c_1 + c_2 t^{3-\alpha} \| u \|_1^2,\ \ \alpha \ne 1, \tag{3}$$

При $\alpha = 3$ *в неравенстве (2)* $t^{3-\alpha}$ *заменяется на* $\left|\ln t\right|$, а при $\alpha = 1$ $t^{3-\alpha}$ на $t^2\left|\ln t\right|$ в (2) и $t^{1-\alpha}$ на $\left|\ln t\right|$ в (3).

Из Утверждения 1 следует, что для $0 \le \alpha < 1$ («слабое вырождение») значения $u(0)$ и $u'(0)$ конечны, для $1 \le \alpha < 3$ конечно только $u(0)$, а при $\alpha \ge 3$ $u(0)$ и $u'(0)$ могут обращаться в бесконечность. С использованием неравенств (2) и Харди (см. [5]) доказывается, что при $0 \le \alpha \le 4$ имеет место вложение

$$W_\alpha^2 \subset L_2(0,b). \tag{4}$$

Теперь мы можем определить следующую норму в W_α^2

$$\|u\|^2_{W^2_\alpha} = \int_0^b (t^\alpha |u''(t)|^2 + |u(t)|^2) dt . \qquad (5)$$

Тогда пространство W^2_α будет гильбертовым со скалярным произведением $(u,v)_\alpha = (t^\alpha u'', v'') + (u,v)$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(0,b)$.

Очевидно, что при $0 \le \alpha \le 4$ имеет место следующее неравенство

$$\|u\|_{L_2(0,b)} \le c\|u\|_{W^2_\alpha} . \qquad (6)$$

Утверждение 2. При $0 \le \alpha < 4$ вложение (4) компактно.

Заметим, что вложение (4) при $\alpha > 4$ нарушается. Действительно, функция $u(t) = t^{-1/2}$ принадлежит к W^2_α для $\alpha > 4$, однако $u \notin L_2(0,b)$. Поэтому, желая оставаться в рамках $L_2(0,b)$, в последующем будем предполагать, что $0 \le \alpha \le 4$.

Отметим также, что при $\alpha = 4$ непрерывное вложение (4) некомпактно (см. [9]-[11]).

Обозначим через $W^2_\alpha(0)$ подмножество W^2_α, для которых $u(0) = u'(0) = = 0$, если они существуют. Заметим, что при $3 \le \alpha \le 4$ мы имеем $W^2_\alpha(0) = W^2_\alpha$. В качестве нормы в пространстве $W^2_\alpha(0)$ мы берем норму (5). Обозначим через $W^2_\alpha(b)$ подмножество W^2_α, для которых $u(b) = u'(b) = 0$. В качестве эквивалентной к (5) норме мы используем для пространства $W^2_\alpha(b)$ норму

$$\|u\|^2_{W^2_\alpha(b)} = \int_0^b t^\alpha |u''(t)|^2 dt .$$

Обозначим через $\dot{W}^2_\alpha$ подмножество $W^2_\alpha(b)$, для которых $u(0) = u'(0) = = 0$, если они существуют. При $3 \le \alpha \le 4$ имеем $\dot{W}^2_\alpha = W^2_\alpha(b)$. Отметим, что пространства $\dot{W}^2_\alpha$, $W^2_\alpha(b)$, $W^2_\alpha(0)$ и W^2_α при $0 \le \alpha < 4$ компактно вложены в $L_2(0,b)$ (см. Утверждение 2).

2.2. Одномерное уравнение. Теперь определим обобщенное решение одномерного уравнения

$$(t^\alpha u'')'' + au = f, \ a = const, \ 0 \le \alpha \le 4, \ f \in L_2(0,b) \qquad (7)$$

в пространствах $W^2_\alpha(0)$ и $W^2_\alpha(b)$.

Определение 1. *Функция* $u \in W_\alpha^2(0)$ ($u \in W_\alpha^2(b)$) *называется обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (7), если для любой* $v \in W_\alpha^2(0)$ ($v \in W_\alpha^2(b)$) *имеет место равенство*

$$(t^\alpha u'', v'') + a(u,v) = (f,v). \tag{8}$$

Заметим, что если обобщенное решение уравнения (7) $u \in W_\alpha^2(0)$ ($u \in W_\alpha^2(b)$) является классическим, тогда мы получаем следующие условия (см. [7])

$$u''(b) = u'''(b) = 0. \quad \left((t^\alpha u''(t))\Big|_{t=0} = (t^\alpha u''(t))'\Big|_{t=0} = 0 \right)$$

В самом деле, интегрируя равенство (8) по частям получаем, что для любого $v \in W_\alpha^2(0)$ ($v \in W_\alpha^2(b)$) справедливо равенство

$$((t^\alpha u'')'', v) + a(u,v) + [t^\alpha u''(t)\bar{v}'(t) - (t^\alpha u''(t))'\bar{v}(t)]\Big|_{t=0}^{t=b} = (f,v),$$

откуда получаем граничные условия в силу произвольности значений $v(b), v'(b)$ ($v(0), v'(0)$) для функций $v \in W_\alpha^2(0)$ ($v \in W_\alpha^2(b)$). Отметим также, что мы имеем также граничные условия, которые следуют из принадлежности $u \in W_\alpha^2(0)$ ($u \in W_\alpha^2(b)$). Например, при $\alpha = 0$ мы получаем следующие условия

$$u(0) = u'(0) = u''(b) = u'''(b) = 0, \; (u''(0) = u'''(0) = u(b) = u'(b) = 0)$$

т.е. на одном конце отрезка $[0,b]$ ставятся условия Дирихле, а на другом конце – условия Неймана, другими словами ставятся «смешанные условия».

Рассмотрим частный случай уравнения (7), когда $a = 1$ в пространстве $W_\alpha^2(0)$

$$Bu \equiv (t^\alpha u'')'' + u = f, \quad f \in L_2(0,b). \tag{9}$$

Доказывается, что обобщенное решение смешанной задачи для уравнения (9) существует и является единственным для любого $f \in L_2(0,b)$. Определяется соответствующий оператор $B: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ и доказывается, что оператор B является положительным и самосопряженным оператором, причем обратный оператор $B^{-1}: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ при $0 \le \alpha \le 4$ ограничен, а при $0 \le \alpha < 4$ компактен (см. [11]). Отсюда следует, что при $0 \le \alpha < 4$ спектр оператора B дискретный, а при $\alpha = 4$ недискретный (см. [6]). Теперь заметим, что мы можем переписать уравнение (7) в виде $Bu = (1-a)u + f$, т.е. число $1-a$ можно рассматривать как спектральный параметр.

Теперь рассмотрим уравнение (7) при $\alpha = 0$ в пространстве $u \in W_\alpha^2(b)$

$$Su \equiv (t^{\alpha} u'')'' = f, \quad f \in L_2(0,b). \qquad (10)$$

Как и выше, доказывается существование и единственность обобщенного решения для уравнения (10) в пространстве $W_{\alpha}^{2}(b)$, положительность и самосопряженность оператора S, непрерывность обратного оператора S^{-1} при $0 \le \alpha \le 4$ и компактость S^{-1} при $0 \le \alpha < 4$ (см. [10]). Из этого следует, что при $0 \le \alpha < 4$ спектр оператора S дискретный, а при $\alpha = 4$ - недискретный (см. [6]). Более точно, имеет место

Утверждение 3. Спектр оператора S при $\alpha = 4$ чисто непрерывный и совпадает с лучом $\sigma(S) = \sigma_c(S) = \left[\frac{9}{16}, +\infty\right)$.

Действительно, как мы уже отметили при $\alpha = 4$ имеем $\dot{W}_{\alpha}^{2} = W_{\alpha}^{2}(b)$. Тогда Определение 1 фактически совпадает с определением обобщенного решения задачи Дирихле и нам остается воспользоваться результатом работы [9].

Заметим, что мы можем переписать уравнение (1) в виде $Su = -au + f$, т.е. мы можем рассматривать число $-a$ как спектральный параметр.

3. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь перейдем к изучению операторного уравнения (1). При постановке задачи в пункте 1 мы отметили, что оператор A обладает полной системой $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций $A\varphi_k = a_k \varphi_k$, $k \in N$, образующих базис Рисса в H. Опишем специальный класс таких операторов, а именно $\prod$-операторы (см. [4]). Пусть V_x является n-мерным кубом в R^n с ребром 2π. Обозначим через P^{∞} линейное многообразие бесконечно дифференцируемых, периодических по всем переменным $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{V}_x$ комплексных функций с периодом 2π. Полиному $A(s), s \in Z^n$ с постоянными комплексными коэффициентами $A(s) = \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha} s^{\alpha}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n$, $s^{\alpha} = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \cdots s_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD_x)$ таким образом, что $A(-iD_x) e^{is \cdot x} = A(s) e^{is \cdot x}, s \cdot x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_n x_n$. Определим оператор $A: L_2(V_x) \to L_2(V_x)$ как замыкание дифференциальной операции $A(-iD_x)$ первоначально заданной на P^{∞}. Ясно, что система собственных функций $e^{is \cdot x}$, $s \in Z^n$ образует ортогональный базис в $L_2(V_x)$, соответствующий набору собственных чисел $A(S) = \{A(s), s \in Z^n\}$. Имеет место следующее важное

Утверждение 4. (см. [4]) Спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с замыканием $\overline{A(S)}$ на C множества $A(S)$, образующего точечный спектр $\sigma_p(A)$ оператора A. При этом непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ совпадает с разностью $\overline{A(S)} \setminus A(S)$.

Поскольку система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций оператора A является базисом Рисса, то мы можем записать $u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$, $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$. Тогда операторное уравнение (1) расщепляется на бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_k u_k \equiv (t^{\alpha} u_k'')'' + a_k u_k = f_k,\ k \in N. \tag{11}$$

Из того, что $f \in L_2((0,b),H)$ следует $f_k \in L_2(0,b),\ k \in N$. Таким образом, мы получаем уравнение (7), для которого вопрос существования и единственности обобщенного решения мы полностью выяснили в пункте 2.2.

Определение 2. Функция $u \in L_2((0,b),H)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если в представлении $u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$ функции $u_k(t) \in W_{\alpha}^2(0),\ k \in N$ ($u_k(t) \in W_{\alpha}^2(b),\ k \in N$) являются обобщенными решениями смешанной задачи для уравнений (11) (см. Определение 1).

Для перехода к операторному случаю будем использовать следующее

Утверждение 5. (см. [4]) Операторное уравнение (1) однозначно разрешимо при любых $f \in L_2((0,b),H)$ тогда и только тогда, когда уравнения (11) однозначно разрешимы при любых $f_k \in L_2(0,b),\ k \in N$ и равномерно по $k \in N$ выполняются неравенства

$$\|u_k\|_{L_2(0,b)} \le c\|f_k\|_{L_2(0,b)}. \tag{12}$$

Предположим, что выполняются следующие условия

$$\rho(1-a_k,\sigma(B)) > \varepsilon,\ k \in N, \tag{13}$$

$$\rho(-a_k,\sigma(S)) > \varepsilon,\ k \in N, \tag{14}$$

где $\varepsilon > 0$, а ρ - расстояние в комплексной плоскости.

Теорема 1. При выполнении условия (13) ((14)) обобщенное решение операторного уравнения существует и единственно при любых $f \in L_2((0,b),H)$.

Для доказательства сперва заметим, что при выполнении условий (12) ((13)) уравнения (11) однозначно разрешимы и выполняются неравенства (12). Теперь остается только использовать Утверждение 5.

Когда оператор A является самосопряженным, мы можем дать следующее описание спектра замыкания оператора $L: L_2((0,b),H) \to L_2((0,b),H)$

Теорема 2. Спектр замыкания $\sigma(\bar{L})$ оператора L совпадает с замыканием прямой суммы $\sigma(B)$ и $\sigma(A-I_H)$ ($\sigma(S)$ и $\sigma(A)$), т.е.

$$\sigma(\bar{L}) = \overline{\sigma(B)+\sigma(A-I_H)} \equiv \overline{\{\lambda_1+\lambda_2-1 : \lambda_1 \in \sigma(B), \lambda_2 \in \sigma(A)\}},$$

$$(\sigma(\bar{L}) = \overline{\sigma(S)+\sigma(A)}).$$

Доказательство следует из представления оператора L в виде

$$L = B \otimes I_H + I_{L_2(0,b)} \otimes (A - I_H) \ (L = S \otimes I_H + I_{L_2(0,b)} \otimes A),$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение операторов (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, Наукова Думка, 1965.
2. *Burenkov V.I.* Sobolev Spaces on Domains, Teubner, 1999.
3. *Дезин А.А.* Вырождающиеся операторные уравнения, Математический сборник, т. 115(157), N3(7), 1982. С. 323–336.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
5. *Кудрявцев Л.Д.* Об эквивалентных нормах в весовых пространствах, Труды МИАН СССР, т. 170, 1984, р. 161–190.
6. *Михлин С.Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения, вестник ЛГУ, 1954, вып.3, N8. С. 19–48.
7. *Showalter R.E.* Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 01, 1994.
8. *Тепоян Л.* Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка, Дифференциальные уравнения, 1987, т. 23, N8. С. 1366–1376.
9. *Тепоян Л.* О спектре одного вырождающегося оператора, Известия НАН Армении, математика, т. 38, N5, 2003. С. 53–57.
10. *Tepoyan L.* The mixed problem for a degenerate operator equation, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 12, 2008, p. 15–29.
11. *Esmail Yousefi.* A mixed problem for the fourth order degenerate ordinary differential equation, Proceedings of the YSU, physical and mathematical sciences, 2010, N2, p. 16–19.

MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS OF FOURTH ORDER

L. Tepoyan, Esmaeil Yousefi

In the paper we consider the following equation

$$Lu \equiv (t^{\alpha} u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

where $t \in [0,b], \alpha \geq 0,\ f \in L_2((0,b),H)$. We investigate the uniqueness and existence of the generalized solution of the mixed problem for the equation (1), as well as describe the spectrum of the corresponding operator.

ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐ ՉՈՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Լ. Տեփոյան, Էսմայիլ Յուսեֆի

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը

$$Lu \equiv (t^{\alpha} u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

որտեղ $t \in [0,b], \alpha \geq 0,\ f \in L_2((0,b),H)$ ։ Հետազոտվում է (1) հավասարման համար խառը խնդրի ընդհանրացված լուծման գոյության և միակության հարցը, ինչպես նաև տրվում է համապատասխան օպերատորի սպեկտրի նկարագիրը։

УДК 517.956.226

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Калванд Дарюш

Азад университет Карраджа, Иран u3phi@kiau.ac.ir

В работе рассматривается задача Неймана для уравнения

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f, \quad (1)$$

где $t \in [0,b]$, $\alpha \geq 0$, $f \in L_2((0,b),H)$, а линейный оператор A действует в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H и обладает полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в H. Рассматривается вопрос существования и единственности обобщенного решения задачи Неймана для уравнения (1), а также дается описание спектра для соответствующего оператора.

Ключевые слова: Задача Неймана, весовые пространства Соболева, дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах, спектр линейного оператора

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматривается задача Неймана для вырождающегося дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

где $0 \leq \alpha \leq 4$, $t \in [0,b]$, $f \in L_2((0,b),H)$, а оператор A обладает полной системой $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций $A\varphi_k = a_k\varphi_k$, $k \in N$, образующих базис Рисса в H. Сперва определяется весовое пространство Соболева W_{α}^{2} и приводятся некоторые свойства этого пространства. Далее определяется обобщенное решение задачи Неймана для одномерного уравнения (1) и формулируется теорема о ее существовании и единственности. Приводится также описание области определения одномерного оператора L (см. [9], [10]). Затем осуществляется переход к операторному случаю (см. [4]) и доказывается существование и единственность обобщенного решения для операторного уравнения (1), а также дается описание спектра $\sigma(L)$ для оператора.

Отметим, что этот метод для задачи Дирихле для вырождающихся уравнений второго и четвертого порядка был применен в работах [3] и [8]. Заметим, что оператор $A: H \to H$, вообще говоря, неограничен.

2. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

2.1. Пространство W_α^2. Пусть $\alpha \geq 0$ и $t \in [0,b]$. Обозначим через W_α^2 множество функций $u(t)$, которые имеют обобщенные производные второго порядка и полунорма

$$\|u\|_1 = \int_0^b t^\alpha \left|u''(t)\right|^2 dt$$

конечна. Заметим, что для функций $u \in W_\alpha^2$ при любых $t_0 \in (0,b]$ существуют конечные значения $u(t_0)$ и $u'(t_0)$ (см. [2], [5]). Доказательство следующих двух утверждений можно найти в [9] и [10].

Утверждение 1. *Для элементов $u \in W_\alpha^2$ вблизи к $t = 0$ имеют место следующие оценки*

$$|u(t)|^2 \leq c_1 + c_2 t^{3-\alpha} \|u\|_1^2, \ \alpha \neq 1, \ \alpha \neq 3, \tag{2}$$

$$|u'(t)|^2 \leq c_1 + c_2 t^{3-\alpha} \|u\|_1^2, \ \alpha \neq 1, \tag{3}$$

При $\alpha = 3$ в неравенстве (2) $t^{3-\alpha}$ заменяется на $\left|\ln t\right|$, а при $\alpha = 1$ $t^{3-\alpha}$ на $t^2 \left|\ln t\right|$ в (2) и $t^{1-\alpha}$ на $\left|\ln t\right|$ в (3).

Из Утверждения 1 следует, что для $0 \leq \alpha < 1$ («слабое вырождение») значения $u(0)$ и $u'(0)$ конечны, для $1 \leq \alpha < 3$ конечно только $u(0)$, а при $\alpha \geq 3$ $u(0)$ и $u'(0)$ могут обращаться в бесконечность. С использованием неравенств (2) и Харди (см. [5]) доказывается, что при $0 \leq \alpha \leq 4$ имеет место вложение

$$W_\alpha^2 \subset L_2(0,b). \tag{4}$$

Теперь мы можем определить следующую норму в W_α^2

$$\|u\|_{W_\alpha^2}^2 = \int_0^b (t^\alpha \left|u''(t)\right|^2 + \left|u(t)\right|^2) dt. \tag{5}$$

Очевидно, что при $0 \leq \alpha \leq 4$ имеет место следующее неравенство

$$\|u\|_{L_2(0,b)} \leq c\|u\|_{W_\alpha^2}. \tag{6}$$

Утверждение 2. При $0 \leq \alpha < 4$ вложение (4) компактно.

Заметим, что вложение (4) при $\alpha > 4$ нарушается, а при $\alpha = 4$ непрерывное вложение (4) некомпактно (см. [9], [10]). Поэтому, желая оставаться в рамках $L_2(0,b)$, в последующем будем предполагать, что $0 \leq \alpha \leq 4$.

2.2. Одномерное уравнение. Теперь рассмотрим одномерный случай операторного уравнения (1), т.е. когда оператор $Au = au$, $a \in C$, $a = const$

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + au = f, \; a = const, \; 0 \le \alpha \le 4, \; f \in L_2(0,b). \tag{7}$$

Определение 1. Функция $u \in W_{\alpha}^{2}$ называется обобщенным решением задачи Дирихле уравнения (7), если для любой $v \in W_{\alpha}^{2}$ имеет место равенство

$$(t^{\alpha}u'', v'') + a(u,v) = (f,v). \tag{8}$$

Заметим, что если обобщенное решение $u \in W_{\alpha}^{2}$ уравнения (7) является классическим, тогда мы получаем следующие условия (см. [7])

$$u''(b) = u'''(b) = 0, \quad (t^{\alpha}u''(t))\Big|_{t=0} = (t^{\alpha}u''(t))'\Big|_{t=0} = 0.$$

В самом деле, интегрируя равенство (8) по частям получаем, что для любого $v \in W_{\alpha}^{2}$ справедливо равенство

$$((t^{\alpha}u'')'', v) + a(u,v) + [t^{\alpha}u''(t)\overline{v}'(t) - (t^{\alpha}u''(t))'\overline{v}(t)]\Big|_{t=0}^{t=b} = (f,v),$$

откуда получаем указанные граничные условия в силу произвольности значений $v(0)$, $v'(0)$, $v(b)$, $v'(b)$ для функций $v \in W_{\alpha}^{2}$. При $\alpha = 0$ мы получаем обычные условия Неймана

$$u''(0) = u'''(0) = u''(b) = u'''(b) = 0.$$

Теперь рассмотрим частный случай уравнения (7), когда $a = 1$

$$Bu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + u = f, \quad f \in L_2(0,b). \tag{9}$$

Доказывается (см. [10]), что обобщенное решение задачи Неймана для уравнения (9) существует и единственно для любого $f \in L_2(0,b)$. Определяется соответствующий оператор $B: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ и доказывается, что оператор B является положительным и самосопряженным оператором, причем обратный оператор $B^{-1}: L_2(0,b) \to L_2(0,b)$ при $0 \le \alpha \le 4$ ограничен, а при $0 \le \alpha < 4$ компактен. Отсюда следует, что при $0 \le \alpha < 4$ спектр оператора B дискретный, а при $\alpha = 4$ недискретный (см. [6]). Теперь заметим, что мы можем переписать уравнение (7) в виде $Bu = (1-a)u + f$, т.е. число $1-a$ можно рассматривать как спектральный параметр для оператора B.

Утверждение 3 (см. [9]). Область определения оператора L (и тем самым оператора B, поскольку $D(L) = D(B)$) состоит из функций u(t), для которых значение $u(0)$ конечно при $0 \le \alpha < \frac{7}{2}$, а $u'(0)$ конечно при $0 \le \alpha < 2$. Значения $u(0)$ и $u'(0)$ не могут быть заданы произвольно и определяются правой частью уравнения (7).

3. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь перейдем к изучению операторного уравнения

$$Lu \equiv (t^{\alpha}u'')'' + Au = f,\ \ t \in (0,b),\ \ \alpha \geq 0,\ \ f \in L_2((0,b),H). \qquad (1)$$

Мы предполагали, что оператор A обладает полной системой $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций $A\varphi_k = a_k\varphi_k$, $k \in N$, образующих базис Рисса в H, т.е. для любого $x \in H$ имеет место представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\varphi_k$ и $c_1\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \leq \|x\|^2 \leq$ $\leq c_2\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$, где $c_1, c_2 > 0$.

Опишем специальный, довольно широкий класс таких операторов, а именно $\prod$-операторы (см. [4]). Пусть V_x является n-мерным кубом в R^n с ребром 2π. Обозначим через P^{∞} линейное многообразие бесконечно дифференцируемых, периодических по всем переменным $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{V}_x$ комплексных функций с периодом 2π. Полиному $A(s), s \in Z^n$ с постоянными комплексными коэффициентами

$$A(s) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}s^{\alpha},\ \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n,\ \ s^{\alpha} = s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}\cdots s_n^{\alpha_n},\ \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD_x)$ таким образом, что $A(-iD_x)e^{is\cdot x} = A(s)e^{is\cdot x}, s\cdot x = s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$. Определим оператор $A: L_2(V_x) \to L_2(V_x)$ как замыкание дифференциальной операции $A(-iD_x)$ первоначально заданной на P^{∞}. Ясно, что система собственных функций $e^{is\cdot x}$, $s \in Z^n$ образует ортогональный базис в $L_2(V_x)$, соответствующий набору собственных чисел $A(S) = \{A(s), s \in Z^n\}$. Имеет место следующее важное

Утверждение 4 (см. [4]). Спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с $\overline{A(S)}$ замыканием на C множества $A(S)$, образующего точечный спектр $\sigma_p(A)$ оператора A. При этом непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ совпадает с разностью $\overline{A(S)} \setminus A(S)$.

Поскольку система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций оператора A является базисом Рисса, то мы можем записать $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$, $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$. Тогда операторное уравнение (1) расщепляется на бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_ku_k \equiv (t^{\alpha}u_k'')'' + a_ku_k = f_k,\ \ k \in N. \qquad (10)$$

Из того, что $f \in L_2((0,b),H)$ следует $f_k \in L_2(0,b), k \in N$. Таким образом, мы получаем уравнение (7), для которого вопрос существования и единственности обобщенного решения мы полностью выяснили в пункте 2.2.

Определение 2. Функция $u \in L_2((0,b),H)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если в представлении $u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$ функции $u_k(t)\in W_\alpha^2$, $k \in N$ являются обобщенными решениями задачи Неймана для уравнений (10) (см. Определение 1).

Фактически мы определили оператор L как замыкание в $L_2((0,b),H)$ дифференциальной операции $L(D)$, первоначально заданной на всевозможных конечных линейных комбинациях функций $u_k(t)\varphi_k$, $k \in N$, где $u_k \in D(L_k)$.

Для перехода к операторному случаю очень полезно следующее

Утверждение 5. Операторное уравнение (1) однозначно разрешимо при любых $f \in L_2((0,b),H)$ тогда и только тогда, когда уравнения (10) однозначно разрешимы при любых $f_k \in L_2(0,b)$, $k \in N$ и равномерно по $k \in N$ выполняются неравенства

$$\left\|u_k\right\|_{L_2(0,b)} \le c\left\| f_k\right\|_{L_2(0,b)}. \qquad (11)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть операторное уравнение (1) однозначно разрешимо. Если для какого-то $k \in N$ нарушается однозначная разрешимость уравнения (10) и $u_k(t)\in W_\alpha^2(0,b)$ является нетривиальным решением однородного уравнения, то тогда функция $u_k(t)\varphi_k$ будет нетривиальным решением однородного уравнения (1). Если же уравнения (10) для всех $k \in N$ однозначно разрешимы при любых правых частях, но нарушается (11), то будет существовать последовательность $f_{k_m} \in L_2(0,b)$, $m \in N$, такая что

$$\left\|u_{k_m}\right\|_{L_2(0,b)} \ge m\left\| f_{k_m}\right\|_{L_2(0,b)}, m \in N. \qquad (12)$$

Следовательно, обратный оператор L^{-1} существует, задан на плотном множестве (на конечных линейных комбинациях функций $f_k(t)\varphi_k$, $f_k \in L_2(0,b)$), но является неограниченным оператором (достаточно рассмотреть правые части $f_{k_m}(t)\varphi_{k_m}$, $f_{k_m} \in L_2(0,b)$ и учитывать неравенства (12)). Поскольку оператор L^{-1} замкнут, то $D(L^{-1})$ не может совпадать со всем пространством $L_2((0,b),H)$.

Достаточность. Пусть уравнения (10) однозначно разрешимы при любых $f_k \in L_2(0,b)$, $k \in N$ и равномерно по $k \in N$ выполняются неравенства (11). Тогда функция $u(t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$, где функции $u_k(t)$, $k \in N$ являются решениями уравнений (10), будет решением операторного уравнения (1). В самом деле, поскольку система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом Рисса мы можем записать

$$\left\|u\right\|^2_{L_2((0,b),H)} = \int_0^b \left\|u(t)\right\|_H^2 dt \le c_2\int_0^b \sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k(t)\right|^2 dt \le c_2 c\sum_{k=1}^{\infty}\left\| f_k\right\|^2_{L_2(0,b)} \le c_3\left\| f\right\|^2_{L_2((0,b),H)},$$

где $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k$, т.е. $\|u\|_{L_2((0,b),H)} \le c_4 \| f \|_{L_2((0,b),H)} = c_4 \|Lu\|_{L_2((0,b),H)}$ и, следовательно, оператор L^{-1} определен на всем пространстве $D(L^{-1}) = L_2((0,b),H)$ и ограничен.

Доказательство закончено.

Отметим, что оператор $L^{-1}: L_2((0,b),H) \to L_2((0,b),H)$ при $0 \le \alpha < 4$ будет компактным только в том случае, когда пространство H будет конечномерным.

Предположим, что выполняются следующие условия

$$\rho(1-a_k, \sigma(B)) > \varepsilon,\ k \in N, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$, а ρ - расстояние в комплексной плоскости.

Теорема 1. При выполнении условия (13) обобщенное решение операторного уравнения (1) существует и единственно при любых $f \in L_2((0,b),H)$.

Для доказательства сперва заметим, что при выполнении условий (13) уравнения (10) однозначно разрешимы и выполняются неравенства (11). Теперь остается только использовать Утверждение 5.

Пример 1. Пусть $V_x \equiv [0,2\pi]^3 \subset R^3$, а оператор A является замыканием в пространстве $L_2(V_x)$ дифференциальной операции

$$A(-iD) \equiv -iD_1 - i\beta D_2 + D_3 - i\gamma D_3^2,\ D_l \equiv \frac{\partial}{\partial x_l},\ k = 1,2,3,$$

первоначально заданная на гладких функциях при условиях периодичности по всем x_k с периодом 2π, а α и β –иррациональные числа. Тогда точечный спектр оператора $A: L_2(V_x) \to L_2(V_x)$ будет состоять из точек комплексной плоскости C, имеющих координаты

$$A(k) = k_1 + \beta k_2 + i(k_3 + \gamma k_2^2),\ k = (k_1, k_2, k_3) \in Z^3.$$

Множество значений полинома $A(k), k \in Z^3$ плотно на комплексной плоскости. Это следует из равномерной распределенности в единичном квадрате дробных долей пары $(\beta k_2, \gamma k_2^2), k_2 \in Z$ (см. [4]). Отсюда следует, что спектр оператора A (замыкание множества $A(k), k \in Z^3$) совпадает со всей комплексной плоскостью. Ясно, что для этого оператора не выполняется условие (13) для любого. Теперь заметим, что спектр оператора L совпадает со всей комплексной плоскостью в силу указанной плотности спектра оператора A в C.

Когда оператор A является самосопряженным, мы можем утверждать, что оператор $L: L_2((0,b),H) \to L_2((0,b),H)$ является существенно самосопряженным и дать описание спектра его замыкания

Теорема 2. Спектр замыкания $\sigma(\bar{L})$ оператора L совпадает с замыканием прямой суммы $\sigma(B)$ и $\sigma(A - I_H)$, т.е.

$$\sigma(\bar{L}) = \overline{\sigma(B) + \sigma(A - I_H)} \equiv \overline{\{\lambda_1 + \lambda_2 - 1 : \lambda_1 \in \sigma(B), \lambda_2 \in \sigma(A)\}}\,.$$

Доказательство следует из представления оператора L в виде

$$L = B \otimes I_H + I_{L_2(0,b)} \otimes (A - I_H)\,,$$

где $\otimes$ означает тензорное произведение операторов (см. [1]).

В заключение автор выражает искренную благодарность своему научному руководителю Л. Тепояну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, Наукова Думка, 1965.
2. *Burenkov V.I.* Sobolev Spaces on Domains, Teubner, 1999.
3. *Дезин А.А.* Вырождающиеся операторные уравнения, Математический сборник, т. 115(157), N3(7), 1982. С. 323–336.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач, Москва, Наука, 1980.
5. *Кудрявцев Л.Д.* Об эквивалентных нормах в весовых пространствах, Труды МИАН СССР, т. 170, 1984, p. 161–190.
6. *Михлин С.Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестник ЛГУ, 1954, вып. 3, N8. С. 19–48.
7. *Showalter R.E.* Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Electronic Journal of Differential Equations, Monograph 01, 1994.
8. *Тепоян Л.* Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка, Дифференциальные уравнения, 1987, т. 23, N8. С. 1366–1376.
9. *Tepoyan L.* The Neumann problem for a degenerate differential-operator equation, Bulletin of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), vol. 14, 2010, p. 1–9.
10. *Tepoyan L., Daryoush Kalvand.* Neumann problem for fourth order degenerate ordinary differential equation, Proceedings of the YSU, physical and mathematical sciences, 2010, N1, p. 22–26.

NEUMANN PROBLEM FOR DEGENERATE DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS OF FOURTH ORDER

Kalvand Daryoush

In the paper we consider the following equation

$$Lu \equiv (t^{\alpha} u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

where $t \in [0,b]$, $\alpha \geq 0$, $f \in L_2((0,b),H)$, A is a linear operator in the separable Hilbert space H and has a complete system of the eigenvectors, which form a Riesz basis in H. We investigate the uniqueness and existence of the generalized solution of the Neumann problem for the equation (1), as well as describe the spectrum of the corresponding operator.

ՆԵՅՄԱՆԻ ԽՆԴԻՐԸ ՉՈՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Քալվանդ Դարյուշ

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը

$$Lu \equiv (t^{\alpha} u'')'' + Au = f, \tag{1}$$

որտեղ $t \in [0,b], \alpha \geq 0$, $f \in L_2((0,b),H)$, իսկ A-ն գծային օպերատոր է, որը գործում է H սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ և ունի սեփական ֆունկցիաների լրիվ համակարգ, որը հանդիսանում է Րիսի բազիս H -ում: Հետազոտվում է (1) հավասարման համար Նեյմանի խնդրի ընդհանրացված լուծման գոյության և միակության հարցը, ինչպես նաև տրվում է համապատասխան օպերատորի սպեկտրի նկարագիրը:

УДК 517. 9

ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г.Г. Тоноян

Российско-Армянский (Славянский) университет

Изучается поведение на бесконечности двумерного многочлена с вещественными постоянными коэффициентами следующего вида:

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi),$$

где $P_i - \mu$ -однородный многочлен порядка $m_i = m_i(\mu)$ $(i = 0,1,2)$, $m_0 > m_1 > m_2 \geq 0$. Получены необходимые и достаточные условия, при которых $|P(\xi)| \to \infty$ при $\|\xi, \mu\| \to \infty$.

§1 Введение. Вспомогательные предложения

Многие свойства дифференциального уравнения $P(D)u = 0$ в частных производных определяются поведением на бесконечности характеристического многочлена (символа) $P(\xi)$, соответствующего этому уравнению.

В работе [1] Л. Хёрмандером введено понятие гипоэллиптичности дифференциального оператора: именно, оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) гипоэллиптичен, если для любого $\alpha \in N_0^n$ и $\alpha \neq 0$ имеем $\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|} \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Алгебраические условия гипоэллиптичности Л. Хёрмандера иногда трудно поддаются проверке. Поэтому возникает необходимость нахождения легко проверяемых алгебраических условий гипоэллиптичности дифференциальных операторов.

В работе [2] В.П. Михайловым введен класс многочленов, через которые оцениваются все мономы, входящие в них. Это класс полных невырождающихся многочленов, по своему характеру «близких» к эллиптическим многочленам и являющихся гипоэллиптическими при естественных ограничениях на их характеристический многогранник (многогранник Ньютона). Одним из этих ограничений является P - регулярность (невырожденность) всех главных граней характеристического многогранника многочлена P.

В работе [3] Л.Р. Волевичем и С.Г. Гиндикиным получены условия, при которых через данный многочлен оцениваются входящие в него все мономы и, тем самым, получены достаточные условия гипоэллиптичности. В работе [4] теми же авторами в терминах устойчивости многочленов показана гипоэллиптичность введенных В.П. Михайловым многочленов.

В работе [5] С. М. Никольским доказано существование обобщенного решения первой краевой задачи для общего класса регулярных операторов, содержащих гипоэллиптические операторы.

Б. Пини в [6] найдены условия гипоэллиптичности дифференциального оператора с μ-однородной главной частью при наличии P- нерегулярной главной грани.

В перечисленных работах были рассмотрены операторы достаточно близкие к эллиптическим, или гипоэллиптичность одного оператора сводилась к гипоэллиптичности другого.

Пусть R^2 – двумерное вещественное эвклидово пространство точек (векторов) $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $R^2{}_0=\{\xi;\xi\in R^2,\xi_1\cdot\xi_2\neq 0\}$, $R^2{}_+=\{\xi;\xi\in R^2,\xi_i\geq 0,i=1,2\}$, N – множество натуральных чисел, $N_0=N\cup\{0\}$ и $N_0^2=N_0\times N_0$. Для $\xi\in R^2$, $\alpha\in N_0^2$, $\mu\in R_+^2\cap R^2{}_0$ и $t>0$ обозначим

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\ t^\mu=\left(t^{\mu_1},t^{\mu_2}\right),\ \|\xi,\mu\|=\sqrt{|\xi_1|^{\frac{2}{\mu_1}}+|\xi_2|^{\frac{2}{\mu_2}}},$$

$$(\alpha,\mu)=\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2.$$

Пусть $P(\xi)=P(\xi_1,\xi_2)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ многочлен двух переменных с вещественными постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P)=\{\alpha;\alpha\in N_0^2,\gamma_\alpha\neq 0\}$.

Определение 1. Многочлен R называется $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in R_+^2\cap R^2{}_0$ однородным, если существует число $m=m(\mu)\geq 0$ такое, что при всех $t>0$ и $\xi\in R^2$ $R\left(t^{\mu_1}\xi_1,t^{\mu_2}\xi_2\right)=t^m R(\xi)$.

Число $m=m(\mu)$ называется μ-порядком μ-однородного многочлена R.

В случае $\mu_1=\mu_2=1$ многочлен R называется однородным порядка m.

Очевидно, что μ - однородные многочлены порядка m представляются в виде

$$R(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(\alpha,\mu)=m}\gamma_\alpha\xi^\alpha.$$

Для любого числа $a>0$ μ - однородный многочлен R порядка m является также $a\cdot\mu$ -однородным порядка am. Легко убедиться в том, что если R – μ-однородный многочлен, то μ является вектором с рациональными компонентами. Следовательно, можно считать, что $\mu=\left(\mu_1,\mu_2\right)=\left(1,k/n\right)$, где $k,n\in N$, k – нечетное число и k/n – несократимая дробь.

Для μ-однородного многочлена R обозначим

$$\sum(R)=\left\{\eta;\eta\in R^2;\left\|\eta,\mu\right\|=1,\ R(\eta)=0\right\}.$$

Определение 2. μ-кратностью корня $\eta\in\Sigma(R)$ μ - однородного многочлена R называется число $\Delta(\eta,R)=\Delta(\eta,R,\mu)$, для которого $D^{\alpha}R(\eta)=0$ при всех $\alpha\in N_0^2$ таких, что $(\alpha,\mu)<\Delta(\eta,R)$ и существует $\beta\in N_0^2$ такое, что $(\beta,\mu)=\Delta(\eta,R)$ и $D^{\beta}R(\eta)\neq 0$.

При $\eta\notin\Sigma(R)$ положим $\Delta(\eta,R)=0$.

В работе [8] доказана следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть $n=2$, $R(\xi)-\mu$-однородный многочлен с вещественными коэффициентами порядка m. Тогда при $\xi\neq 0$ многочлен $R(\xi)$ представляется в виде $R(\xi)=\left[q_1(\xi)\right]^{k_1}\cdots\left[q_r(\xi)\right]^{k_r}\cdot p_0(\xi)$, где а) $p_0(\xi), q_i(\xi), (i=1,\cdots,r)$ – вещественно-аналитические функции переменных $\left(\xi_1,\xi_2\right)\in R_0^2$, б) $k_i\ (i=1,\cdots,r)$ – натуральные числа, в) если $q_i(\xi)=0$ в некоторой точке $\eta\in R_0^2$, то $q_j(\eta)\neq 0$ при $j\neq i$ и $grad q_i(\eta)\neq 0\ (i=1,\cdots,r)$.

Замечание. Если $\mu_1=\mu_2=1$, то $q_i(\xi)\ (i=1,\cdots,r)$ и $p_0(\xi)$ являются многочленами.

Пусть $R_m-\mu$-однородный многочлен порядка m и $\eta\in\sum\left(R_m\right)$. Тогда в силу леммы 1.1 многочлен R_m можно представить в виде:

$R_m(\xi)=\xi_1^{\ell}Q_0(\xi)$ при $\eta=(0,1)$, где $\ell\equiv\Delta(\eta,R_m)\in N$, Q_0 – μ-однородный многочлен порядка $m-\ell$ и $Q_0(0,1)\neq 0$;

$R_m(\xi)=\xi_2^{\ell}Q_1(\xi)$ при $\eta=(1,0)$, где Q_1 – μ-однородный многочлен порядка $m-\ell\mu_2$ и $Q_1(1,0)\neq 0$;

$R_m(\xi)=\left(\eta_2^{1/\mu_2}\xi_1-\eta_1\xi_2^{1/\mu_2}\right)^{\ell}Q_2(\xi)$ при $\eta_1\cdot\eta_2\neq 0$, где Q_2 – аналитическая функция и $Q_2(\eta)\neq 0$.

В работе [9] Г.Г. Казаряном и В.Н. Маргаряном получены необходимые и достаточные условия, при которых двумерный многочлен вида $P(\xi)=\sum_{j=0}^{n}P_j(\xi)$, где P_j $(j=0,1,...,n)$ однородные многочлены, стремится к бесконечности при стремлении его аргументов к бесконечности.

Пусть двумерный многочлен представлен в виде суммы 11 однородных подмногочленов

$$P(\xi)=\xi_1^{12}-2\xi_1^{10}\xi_2+3\xi_1^8\xi_2^2-4\xi_1^6\xi_2^3+3\xi_1^4\xi_2^4-2\xi_1^2\xi_2^5+$$
$$+\left(\xi_1^6+\xi_2^6\right)-\xi_1^4\xi_2+\left(\xi_1^2\xi_2^2+\xi_1^4\right)-\xi_2^3+\xi_2^2.$$

Очевидно, что этот многочлен можно представить в виде суммы трех μ - однородных подмногочленов:

$$P(\xi)=\left(\xi_1^2-\xi_2\right)^2\left(\xi_1^4+\xi_2^2\right)^2+\left(\xi_1^2-\xi_2\right)\left(\xi_1^4+\xi_2^2\right)+\left(\xi_1^4+\xi_2^2\right),\ \text{где}\ \mu=(1,2).$$

Наша цель – исследовать поведение на бесконечности многочленов двух переменных с μ-однородными подмногочленами, при этом мы ограничимся трехслойным случаем. В общем случае возникают только технические трудности.

Рассмотрим многочлен двух переменных с вещественными постоянными коэффициентами вида:

$$P(\xi)=P(\xi_1,\xi_2)=P_0(\xi)+P_1(\xi)+P_2(\xi), \tag{1.1}$$

где $P_i-\mu$-однородный многочлен порядка $m_i=m_i(\mu)$ $(i=0,1,2)$, $m_0>m_1>m_2\ge 0$.

Для многочленов с вещественными коэффициентами $|P(\xi)|\to\infty$ при $\|\xi,\mu\|\to\infty$ равносильно утверждению, что либо $P(\xi)\to+\infty$, либо $P(\xi)\to-\infty$ для всех последовательностей $\{\xi\}$ таких, что $\|\xi,\mu\|\to\infty$. Обозначим через $I_2(\mu)$ множество многочленов вида (1.1) таких, что $P(\xi)\to+\infty$ при $\|\xi,\mu\|\to\infty$. Найдём критерий для $P\in I_2(\mu)$.

Для многочлена P вида (1.1) обозначим

$$\sum\left(P_j\right)=\left\{\eta\in R^2,\|\eta,\mu\|=1,P_j(\eta)=0\right\},$$

$j=0,1,2$, $\ell_j(\eta)-\mu$-кратность корня $\eta\in\sum\left(P_j\right)$ и положим $\Sigma^0=\Sigma\left(P_0\right)\cap\Sigma\left(P_1\right)$.

Если $P_2(\eta)=0$ для некоторого $\eta\in\Sigma^0$ или $\Sigma^0\ne\varnothing$ и $m_2=0$, то есть $P_2(\xi)=const$, то, очевидно, что $P\notin I_2(\mu)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $m_2>0$ и $P_2(\eta)\ne 0$ для всех $\eta\in\Sigma^0$.

Пусть для точки $\eta\in\Sigma^0$ $\delta_{0,1}(\eta)=\dfrac{m_0-m_1}{\ell_0(\eta)-\ell_1(\eta)}$, $\delta_{1,2}(\eta)=\dfrac{m_1-m_2}{\ell_1(\eta)-\ell_2(\eta)}=$ $=\dfrac{m_1-m_2}{\ell_1(\eta)}$.

Обозначим $\Sigma_0=\Sigma\left(P_0\right)\setminus\Sigma\left(P_1\right)$ и разобьем множество Σ^0 на следующие подмножества:

$$\Sigma_1=\left\{\eta\in\Sigma^0,\ \ell_0(\eta)\le\ell_1(\eta)\right\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{ \eta \in \Sigma^0,\ \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta), \delta_{0,1}(\eta) > \delta_{1,2}(\eta) \right\},$$

$$\Sigma_3 = \left\{ \eta \in \Sigma^0,\ \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta), \delta_{0,1}(\eta) < \delta_{1,2}(\eta) \right\},$$

$$\Sigma_4 = \left\{ \eta \in \Sigma^0,\ \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta), \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta) \right\}.$$

Тогда $\Sigma(P_0) = \Sigma_0 \cup \Sigma^0 = \bigcup_{j=0}^{4} \Sigma_j$.

В работе [7] для многочленов вида (1.1), где P_i $(i = 0,1,2)$ однородные многочлены, в терминах нулей и их кратностей подмногочленов P_i $(i = 0,1,2)$ найден критерий для того, чтобы $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$.

Для случая $\Sigma_4 = \varnothing$ в работе [10] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $\Sigma_4 = \varnothing$. Тогда каждое из следующих условий необходимо и их одновременное выполнение достаточно, чтобы $P \in I_2(\mu)$:

1) $P_0(\xi) \ge 0$ для всех $\xi \in R^2$,

2) $P_1(\eta) > 0$ для всех $\eta \in \Sigma_0$,

3) $P_2(\eta) > 0$ для всех $\eta \in \Sigma^0$,

4) пусть $\eta \in \Sigma_3$ и μ-однородный многочлен P_1 представлен в виде

$$P_1(\xi) = \left(\eta_2^{1/\mu_2} \xi_1 - \eta_1 \xi_2^{1/\mu_2} \right)^{\ell_1} \cdot r_1(\xi),$$

(см. лемму 1.1), где $r_1(\xi)$ – вещественно - аналитическая функция переменных $(\xi_1, \xi_2) \in R_0^2$ и $r_1(\eta) \ne 0$. Тогда l_1 – четное число и $r_1(\eta) > 0$.

Настоящая работа посвящена изучению поведения на бесконечности многочлена вида (1.1) в случае $\Sigma_4 \ne \varnothing$.

Докажем следующие вспомогательные предложения.

Предложение 1.1. Пусть $\mu \in R_+^2 \cap R^2{}_0$, $\eta \in R^2$ $(\eta_2 \ne 0)$ некоторая точка, $\varepsilon > 0$ и $A(\eta, \mu, \varepsilon) = \left\{ \xi; \xi \in R^2,\ \left\| \left(\xi / \|\xi, \mu\|^{\mu} - \eta \right), \mu \right\| < \varepsilon \right\}$. Тогда $\xi_2 / \eta_2 > 0$ для любого $\varepsilon \in \left(0, |\eta_2|^{1/\mu_2} \right)$ и при всех $\xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть, наоборот, для некоторого $\varepsilon_0 \in \left(0, |\eta_2|^{1/\mu_2} \right)$ существует точка $\xi^0 \in A(\eta, \mu, \varepsilon_0)$ такая, что $\xi_2^0 / \eta_2 \le 0$. Тогда

$$\varepsilon_0 > \left\| \left(\xi^0 / \|\xi^0, \mu\|^{\mu} - \eta \right), \mu \right\| \ge \left| \xi_2^0 / \|\xi^0, \mu\|^{\mu_2} - \eta_2 \right|^{1/\mu_2} =$$

$$= |\eta_2|^{1/\mu_2} \cdot \left| \left(\xi_2^0 / \eta_2 \right) / \|\xi^0, \mu\|^{\mu_2} - 1 \right|^{1/\mu_2} \ge |\eta_2|^{1/\mu_2}.$$

Полученное противоречие доказывает предложение.

Предложение 1.1 доказано.

Предложение 1.2. Пусть $\mu \in R_+^2 \cap R^2{}_0$, $\eta \in R^2$ ($\eta_2 \neq 0$) некоторая точка, $\varepsilon > 0$ и множество $A(\eta, \mu, \varepsilon)$ определяется как в предложении 1.1. Тогда для любого $\varepsilon \in \left(0, |\eta_2|^{1/\mu_2}\right)$

$$C_1\left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \le \|\xi, \mu\| \le C_2\left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \quad \forall \xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon), \tag{1.2}$$

где $C_1 = 1/\left(1 + \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|\right)^{1/\mu_2} > 0$ и $C_2 = 1/\left(1 - \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|\right)^{1/\mu_2} > 0$.

Доказательство. Так как для любого $\varepsilon > 0$ $\left|\xi_2/\|\xi, \mu\|^{\mu_2} - \eta_2\right|^{1/\mu_2} \le$ $\le \left\|\left(\xi/\|\xi, \mu\|^{\mu} - \eta\right), \mu\right\| < \varepsilon$ при всех $\xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon)$, то $\left|\xi_2/\|\xi, \mu\|^{\mu_2} - \eta_2\right| < \varepsilon^{\mu_2}$.

Тогда $\left|\left(\xi_2/\eta_2\right)/\|\xi, \mu\|^{\mu_2} - 1\right| < \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|$, то есть $1 - \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2| < \left(\xi_2/\eta_2\right)/\|\xi, \mu\|^{\mu_2} <$ $< 1 + \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|$.

Отсюда при $\varepsilon \in \left(0; |\eta_2|^{1/\mu_2}\right)$ ($\xi_2/\eta_2 > 0$, см. предложение 1.1) непосредственно получаем

$$C_1\left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \equiv \left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|\right)^{1/\mu_2}} < \|\xi, \mu\| < \left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \frac{1}{\left(1 - \varepsilon^{\mu_2}/|\eta_2|\right)^{1/\mu_2}} \equiv$$
$$\equiv C_2\left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} \quad \forall \xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon).$$

Предложение 1.2 доказано.

Пусть $\varepsilon \in \left(0; |\eta_2|^{1/\mu_2}\right)$, $\eta_2 \neq 0$ и $\xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon)$. Представим точку ξ в следующем виде $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \left(t\eta_1, t^{\mu_2}\eta_2\right) + \left(\xi_1 - t\eta_1, 0\right)$, где $t \equiv \left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} > 0$ (см.предложение 1.1).

Предложение 1.3. Пусть $\mu \in R_+^2 \cap R^2{}_0$, $\eta \in R^2$ ($\eta_2 \neq 0$) некоторая точка и множество $A(\eta, \mu, \varepsilon)$ определяется как в предложении 1.1. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{\xi_1 - t\eta_1}{t}\right| < C\varepsilon^p, \ \forall \xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon), \tag{1.3}$$

где $p = \min(1, \mu_2)$, $t = t(\xi) \equiv \left(\xi_2/\eta_2\right)^{1/\mu_2} > 0$.

Доказательство. Ради определенности рассмотрим случай $\eta_1 > 0$ (случай $\eta_1 \le 0$ рассматривается аналогичным образом). Пусть $\varepsilon_0 = \min\left\{\eta_1, |\eta_2|^{1/\mu_2}\right\}$ и

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Так как при $\xi \in A(\eta, \mu, \varepsilon)$ $\left|\xi_1 / \|\xi, \mu\| - \eta_1\right| \le \left\|\left(\xi / \|\xi, \mu\|^{\mu} - \eta\right), \mu\right\| < \varepsilon$, то $\|\xi, \mu\|(\eta_1 - \varepsilon) < \xi_1 < \|\xi, \mu\|(\eta_1 + \varepsilon)$. Отсюда в силу нашего предположения ($\eta_1 > 0$) и оценки (1.2) имеем

$$C_1 t(\eta_1 - \varepsilon) < \xi_1 < C_2 t(\eta_1 + \varepsilon).$$

Так как $t > 0$ и $|\eta_1| < 1$, то

$$(C_1 - 1)\eta_1 - C_1\varepsilon < \xi_1 / t - \eta_1 < (C_2 - 1)\eta_1 + C_2\varepsilon < C_2 - 1 + C_2\varepsilon . \tag{1.4}$$

Заметим, что $C_1 \ge 1 - \varepsilon^{\mu_2} / \mu_2 |\eta_2|$, $C_2 \le \left[1 - \varepsilon^{\mu_2} / \mu_2 |\eta_2|\right]^{-1}$, следовательно,

$$C_1 - 1 \ge -\varepsilon^{\mu_2} / \mu_2 |\eta_2|$$

и $C_2 - 1 \le \left[1 - \varepsilon^{\mu_2} / \mu_2 |\eta_2|\right]^{-1} - 1 = \varepsilon^{\mu_2} / \left(\mu_2 |\eta_2| - \varepsilon^{\mu_2}\right) < 2\varepsilon^{\mu_2} / \mu_2 |\eta_2|$ при $\varepsilon \in (0; q\varepsilon_0)$, где $q = \min\left(1, (\mu_2 / 2)^{1/\mu_2}\right)$.

Подставляя полученные оценки в (1.4), получим

$$-\frac{\varepsilon^{\mu_2}}{\mu_2 |\eta_2|}\eta_1 - C_1\varepsilon < \frac{\xi_1}{t} - \eta_1 < \frac{2\varepsilon^{\mu_2}}{\mu_2 |\eta_2|} + C_2\varepsilon .$$

Из этой оценки и определения чисел C_1, C_2 (см. предложение 1.2) непосредственно получаем оценку (1.3).

Предложение 1.3 доказано.

§2 Случай $\sum_4 \ne \varnothing$. Сведение задачи к одномерному случаю

Пусть $\eta \in \sum_4$, тогда $\delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta) \equiv \delta_0(\eta)$. Положим

$$a(\eta) = \min\left\{1, \left[\frac{\ell_1 !}{2} \cdot |P_2(\eta)| / \left|D_1^{\ell_1} P_1(\eta)\right|\right]^{1/\ell_1}\right\} \text{ и}$$

$$A(\eta) = \max\left\{1, \left[\frac{2\ell_0 !}{\ell_1 !}\left|D_1^{\ell_1} P_1(\eta)\right| / \left|D_1^{\ell_0} P_0(\eta)\right|\right]^{1/(\ell_0 - \ell_1)}\right\}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Пусть многочлен вида (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.1 при $\eta \in \sum(P_0) \setminus \sum_4$. Для того, чтобы $P \in I_2(\mu)$, необходимо и достаточно, чтобы $P(\tau^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$ на любой последовательности $\left\{\tau^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ вида

$$\tau^s = t_s^{\mu}\left(\eta + t_s^{-\delta_0(\eta)} x_s \tau\right), \tag{2.2}$$

где $t_s \to +\infty$ при $s \to \infty$, $\tau = (1,0) \in R^2$, $\eta \in \sum_4$, $a(\eta) \le |x_s| \le A(\eta)$, $s = 1,2,\ldots$.

Доказательство. Так как $P \in I_2(\mu)$ и последовательность $\{\tau^s\}_{s=1}^{\infty}$ вида (2.2) удовлетворяет условию $\|\tau^s,\mu\| \to \infty$ при $s \to \infty$, то необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть, наоборот, при условиях леммы существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$: $\|\xi^s,\mu\| \to \infty$ при $s \to \infty$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$\left|P\left(\xi^s\right)\right| \le C,\ s = 1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

Для $s \in \mathrm{N}$ обозначим $\eta^s = \xi^s / \|\xi^s,\mu\|^{\mu}$. Так как $\|\eta^s,\mu\| = 1$, $s = 1,2,\ldots$, то, не умаляя общности (за счет выбора подпоследовательности), можно считать, что η^s сходится к некоторой точке η. Докажем, что при выполнении оценки (2.3) $\eta \in \sum(P_0)$. Предположим обратное, что $P_0(\eta) \ne 0$. Тогда в силу μ - однородности, непрерывности многочлена P_0 и условия 1) теоремы 1.1 существует s_0 такое, что при всех $s \ge s_0$

$$P_0\left(\xi^s\right) = P_0\left(\eta^s \cdot \|\xi^s,\mu\|^{\mu}\right) = \|\xi^s,\mu\|^{m_0} P_0\left(\eta^s\right) \ge \frac{1}{2}\|\xi^s,\mu\|^{m_0} P_0\left(\eta\right).$$

Так как $m_0 > m_1 > m_2$, $P_0(\eta) \ne 0$ и $\|\xi^s,\mu\|^{m_0} \to \infty$ при $s \to \infty$, то

$$\left|P(\xi^s)\right| = \left|P_0(\xi^s) + P_1(\xi^s) + P_2(\xi^s)\right| \ge \left|P_0(\xi^s)\right| - \left|P_1(\xi^s)\right| - \left|P_2(\xi^s)\right| \ge$$

$$\ge \|\xi^s,\mu\|^{m_0} \cdot \left(\frac{|P_0(\eta)|}{2} + o(1)\right) \to \infty$$

при $s \to \infty$, что противоречит предположению (2.3) и доказывает, что $\eta \in \sum(P_0)$.

Пусть $\eta \in \sum^0$, тогда $P_0(\eta) = 0$, $P_1(\eta) = 0$ и в силу условия 3) теоремы 1.1 $P_2(\eta) > 0$. Так как $\|\eta,\mu\| = 1$, то ради определенности можно предполагать, что $\eta_2 \ne 0$. Представим точки ξ^s, $s = 1,2,\ldots$, в виде

$$\xi^s = \left(\xi_1^{\,s},\xi_2^{\,s}\right) = \left(t_s\eta_1, t_s^{\mu_2}\eta_2\right) + \left(\xi_1^s - t_s\eta_1, 0\right) = t_s^{\mu}\eta + \theta_s^{\mu}\tau, \tag{2.4}$$

где $\tau = (1,0) \in R^2$, $\eta = \left(\eta_1,\eta_2\right)$, $t_s = \left(\xi_2^s/\eta_2\right)^{1/\mu_2}$, $\theta_s = \xi_1^s - t_s\eta_1$.

Так как $\xi^s / \|\xi^s,\mu\|^{\mu} \to \eta$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s $\xi^s \in A(\eta,\mu,\varepsilon)$ при $\varepsilon \in \left(0,|\eta_2|^{1/\mu_2}\right)$ (см. определение $A(\eta,\mu,\varepsilon)$ в предложении 1.1). Следовательно, в силу предложения 1.1 $\xi_2^s/\eta_2 > 0$ при достаточно больших s.

Так как θ_s сохраняет знак при достаточно больших s, то, не умаляя общности, будем считать, что $\theta_s \ge 0$.

Если $\theta_s = 0$, $s \in \mathrm{N}$ для некоторой подпоследовательности $\{\eta^s\}$, то из условия $P_2(\eta) > 0$ и непрерывности многочленов имеем, что $P\left(\xi^s\right) = t_s^{m_2} P_2\left(\eta^s\right) \ge$ $\ge \frac{1}{2} P_2(\eta) t_s^{m_2} \to +\infty$ при $s \to \infty$. Это противоречит (2.3) и доказывает, что $\theta_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно видеть, что для достаточно больших s θ_s можно представить в виде $\theta_s = t_s^{1-\rho_s}$, где $\rho_s \ge 0$ (см. (1.3)). Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 1.1 (см. [10]), придем к противоречию предположения (2.3), когда $\rho_s \to \delta_0$, при этом $\delta_0 \ne \delta_0(\eta)$, $\eta \in \sum_4$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\delta_0 = \delta_0(\eta)$ для некоторой точки $\eta \in \sum_4$. В дальнейшем зафиксируем точку η и вместо $\ell_i(\eta)$ будем писать ℓ_i $(i = 0,1,2)$.

Учитывая μ-однородность многочленов $\{P_i\}$, представление (2.4) и что $\Delta(\eta, P_i) = \ell_i$ $(i = 0,1,2)$, по формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
&P(\xi^s) = P_0\left(\xi^s\right) + P_1\left(\xi^s\right) + P_2\left(\xi^s\right) = \\
&= t_s^{m_0} P_0\left(\eta_1 + \frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}, \eta_2\right) + t_s^{m_1} P_1\left(\eta_1 + \frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}, \eta_2\right) + t_s^{m_2} P_2\left(\eta_1 + \frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}, \eta_2\right) = \\
&= t_s^{m_0}\left(\frac{1}{\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0} P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}\cdot\left(\frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}\right)^{\ell_0} + \sum_{i=\ell_0+1}^{m_0}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_0(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}\right)^i\right) + \\
&+ t_s^{m_1}\left(\frac{1}{\ell_1!}\cdot\frac{\partial^{\ell_1} P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}}\cdot\left(\frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}\right)^{\ell_1} + \sum_{i=\ell_1+1}^{m_1}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_1(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}\right)^i\right) + \\
&+ t_s^{m_2}\left(P_2(\eta) + \sum_{i=1}^{m_2}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_2(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\xi_1^s - t_s\eta_1}{t_s}\right)^i\right) = \\
&= t_s^{m_0}\left(\frac{1}{\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0} P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{\ell_0} + \sum_{i=\ell_0+1}^{m_0}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_0(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^i\right) + \\
&+ t_s^{m_1}\left(\frac{1}{\ell_1!}\cdot\frac{\partial^{\ell_1} P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{\ell_1} + \sum_{i=\ell_1+1}^{m_1}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_1(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^i\right) + \\
&+ t_s^{m_2}\left(P_2(\eta) + \sum_{i=1}^{m_2}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_2(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^i\right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Обозначая $x_s = \theta_s / t_s^{1-\delta_0}$, $s = 1,2,\dots$, из (2.5) получим

$$P\left(\xi^s\right) = t_s^{m_0}\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{\ell_0}\left(\frac{1}{\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}} + \sum_{i=\ell_0+1}^{m_0}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_0(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{i-\ell_0}\right) +$$

$$+t_s^{m_1}\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{\ell_1}\left(\frac{1}{\ell_1!}\cdot\frac{\partial^{\ell_1}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}} + \sum_{i=\ell_1+1}^{m_1}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_1(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{i-\ell_1}\right) +$$

$$+t_s^{m_2}\left(P_2(\eta) + \sum_{i=1}^{m_2}\frac{1}{i!}\cdot\frac{\partial^i P_2(\eta)}{\partial\xi_1^i}\cdot\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^{i}\right) =$$

$$= t_s^{m_0-\ell_0\delta_0}x_s^{\ell_0}\left(\frac{1}{\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}} + \sum_{j=1}^{m_0-\ell_0}\frac{1}{(\ell_0+j)!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0+j}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0+j}}t_s^{-j\delta_0}x_s^j\right) +$$

$$+ + t_s^{m_1-\ell_1\delta_0}x_s^{\ell_1}\left(\frac{1}{\ell_1!}\frac{\partial^{\ell_1}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}} + \sum_{j=1}^{m_1-\ell_1}\frac{1}{(\ell_1+j)!}\frac{\partial^{\ell_1+j}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1+j}}t_s^{-j\delta_0}x_s^j\right) +$$

$$+t_s^{m_2}\left(P_2(\eta) + \sum_{i=1}^{m_2}\frac{1}{i!}\frac{\partial^i P_2(\eta)}{\partial\xi_1^i}t_s^{-i\delta_0}x_s^i\right). \tag{2.6}$$

Учитывая, что $m_0 - \ell_0\delta_0 = m_1 - \ell_1\delta_0 = m_2$ при $\eta \in \sum_4$, перегруппировав слагаемые в (2.6), получим

$$P\left(\xi^s\right) = t_s^{m_2}\left(\frac{1}{\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}x_s^{\ell_0} + \frac{1}{\ell_1!}\cdot\frac{\partial^{\ell_1}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}}x_s^{\ell_1} + P_2(\eta)\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{r}t_s^{m_2-j\delta_0}\left(\frac{1}{(\ell_0+j)!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0+j}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0+j}}x_s^{\ell_0+j} + \frac{1}{(\ell_1+j)!}\cdot\frac{\partial^{\ell_1+j}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1+j}}x_s^{\ell_1+j} + \frac{1}{j!}\cdot\frac{\partial^j P_2(\eta)}{\partial\xi_1^j}x_s^j\right), \tag{2.7}$$

где $r = \max\left\{m_0 - \ell_0, m_1 - \ell_1, m_2\right\}$, $\dfrac{\partial^{\ell_i+j}P_i(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_i+j}} = 0$ при $\ell_i + j > m_i$ $(i = 0,1,2,$ $j = 0,1,\dots,r)$.

За счет выбора подпоследовательности достаточно рассмотреть следующие возможные случаи:

1) $|x_s| > A(\eta)$, 2) $|x_s| < a(\eta)$, 3) $a(\eta) \le |x_s| \le A(\eta)$, $s = 1,2,\dots$.

Пусть, $|x_s| > A(\eta)$ при $s = 1,2,\dots$. Так как $\Delta(\eta, P_0) = \ell_0$, то $\dfrac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}} \ne 0$. Пусть $\theta_s = t_s^{1-\delta_0}x_s$ и $\ell_0 > \ell_1$ при $\eta \in \sum_4$, из (2.7) получим

$$P\left(\xi^s\right)=t_s^{m_2}x_s^{\ell_0}\left(\frac{1}{\ell_0!}\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}+\frac{1}{\ell_1!}\frac{\partial^{\ell_1}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1}}x_s^{\ell_1-\ell_0}+P_2(\eta)x_s^{-\ell_0}\right)+$$

$$+t_s^{m_2}x_s^{\ell_0}\sum_{j=1}^{r}t_s^{-j\delta_0}x_s^j\left(\frac{1}{(\ell_0+j)!}\frac{\partial^{\ell_0+j}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0+j}}+\frac{1}{(\ell_1+j)!}\frac{\partial^{\ell_1+j}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1+j}}x_s^{\ell_1-\ell_0}+\frac{1}{j!}\frac{\partial^{j}P_2(\eta)}{\partial\xi_1^{j}}x_s^{-\ell_0}\right)\geq$$

$$\geq\frac{t_s^{m_2}x_s^{\ell_0}}{2\ell_0!}\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}-$$

$$-t_s^{m_2}x_s^{\ell_0}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\theta_s}{t_s}\right)^j\left(\frac{1}{(\ell_0+j)!}\left|\frac{\partial^{\ell_0+j}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0+j}}\right|+\frac{1}{(\ell_1+j)!}\left|\frac{\partial^{\ell_1+j}P_1(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_1+j}}\right|+\frac{1}{j!}\left|\frac{\partial^{j}P_2(\eta)}{\partial\xi_1^{j}}\right|\right). \qquad (2.8)$$

Учитывая оценку (1.3), из (2.8) получим при $s\to\infty$

$$P\left(\xi^s\right)\geq t_s^{m_2}x_s^{\ell_0}\frac{1}{2\ell_0!}\cdot\frac{\partial^{\ell_0}P_0(\eta)}{\partial\xi_1^{\ell_0}}\to\infty,$$

что противоречит (2.3).

В случае 2) $|x_s|<a(\eta)$ при $s=1,2,\ldots$. Так как $\eta\in\sum_4\subset\sum^0$, то согласно условию 3) теоремы 1.1 $P_2(\eta)>0$. Тогда из (2.1) и (2.7) имеем при $s\to\infty$

$$P\left(\xi^s\right)\geq t_s^{m_2}\frac{P_2(\eta)}{2}\to+\infty,$$

что противоречит (2.3).

В случае 3) ξ^s представим в виде (см. 2.4)

$$\xi^s=\left(t_s\eta_1,t_s^{\mu_2}\eta_2\right)+\left(\xi_1^s-t_s\eta_1,0\right)=t_s^{\mu}\left(\eta_1+\frac{\xi_1^s-t_s\eta_1}{t_s},\eta_2\right)=t_s^{\mu}\left(\eta_1+\frac{\theta_s}{t_s},\eta_2\right)=$$

$$=t_s^{\mu}\left(\eta_1+t_s^{-\delta_0}x_s,\eta_2\right)=t_s^{\mu}\left(\eta+t_s^{-\delta_0}x_s\tau\right),$$

где $\tau=(1,0)\in R^2$, $\theta_s=t_s^{1-\delta_0}x_s$.

Следовательно, ξ^s последовательность вида (2.2). Тогда по условию леммы $P(\xi^s)\to+\infty$ при $s\to\infty$, что противоречит (2.3).

Лемма 2.1 доказана.

Таким образом, для изучения поведения на бесконечности многочленов вида (1.1) в случае $\sum_4\neq\varnothing$ достаточно изучить их поведение на последовательностях вида (2.2) для всех $\eta\in\sum_4$. Учитывая (2.7), задача сводится к исследованию на бесконечности многочленов вида

$$Q_j(x) = Q_j(x,\eta) =$$

$$= \left(\frac{1}{(\ell_0 + j)!} \cdot \frac{\partial^{\ell_0 + j} P_0(\eta)}{\partial \xi_1^{\ell_0 + j}} x^{\ell_0} + \frac{1}{(\ell_1 + j)!} \cdot \frac{\partial^{\ell_1 + j} P_1(\eta)}{\partial \xi_1^{\ell_1 + j}} x^{\ell_1} + \frac{1}{j!} \cdot \frac{\partial^j P_2(\eta)}{\partial \xi_1^j} \right) x^j \qquad (2.9)$$

для $j = 0,1,...,r$.

Лемма 2.2. Пусть многочлен вида (1.1) удовлетворяет условиям леммы 2.1. Если для каждой точки $\eta \in \sum_4$ существует число $C = C(\eta) > 0$ такое, что $Q_0(x,\eta) \ge C$ при $a(\eta) \le |x| \le A(\eta)$ (см. (2.1)), то $P \in I_2(\mu)$. Если $P \in I_2(\mu)$, то $Q_0(x,\eta) \ge 0$ для всех $\eta \in \sum_4$ и $x \in R^1$.

Доказательство. Пусть $\eta \in \sum_4$ и существует число $C = C(\eta) > 0$ такое, что $Q_0(x,\eta) \ge C > 0$ при $a(\eta) \le |x| \le A(\eta)$. Докажем, что $P \in I_2(\mu)$. Согласно лемме 2.1, достаточно доказать, что для каждой точки $\eta \in \sum_4$ $P(\xi^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$ на последовательностях вида (2.2). Как при доказательстве леммы 2.1, получим представление (2.7), откуда согласно (2.9) и условию $Q_0(x,\eta) \ge C > 0$, имеем

$$P(\xi^s) = t_s^{m_2} \left(Q_0(x,\eta) + \sum_{j=1}^{r} t_s^{-j\delta_0} Q_j(x,\eta) \right) \ge t_s^{m_2} \left(C + o(1) \right) \to +\infty \text{ при } s \to \infty .$$

Следовательно, $P \in I_2(\mu)$.

Пусть теперь $P \in I_2(\mu)$. Докажем, что для всех $\eta \in \sum_4$ и $x \in R^1$ $Q_0(x,\eta) \ge 0$. Предположим обратное, что существуют $\eta^0 \in \sum_4$ и $x_0 \in R^1$ такие, что $Q_0(x_0,\eta^0) < 0$. Пусть $\xi^s = s^\mu \left(\eta^0 + s^{-\delta_0(\eta^0)} x_0 \tau \right)$, $s = 1,2,\ldots$, где $\tau = (1,0) \in R^2$. Принимая во внимание (2.7) и (2.9), получим

$$P(\xi^s) = s^{m_2} Q_0(x_0,\eta^0) + o(s^{m_2}) \to -\infty \text{ при } s \to \infty ,$$

что противоречит условию $P \in I_2(\mu)$.

Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через d максимальное из чисел $j, 0 \le j \le r$, таких, что $m_2 - j\delta_0(\eta) > 0$.

Лемма 2.3. Если $P \in I_2(\mu)$ многочлен вида (1.1) и $\eta \in \sum_4$, то $Q(x,\eta) \equiv \sum_{j=0}^{d} \left| Q_j(x,\eta) \right|^2 \ne 0$ для любого $x \in R^1$.

Доказательство. Предположим обратное, что $Q(x_0,\eta) = 0$ для некоторого $x_0 \in R^1$. Тогда $Q_j(x_0,\eta) = 0$, $0 \le j \le d$. Пусть $\xi^s = s^\mu \left(\eta + s^{-\delta_0(\eta)} x_0 \tau \right)$, $s = 1,2,\ldots$, где $\tau = (1,0) \in R^2$. Учитывая представление (2.7) и (2.9), получим

$$\left|P\left(\xi^s\right)\right| \le \sum_{j=0}^{d}\left|s^{m_2 - j\delta_0(\eta)}Q_j\left(x_0,\eta\right)\right| + \sum_{j=d+1}^{r}\left|s^{m_2 - j\delta_0(\eta)}Q_j\left(x_0,\eta\right)\right| =$$

$$= \sum_{j=d+1}^{r}\left|s^{m_2 - j\delta_0(\eta)}Q_j\left(x_0,\eta\right)\right| \le C < \infty,\ s = 1,2...,$$

что противоречит условию $P \in I_2(\mu)$.

Лемма 2.3 доказана.

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда существуют $\eta^0 \in \Sigma_4$ и $|x_0| \in \left[a\left(\eta^0\right), A\left(\eta^0\right)\right]$ такие, что $Q_0\left(x_0,\eta^0\right) = 0$.

Далее, при исследовании многочленов (2.9) будем считать, что

A) $Q_0\left(x,\eta\right) \ge 0$, $Q\left(x,\eta\right) \ne 0$ для $\eta \in \Sigma_4$ и $a\left(\eta\right) \le |x| \le A\left(\eta\right)$ (см. леммы 2.2 и 2.3).

Для точки $\eta \in \Sigma_4$ обозначим $X_0\left(\eta\right) = X_0\left(\eta, Q_0\right) = = \left\{x; a\left(\eta\right) \le |x| \le A\left(\eta\right), Q_0\left(x,\eta\right) = 0\right\}$, т. е. для точки $\eta \in \Sigma_4$ $X_0\left(\eta\right)$ – это множество корней многочлена $Q_0\left(x\right) \equiv Q_0\left(x,\eta\right)$, удовлетворяющих неравенству $a\left(\eta\right) \le |x| \le A\left(\eta\right)$. Легко убедиться в том, что многочлен $Q_0\left(x\right) \ge 0$ не может иметь более двух различных вещественных корней, притом каждый корень двухкратный. Заметим, что из условия $P_2\left(\eta\right) \ne 0$ следует, что $0 \notin X_0\left(\eta\right)$.

Следовательно, далее предположим, что

B) для каждой точки $x_0 \in X_0\left(\eta\right)$ многочлен Q_0 представляется в виде

$$Q_0\left(x,\eta\right) = \left(x - x_0\right)^2 q_0\left(x,\eta\right),\ \eta \in \Sigma_4, \tag{2.10}$$

где $q_0\left(x_0\right) = q_0\left(x_0,\eta\right) > 0$.

Итак, при $\Sigma_4 \ne \varnothing$ задача сводится к исследованию многочленов $Q_j\left(x,\eta\right)$, $j = 0,1,...,r$, удовлетворяющих условиям A) и B), что в свою очередь в силу (2.7) сводится к исследованию функции

$$f_0\left(t,x\right) = f_0\left(t,x,\eta,\delta\right) = \sum_{j=0}^{r} t^{m - j\delta}Q_j\left(x\right), \tag{2.11}$$

где $\delta \equiv \delta_0\left(\eta\right) > 0$, $t \in R^1$, $a\left(\eta\right) \le |x| \le A\left(\eta\right)$, а многочлены Q_j имеют вид

$$Q_j\left(x\right) \equiv Q_j\left(x,\eta\right) = \left(a_j x^{\ell_0} + b_j x^{\ell_1} + c_j\right)x^j,\ j = 0,1,...,r, \tag{2.12}$$

где $a_0 b_0 c_0 \ne 0$ и $m - r\delta > 0$.

§3 Основной результат

Пусть $R-\mu$-однородный многочлен. Так как для многочленов R двух переменных $\sum(R)$ состоит из конечного числа изолированных точек, то существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $\eta\in\sum(R)$ $A(\eta,\mu,\varepsilon)\cap\sum(R)=\{\eta\}$.

Теорема 3.1. Пусть P многочлен вида (1.1) и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тогда $P\in I_2(\mu)$ в том и только в том случае, когда $P(\xi)\to+\infty$ при $\|\xi,\mu\|\to\infty$, $\xi\in\bigcup\limits_{\eta\in\sum(P_0)}A(\eta,\mu,\varepsilon)$.

Доказательство. Так как необходимость очевидна, то докажем достаточность. Пусть, наоборот, при условиях теоремы $P\notin I_2(\mu)$, то есть существуют последовательность $\left\{\xi^s\right\}_{s=1}^{\infty}$: $\|\xi^s,\mu\|\to\infty$ при $s\to\infty$ и постоянная $C>0$ такие, что

$$\left|P\left(\xi^s\right)\right|\le C,\ s=1,2,\dots. \tag{3.1}$$

Обозначим $\eta^s=\xi^s/\|\xi^s,\mu\|^{\mu}$, $s=1,2,\dots$. Так как $\|\eta^s,\mu\|=1$ ($s=1,2,\dots$), то $\left\{\eta^s\right\}_{s=1}^{\infty}$ ограниченная последовательность. Тогда за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $\eta^s\to\eta^0$ при $s\to\infty$. Докажем, что $\eta^0\in\sum(P_0)$. Предположим обратное, что $P_0(\eta^0)\neq0$. Тогда в силу μ - однородности, непрерывности многочлена P_0 и пункта 1) теоремы 1.1 для достаточно больших s имеем

$$\left|P_0\left(\xi^s\right)\right|=P_0\left(\xi^s\right)=P_0\left(\eta^s\cdot\|\xi^s,\mu\|^{\mu}\right)=\|\xi^s,\mu\|^{m_0}P_0\left(\eta^s\right)\ge\|\xi^s,\mu\|^{m_0}\frac{P_0\left(\eta^0\right)}{2}.$$

Так как $P_0\left(\eta^s\right)\ge0$ и $P_0(\eta^0)\neq0$, то $P_0\left(\eta^0\right)>0$. Тогда, учитывая, что $m_0>m_1>m_2$ и $\|\xi^s,\mu\|^{m_0}\to\infty$ при $s\to\infty$, получим

$$\left|P(\xi^s)\right|=\left|P_0(\xi^s)+P_1(\xi^s)+P_2(\xi^s)\right|\ge\left|P_0(\xi^s)\right|-\left|P_1(\xi^s)\right|-\left|P_2(\xi^s)\right|\ge$$
$$\ge\|\xi^s,\mu\|^{m_0}\cdot\left(\frac{\left|P_0(\eta^0)\right|}{2}+o(1)\right)\to+\infty$$

при $s\to\infty$, что противоречит (3.1) и доказывает, что $\eta^0\in\sum(P_0)$.

Так как $\eta^s\to\eta^0$ при $s\to\infty$ и $\eta^0\in\sum(P_0)$, то нетрудно видеть, что $\xi^s\in A(\eta^0,\mu,\varepsilon)$ при достаточно больших s. Следовательно, в силу условия теоремы $P(\xi^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие доказывает достаточную часть теоремы.

Теорема 3.1 доказана.

Так как исследование поведения на бесконечности многочлена P вида (1.1) в силу теоремы 3.1 сводится к исследованию таких многочленов на множествах $A(\eta,\mu,\varepsilon)$ ($\eta \in \sum(P_0)$) при достаточно малых $\varepsilon > 0$, то, для простоты записи считая, что множество $\sum(P_0)$ состоит из одной точки η, всюду далее в обозначениях опустим η. Тогда (2.11), (2.12), соответственно, примут вид

$$f_0(t,x) = f_0(t,x,\delta) = \sum_{j=0}^{r} t^{m-j\delta} Q_j(x), \tag{3.2}$$

где $\delta > 0$, $t \in R^1$, $a \le |x| \le A$, а многочлены Q_j имеют вид

$$Q_j(x) = \left(a_j x^{\ell_0} + b_j x^{\ell_1} + c_j\right) x^j, \quad j = 0,1,\dots,r, \tag{3.3}$$

где $a_0 b_0 c_0 \ne 0$ и $m - r\delta > 0$.

При этом для многочленов Q_j условия A) и B) предыдущего параграфа, соответственно, примут вид:

I) $Q_0(x) \ge 0$, $Q(x) \equiv \sum_{j=0}^{d} |Q_j(x)|^2 \ne 0$ для $a \le |x| \le A$, где

$$d = \max\{j, 0 \le j \le r; m_2 - j\delta_0 > 0\}.$$

II) для каждой точки $x_0 \in X_0 \equiv \{x; a \le |x| \le A, Q_0(x) = 0\}$ многочлен Q_0 представляется в виде

$$Q_0(x) = (x - x_0)^2 q_0(x), \tag{3.4}$$

где $q_0(x_0) > 0$.

Этот параграф посвящен исследованию поведения функций вида (3.2) при $t \to \infty$. Запись $f_0 \in I_2$ означает, что $f_0(t,x) \to +\infty$ при $t \to \infty$ и $|x| \in [a, A]$.

Так как многочлены (3.3) удовлетворяют условию I), то для $x_0 \in X_0$ существует $k \in N$, $k \le r$, такое, что $m - \delta k > 0$ и $Q_0(x_0) = Q_1(x_0) = \dots = Q_{k-1}(x_0) = 0$, $Q_k(x_0) \ne 0$. Следовательно, любой точке x_0 ставится в соответствие $k = k(x_0) = k(f_0, x_0) \in N$.

Теорема 3.2. Пусть многочлены Q_j вида (3.3) удовлетворяют условиям I), II) и $k = k(x_0)$ нечетное число для всех $x_0 \in X_0$. Тогда $f_0 \in I_2$ в том и только в том случае, когда для всех $x_0 \in X_0$:

1) $Q_k(x_0) > 0$,

2) x_0 – двухкратный корень многочленов Q_j, $j=1,...,[k/2]$, где $[k/2]$ – целая часть числа $k/2$.

Доказательство. Докажем необходимость условия 1). В силу (3.2) и определения числа k имеем $f_0(t,x_0)=\sum_{j=k}^{r} t^{m-j\delta}Q_j(x_0)=t^{m-k\delta}Q_k(x_0)(1+o(1))$ при $t\to\infty$. Так как $f_0\in I_2$, то $Q_k(x_0)>0$.

Необходимость условия 2). Пусть, наоборот, существует $0\neq x_0\in X_0$, для которого утверждение теоремы неверно. Заметим, что $x_0\neq 0$ не может быть корнем многочлена Q_j ($1\le j\le r$) более второго порядка, при этом x_0 – двухкратный корень многочлена Q_0. Поэтому в силу определения числа k существует j_0, $1\le j_0\le[k/2]$, такое, что

$$Q_j(x)=(x-x_0)^2 q_j(x),\ q_0(x_0)>0,\ q_j(x_0)\neq 0,\ j=1,...,j_0-1, \tag{3.5}$$

$$Q_{j_0}(x)=(x-x_0)q_{j_0}(x),\ q_{j_0}(x_0)\neq 0, \tag{3.6}$$

$$Q_j(x)=(x-x_0)q_j(x),\ j=j_0+1,...,k-1. \tag{3.7}$$

Пусть при $q_{j_0}(x_0)>0$ $t_s=s$, $x_s=x_0-s^{-k\delta/2}$, $s=1,2,...$, а при $q_{j_0}(x_0)<0$ $t_s=s$, $x_s=x_0+s^{-k\delta/2}$, $s=1,2,...$. Так как противоречие с условием теоремы в обоих случаях получается аналогичным образом, то рассмотрим только случай $q_{j_0}(x_0)>0$. Тогда в силу (3.2) и представлений (3.5) – (3.7) имеем

$$f_0(t_s,x_s)=\sum_{j=0}^{r} t_s^{m-j\delta}Q_j(x_s)=\sum_{j=0}^{j_0-1} s^{m-j\delta}(x_s-x_0)^2 q_j(x_s)+s^{m-j_0\delta}(x_s-x_0)q_{j_0}(x_s)+$$
$$+\sum_{j=j_0+1}^{k-1} s^{m-j\delta}(x_s-x_0)q_j(x_s)+\sum_{j=k}^{r} s^{m-j\delta}Q_j(x_s)=\sum_{j=0}^{j_0-1} s^{m-(j+k)\delta}q_j(x_s)-$$
$$-s^{m-(j_0+k/2)\delta}q_{j_0}(x_s)-\sum_{j=j_0+1}^{k-1} s^{m-(j+k/2)\delta}q_j(x_s)+\sum_{j=k}^{r} s^{m-j\delta}Q_j(x_s). \tag{3.8}$$

Очевидно, что $m-(j+k)\delta\le m-k\delta$ при $0\le j\le j_0-1$; $m-(j+k/2)\delta<$ $<m-(j_0+k/2)\delta$ при $j_0+1\le j\le k-1$ и $m-j\delta<m-k\delta$ при $k<j\le r$.

Поскольку k – нечетное число и $j_0\le[k/2]$, то $j_0<k/2$ и, следовательно,

$$m-(j_0+k/2)\delta>m-k\delta. \tag{3.9}$$

Так как $x_s\to x_0$ при $s\to\infty$, то в силу непрерывности многочленов $q_j(x_s)\to q_j(x_0)$, $j=0,1,...r$. Так как $q_j(x)$ ($j=0,...,k-1$) и $Q_j(x)$ ($j=k,...,r$)

ограничены на множестве $[-A;-a]\cup[a;A]$, то в силу (3.9) и предположения $q_{j_0}(x_0)>0$ из (3.8) получим

$$f_0(t_s,x_s)=-s^{m-(j_0+k/2)\delta}\left(q_{j_0}(x_0)+o(1)\right)\to-\infty \text{ при } s\to\infty,$$

что противоречит условию $f_0\in I_2$. Этим необходимость условия 2) доказана.

Достаточность. Предположим обратное, что при условиях 1) и 2) $f_0\notin I_2$. Тогда существуют последовательность $\{(t_s,x_s)\}_{s=1}^{\infty}$: $t_s\to\infty$ при $s\to\infty$, $a\le|x_s|\le A$, $s=1,2,\ldots$, и постоянная $C>0$ такие, что

$$\left|f_0(t_s,x_s)\right|\le C,\ s=1,2,\ldots. \tag{3.10}$$

Так как x_s ограничена, то за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $x_s\to x_0$ при $s\to\infty$. Покажем, что $x_0\in X_0$. Пусть, наоборот, $x_0\notin X_0$, то есть $Q_0(x_0)\ne0$. Так как по условию теоремы Q_0 удовлетворяет условию I), то из $Q_0(x_0)\ne0$ следует, что $Q_0(x_0)>0$. Тогда $f_0(t_s,x_s)=$ $=t_s^m\left(Q_0(x_0)+o(1)\right)\to+\infty$ при $s\to\infty$, что противоречит (3.10) и показывает, что $x_0\in X_0$.

Из определения k и условия 1) теоремы имеем, что $Q_0(x_0)=Q_1(x_0)=\ldots=$ $=Q_{k-1}(x_0)=0$ и $Q_k(x_0)>0$. Так как по условию II) многочлен Q_0 представляется в виде (3.4), то в силу условия 2) теоремы x_0 является двухкратным корнем многочленов Q_j при $j=0,1,\ldots,[k/2]$.

Обозначим $\sigma_s=(x_s-x_0)t_s^{k\delta/2}$, $s=1,2,\ldots$. Тогда

$$f_0(t_s,x_s)=\sum_{j=0}^{[k/2]}t_s^{m-j\delta}(x_s-x_0)^2q_j(x_s)+\sum_{j=[k/2]+1}^{k-1}t_s^{m-j\delta}(x_s-x_0)q_j(x_s)+\sum_{j=k}^{r}t_s^{m-j\delta}Q_j(x_s)=$$

$$=\sigma_s^2\sum_{j=0}^{[k/2]}t_s^{m-(j+k)\delta}q_j(x_s)+\sigma_s\sum_{j=[k/2]+1}^{k-1}t_s^{m-(j+k/2)\delta}q_j(x_s)+\sum_{j=k}^{r}t_s^{m-j\delta}Q_j(x_s). \tag{3.11}$$

Так как многочлены Q_j ($j=k,\ldots,r$) и q_j ($j=0,\ldots,k-1$) ограничены на множестве $[-A;-a]\cup[a;A]$, $m-j\delta<m-k\delta$ при $k<j\le r$; $m-(j+k)\delta<m-k\delta$ при $1\le j\le[k/2]$; $m-(j+k/2)\delta<m-k\delta$ при $[k/2]+1\le j\le k-1$, то для достаточно больших s из (3.11) получим

$$f_0\left(t_s,x_s\right)=\sigma_s^2 t_s^{m-k\delta} q_0\left(x_s\right)+\sigma_s^2 \sum_{j=1}^{[k/2]} t_s^{m-(j+k)\delta} q_j\left(x_s\right)+\sigma_s \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} t_s^{m-(j+k/2)\delta} q_j\left(x_s\right)+$$

$$+t_s^{m-k\delta}\left[Q_k\left(x_s\right)+o(1)\right]=t_s^{m-k\delta}\left(q_0\left(x_s\right)\sigma_s^2+Q_k\left(x_s\right)+o(1)\right). \qquad (3.12)$$

Так как по определению числа k $m-k\delta>0$ и $Q_k\left(x_0\right)>0$, $Q_k\left(x_s\right)\to Q_k\left(x_0\right)$, $q_0\left(x_s\right)\to q_0\left(x_0\right)$ при $s\to\infty$ и в силу (3.4) $q_0\left(x_0\right)>0$, то из (3.12) получим, что $f_0\left(t_s,x_s\right)\to+\infty$ при $s\to\infty$. Это противоречит (3.10) и доказывает достаточную часть теоремы.

Теорема 3.2 доказана.

Пусть для $x_0\in X_0$ $k=k\left(f_0,x_0\right)$ – четное число. Аналогичным образом, как при доказательстве необходимой части теоремы 3.2, доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть многочлены Q_j вида (3.3) удовлетворяют условиям I), II), $f_0\in I_2$, $x_0\in X_0$ и $k=k\left(x_0\right)$ – четное число. Тогда $Q_k\left(x_0\right)>0$ и x_0 – двухкратный корень многочленов Q_j, $j=1,\dots,k/2-1$.

Заметим, что $Q_k\left(x_0\right)>0$, независимо от четности k. В дальнейшем, на основании теоремы 3.2 и леммы 3.1, будем считать, что многочлены (3.3) удовлетворяют следующим условиям:

III) Для любой точки $x_0\in X_0$ $Q_k\left(x_0\right)>0$, при этом если $k=k\left(f_0,x_0\right)$ – нечетное число, то x_0 – двухкратный корень многочленов Q_j, $j=1,\dots,[k/2]$, а если k – четное, то x_0 – двухкратный корень многочленов Q_j, $j=1,\dots,k/2-1$.

При четном k и $j=0,\dots,k/2-1$ обозначим

$$Q_j(x)=\left(x-x_0\right)^2 q_j(x),\ Q_{k/2+j}(x)=\left(x-x_0\right)q_{k/2+j}(x) \text{ и} \qquad (3.13)$$

$$Q_{j,i}(x)=Q_{j,i}\left(x,x_0\right)=\left[q_j^{(i)}\left(x_0\right)x^2+q_{k/2+j}^{(i)}\left(x_0\right)x+Q_{k+j}^{(i)}\left(x_0\right)\right]\frac{x^i}{i!},\ i=0,1,\dots. \qquad (3.14)$$

Пусть число $\overline{r}$ определяется из условий $m-\left(k+\overline{r}\right)\delta>0$, $m-\left(k+\overline{r}+1\right)\delta\le 0$. Обозначим

$$Q_0^1(x)=Q_{0,0}\left(x,x_0\right)=q_0\left(x_0\right)x^2+q_{k/2}\left(x_0\right)x+Q_k\left(x_0\right) \text{ и}$$

$$Q_p^1(x)=Q_{p-\frac{k}{2}[2p/k],[2p/k]}(x)+\sum_{\ell+q=[2p/k]-1}\frac{x^q}{q}Q_{p+\frac{3k}{2}+(\ell-[2p/k]),\frac{k}{2}}(x),\ p=0,1,\dots,\overline{r}. \qquad (3.15)$$

При $x_0\in X_0$, для которого k – четное число, введем следующую функцию

$$f_1(t,x) = f_1(t,x,x_0) = \sum_{i=0}^{\bar{r}} t^{m-(k+i)\delta} Q_i^1(x). \qquad (3.16)$$

Пусть $X_1 = X_1(x_0) = \left\{ x \in R^1, Q_0^1(x) = Q_0^1(x,x_0) = 0 \right\}$. Так как множество X_0 конечно, то существует такое число $n \geq 0$, что $X_1(x_0) \subset [-n,n]$ и $Q_0^1(\pm n) \neq 0$ для всех $x_0 \in X_0$. Далее для простоты записи будем считать, что $n=1$. Под записью $f_1 \in I_2$ будем понимать $f_1(t,x,x_0) \to +\infty$ при $t \to \infty$ для всех $x_0 \in X_0$ и для всех $x \in [-1,1]$.

Аналогично лемме 2.2, для функции f_1 вида (3.16) и многочлена Q_0^1, определенного по формуле (3.15), доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2. Если $Q_0^1(x,x_0) \geq C > 0$ для всех $x \in [-1,1]$ и всех $x_0 \in X_0$, то $f_1 \in I_2$. Если $f_1 \in I_2$, то для всех $x \in R^1$ и всех $x_0 \in X_0$ $Q_0^1(x,x_0) \geq 0$.

Теорема 3.3. Пусть $x_0 \in X_0$ и многочлены Q_j ($j=0,1,...,r$) вида (3.3) удовлетворяют условиям I) – III). Тогда следующие условия равносильны:

1) $f_0 \in I_2$,

2) $f_0(t_s,x_s) = f_0\left(t_s, x_0 + t_s^{-k\delta/2}\sigma_s\right) \to +\infty$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ для всех $\sigma_s \in [-1,1]$, $s=1,2,...$, и всех $x_0 \in X_0$, для которых $k = k(f_0,x_0)$ – четное число,

3) $f_1 \in I_2$ для всех $x_0 \in X_0$, для которых $k = k(f_0,x_0)$ – четное.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2) непосредственно следует из определения $f_0 \in I_2$. Докажем 2)$\Rightarrow$1) методом от противного. Предположим, что при условии 2) теоремы $f_0 \notin I_2$, тогда существуют последовательность $\left\{(t_s,x_s)\right\}_{s=1}^{\infty}$ и постоянная $C>0$ такие, что $a \leq |x_s| \leq A$, ($s=1,2,...$), $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и имеет место (3.10). Так как x_s ограничена, то за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$. Если $Q_0(x_0) \neq 0$ или $k = k(f_0,x_0)$ – нечетные числа для всех $x_0 \in X_0$, то противоречие с (3.10) получается аналогично, как при доказательстве теоремы 3.2. Если же $k = k(f_0,x_0)$ – четное число, то из условия III), представления (3.13) и определения числа k, полагая $\sigma_s = (x_s - x_0)t_s^{k\delta/2}$, $s=1,2,...$, для достаточно больших s получим

$$f_0(t_s,x_s) = \sum_{j=0}^{k/2-1} t_s^{m-j\delta}(x_s-x_0)^2 q_j(x_s) + \sum_{j=k/2}^{k-1} t_s^{m-j\delta}(x_s-x_0) q_j(x_s) + \sum_{j=k}^{r} t_s^{m-j\delta} Q_j(x_s) =$$

$$=\sigma_s^2\sum_{j=0}^{k/2-1}t_s^{m-(j+k)\delta}q_j(x_s)+\sigma_s\sum_{j=k/2}^{k-1}t_s^{m-(j+k/2)\delta}q_j(x_s)+t_s^{m-k\delta}\left(Q_k(x_s)+o(1)\right).$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$f_0(t_s,x_s)=\sigma_s^2 t_s^{m-k\delta}q_0(x_s)+\sigma_s^2\sum_{j=1}^{k/2-1}t_s^{m-(j+k)\delta}q_j(x_s)+\sigma_s t_s^{m-k\delta}q_{k/2}(x_s)+$$

$$+\sigma_s\sum_{j=k/2+1}^{k-1}t_s^{m-(j+k/2)\delta}q_j(x_s)+t_s^{m-k\delta}\left(Q_k(x_s)+o(1)\right)=$$

$$=t_s^{m-k\delta}\left[q_0(x_s)\sigma_s^2+q_{k/2}(x_s)\sigma_s+Q_k(x_s)\right]+$$

$$+\sigma_s^2\sum_{j=1}^{k/2-1}t_s^{m-(j+k)\delta}q_j(x_s)+\sigma_s\sum_{j=k/2+1}^{k-1}t_s^{m-(j+k/2)\delta}q_j(x_s)+o\left(t_s^{m-k\delta}\right). \quad (3.17)$$

Возможны следующие случаи (за счет выбора подпоследовательности): 1) $|\sigma_s|\to\infty$ при $s\to\infty$, 2) $\sigma_s\to 0$ при $s\to\infty$, 3) $\{\sigma_s\}$ ограниченная последовательность.

Рассмотрим случай $|\sigma_s|\to\infty$ при $s\to\infty$. Так как $q_0(x_s)\to q_0(x_0)$ при $s\to\infty$, $q_0(x_0)>0$ (см. (3.4)) и $q_j(x)$ ($j=1,\dots,k-1$) ограничены на множестве $[-A;-a]\cup[a;A]$, то из (3.17) получим

$$f_0(t_s,x_s)\ge\frac{1}{2}t_s^{m-k\delta}q_0(x_0)\sigma_s^2\to+\infty \text{ при } s\to\infty,$$

что противоречит (3.10). В случае $\sigma_s\to 0$ при $s\to\infty$ противоречие с (3.10) непосредственно следует из (3.17) в силу $Q_k(x_0)>0$ (см. условие III)). В случае 3) за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $\sigma_s\to\sigma$ при $s\to\infty$. При $|\sigma|\ge 1$ придем к противоречию, так как для достаточно больших s имеем $q_0(x_s)\sigma_s^2+q_{k/2}(x_s)\sigma_s+Q_k(x_s)\ge\tilde{C}>0$. При $|\sigma|<1$ $\sigma_s\in[-1,1]$ для достаточно больших s и в силу условия 2) теоремы $f_0(t_s,x_s)\to+\infty$ при $s\to\infty$, что противоречит (3.10). Этим утверждение 2)$\Rightarrow$1) доказано.

Теперь докажем импликацию 2)$\Leftrightarrow$3). Для этого достаточно доказать более сильное утверждение, именно: для всех $t\in R^1$, $x_0\in X_0$ и $x\in[-1,1]$

$$f_0\left(t,x_0+t^{-k\delta/2}x\right)=f_1(t,x,x_0)+g(t,x,x_0), \quad (3.18)$$

где $|g(t,x,x_0)|\le C$ ($x\in[-1,1]$, $t\ge 1$) для некоторой постоянной $C>0$.

Обозначим $y=x_0+t^{-k\delta/2}x$, из (3.2) и (3.13) получим

$$f_0\left(t, x_0 + t^{-k\delta/2}x\right) = f_0\left(t, y\right) = \sum_{j=0}^{r} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right) = \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-j\delta}\left(y - x_0\right)^2 q_j\left(y\right) +$$

$$+\sum_{j=k/2}^{k-1} t^{m-j\delta}\left(y - x_0\right) q_j\left(y\right) + \sum_{j=k}^{r} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right) = x^2 \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} q_j\left(y\right) + x t^{m-k\delta} q_{k/2}\left(y\right) +$$

$$+x \sum_{j=k/2+1}^{k-1} t^{m-(j+k/2)\delta} q_j\left(y\right) + \sum_{j=k}^{r} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right).$$

Перенумеровав и перегруппировав слагаемые, получим

$$f_0\left(t, y\right) = x^2 \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} q_j\left(y\right) + x t^{m-k\delta} q_{k/2}\left(y\right) +$$

$$+x \sum_{j=1}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} q_{k/2+j}\left(y\right) + \sum_{j=k}^{r} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right) = \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta}\left(x^2 q_j\left(y\right) + x q_{k/2+j}\left(y\right)\right) +$$

$$+\sum_{j=k}^{k+k/2-1} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right) + \sum_{j=k+k/2}^{r} t^{m-j\delta} Q_j\left(y\right) = \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta}\left(x^2 q_j\left(y\right) + x q_{k/2+j}\left(y\right)\right) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} Q_{k+j}\left(y\right) + \sum_{j=0}^{r-3k/2} t^{m-(j+3k/2)\delta} Q_{j+3k/2}\left(y\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta}\left(x^2 q_j\left(y\right) + x q_{k/2+j}\left(y\right) + Q_{k+j}\left(y\right)\right) + \sum_{j=0}^{r-3k/2} t^{m-(j+3k/2)\delta} Q_{j+3k/2}\left(y\right) \equiv S_1 + S_2.$$

Обозначим $d_1 = \max\limits_{0 \le j \le k/2-1}\left\{ord q_j, ord q_{k/2+j}, ord Q_{k+j}\right\}$, при этом считаем, что $q_j^{(i)}\left(x_0\right) = 0$ при $i > ord q_j$; $q_{k/2+j}^{(i)}\left(x_0\right) = 0$ при $i > ord q_{k/2+j}$ и $Q_{k+j}^{(i)}\left(x_0\right) = 0$ при $i > ord Q_{k+j}$ $(0 \le j \le k/2 - 1)$. Применяя формулу Тейлора и используя (3.14), получим

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{i=0}^{d_1} t^{m-(j+k)\delta} t^{-ki\delta/2}\left(q_j^{(i)}\left(x_0\right)x^2 + q_{k/2+j}^{(i)}\left(x_0\right)x + Q_{k+j}^{(i)}\left(x_0\right)\right)\frac{x^i}{i!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta}\left(q_j\left(x_0\right)x^2 + q_{k/2+j}\left(x_0\right)x + Q_{k+j}\left(x_0\right)\right) +$$

$$+\sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{i=1}^{d_1} t^{m-(j+k+ik/2)\delta}\left(q_j^{(i)}\left(x_0\right)x^2 + q_{k/2+j}^{(i)}\left(x_0\right)x + Q_{k+j}^{(i)}\left(x_0\right)\right)\frac{x^i}{i!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} Q_{j,0}\left(x\right) + \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{i=1}^{d_1} t^{m-(j+k+ik/2)\delta} Q_{j,i}\left(x\right). \tag{3.19}$$

Аналогично, обозначая $d_2 = \max\limits_{3k/2 \le j \le r}\left\{ord Q_j\right\}$, $d_3 = \left[2r/k\right] - 2$ и применяя формулу Тейлора для S_2, получим

$$S_2 = \sum_{j=0}^{r-3k/2} \sum_{i=0}^{d_2} t^{m-(j+3k/2)\delta} t^{-ki\delta/2} Q^{(i)}_{j+3k/2}(x_0)\frac{x^i}{i!} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{d_3} \sum_{j=kl/2}^{k(\ell+1)/2-1} \sum_{i=0}^{d_2} t^{m-(j+3k/2+ki/2)\delta} Q^{(i)}_{j+3k/2}(x_0)\frac{x^i}{i!}.$$

Перегруппировав слагаемые удобным образом, получим

$$S_2 = \sum_{\ell=0}^{d_3} \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{i=0}^{d_2} t^{m-(j+3k/2+k(\ell+i)/2)\delta} Q^{(i)}_{j+3k/2+\ell k/2}(x_0)\frac{x^i}{i!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{p=0}^{d_2+d_3} t^{m-(j+3k/2+kp/2)\delta} \left[\sum_{\ell+i=p} Q^{(i)}_{j+3k/2+\ell k/2}(x_0)\frac{x^i}{i!} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{p=1}^{d_2+d_3+1} t^{m-(j+k+kp/2)\delta} \left[\sum_{\ell+i=p-1} Q^{(i)}_{j+3k/2+\ell k/2}(x_0)\frac{x^i}{i!} \right]. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует

$$f_0(t,y) = S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{k/2-1} t^{m-(j+k)\delta} Q_{j,0}(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k/2-1} \sum_{i=1}^{d_4} t^{m-(j+k+ik/2)\delta} \left[Q_{j,i}(x) \sum_{\ell+p=i-1} Q^{(p)}_{j+3k/2+\ell k/2}(x_0)\frac{x^p}{p!} \right], \tag{3.21}$$

где $d_4 = \max\{d_2 + d_3 + 1, d_1\}$. Пусть $p \in N$. Обозначим $j(p) = [2p/k]$.

В силу (3.14) – (3.16) из (3.21) получим

$$f_0(t,y) = \sum_{p=0}^{k/2-1} t^{m-(p+k)\delta} Q_{p,0}(x) +$$

$$+ \sum_{p=k/2}^{d_5} t^{m-(p+k)\delta} \left[Q_{p-j(p)k/2,\, j(p)}(x) + \sum_{\ell+q=j(p)-1} Q_{p+3k/2+(\ell-j(p))k/2}(x_0)\frac{x^q}{q!} \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{d_5} t^{m-(p+k)\delta} Q^1_p(x) = f_1(t,x,x_0) + \sum_{p\ge \bar r+1} t^{m-(p+k)\delta} Q^1_p(x) \equiv f_1(t,x,x_0) + g(t,x,x_0),$$

где $d_5 = (1+d_4)k/2 - 1$.

В силу определения числа $\bar r$ имеем

$$\left|g(t,x,x_0)\right| \le \sum_{p\ge \bar r+1} \left|Q^1_p(x)\right| \le C,\ x\in[-1,1],\ t \ge 1.$$

Таким образом, утверждение (3.18) доказано, и, следовательно, теорема 3.3 доказана.

Заметим, что для $x_0 \in X_0$ и четного $k = k\left(f_0, x_0\right)$ исследование функции $f_0\left(t, x\right)$ вида (3.2) «порядка» m по t сводится к исследованию функции $f_1\left(t, x, x_0\right)$ вида (3.16), которая имеет «порядок» $m - k\delta$ по t. Так как множество X_0 состоит из не более двух элементов, то каждой функции $f_0\left(t, x\right)$ соответствует не более двух функций вида (3.16). При этом функции f_0 и f_1 имеют одинаковую структуру.

Аналогично леммам 2.2, 2.3, теореме 3.2 и лемме 3.1, доказывается следующая лемма.

Лемма 3.3. Пусть $f_1 \in I_2$. Тогда

1) $Q_0^1\left(x\right) = Q_0^1\left(x, x_0\right) \geq 0$ для всех $x \in R^1$ и $x_0 \in X_0$,

2) для каждой точки $x_1 \in X_1$ существует $k_1 = k_1\left(f_1, x_1\right) \in N$, $k_1 \leq r_1$, такое, что $Q_0^1\left(x_1\right) = Q_1^1\left(x_1\right) = \ldots = Q_{k_1-1}^1\left(x_1\right) = 0$ и $Q_{k_1}^1\left(x_1\right) > 0$. При этом x_1– двухкратный корень многочленов Q_j^1 при $j = 0, \ldots, \left[k_1/2\right]$, если k_1– нечетное число, и $j = 0, \ldots, k_1/2 - 1$, если k_1– четное.

Итак, в дальнейшем будем считать, что многочлены Q_j^1 удовлетворяют следующему условию:

IV) Для каждой точки $x_1 \in X_1$ x_1– двукратный корень многочленов Q_j^1 при $j = 0, \ldots, \left[k_1/2\right]$, если k_1– нечетное число, и $j = 0, \ldots, k_1/2 - 1$, если k_1– четное, при этом $Q_{k_1}^1\left(x_1\right) > 0$.

Пусть многочлены Q_j и Q_j^1 удовлетворяют условиям I) – IV). Тогда можно доказать, что $f_1 \in I_2$, если $k_1\left(f_1, x_1\right)$ – нечетное для всех $x_1 \in X_1$ или k_1– четное, но $Q_0^1\left(x\right) \geq C > 0$ для всех $x \in R^1$. Таким образом, задача сводится к исследованию функции $f_2\left(t, x\right) = f_2\left(t, x, x_1\right)$ в случае, если k_1– четное для некоторой точки $x_1 \in X_1 \neq \varnothing$. При этом функции f_1 и f_2 имеют одинаковую структуру и $ord f_2 \leq m - \left(k + k_1\right)\delta$.

Продолжая этот процесс, на каком-то шаге s придем к случаю, когда $k_s\left(f_s, x_s\right)$ – нечетное для всех $x_s \in X_s$, или к случаю, когда все $k_s\left(f_s, x_s\right)$ – четные и $Q_0^s\left(x\right) \geq C > 0$ для всех $x \in R^1$, или к смешанному случаю, и тогда вопрос решается комбинированием аналогов теорем 3.2 и леммы 2.2, или к случаю, когда $m - \left(k + k_1 + \ldots + k_s\right)\delta \leq 0$ и тогда $P \notin I_2$.

Таким образом, получили алгоритм, с помощью которого проверяется принадлежность многочлена вида (1.1) множеству $I_2(\mu)$.

Автор выражает свою глубокую признательность доктору, профессору В. Н. Маргаряну за постановку задачи и полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: «Мир», 1986.
2. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности некоторых классов многочленов, ДАН СССР, том 164, № 3, 1965. С. 499–502.
3. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Матем. сб., том 75 (117), № 3, 1968. С. 400–416.
4. *Volevich L.R., Gindikin S.G.* The Method of Newton's polyhedron in the theory of PDE, Kluwer, 1992.
5. *Никольский С. М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, Докл. АН СССР, 146, № 4, 1962. С. 767–769.
6. *Pini B.* Osservazoni sulla hypoelliptica, Bol. Un. Mat. Ital., (3), vol. 18, pp. 420–432, 1963.
7. *Казарян Г.Г., Маргарян В.Н.* Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов, Изв. НАН Арм., Математика, 39, № 3, 2004. С. 21–38.
8. *Казарян Г.Г.* Об одном свойстве гипоэллиптических полиномов, Изв. АН Арм. ССР, серия Математика. Т. 9, № 3, 1974. С. 189–211.
9. *Gabrielyan O.R., Ghazaryan H.G., Margaryan V.N.* Reducing the comparison of polynomials of two variables to a comparison of functions of one variable, Complex Analysis, Dif. Equ. and Related Topics, Proc. of the ISAAC Conf. Yerevan, 2004. P. 52–69
10. *Тоноян Г.Г.* Поведение на бесконечности одного класса многочленов, Математика в высшей школе. Т. 5, № 2, 2009. С. 25–36.

THE BEHAVIOUR AT INFINITY OF THREE - LAYERED POLYNOMIALS OF TWO VARIABLES

G.G. Tonoyan

The paper investigates the behaviour of polynomials depending on two variables at infinity in case $\sum_4 \neq \varnothing$. Let $P(\xi)$ be the polynomial with real coefficients represented in the form $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, where P_i is the μ-homogenious polynomial of degree $m_i = m_i(\mu)$ $(i = 0,1,2)$, $m_0 > m_1 > m_2 \geq 0$. Some necessary and sufficient conditions for $|P(\xi)| \to \infty$ as $\|\xi, \mu\| \to \infty$ are obtained.

ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ԵՌԱՇԵՐՏ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՎԱՐՔՆ ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Գ.Գ. Տոնոյան

Հետազոտվում է երկու փոփոխականի իրական հաստատուն գործակիցներով բազմանդամների վարքը անվերջությունում, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը՝ $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi)$, որտեղ P_i -ն $m_i = m_i(\mu)$ $(i = 0,1,2,\ m_0 > m_1 > m_2 \geq 0\ )$ աստիճանի μ-համասեռ բազմանդամ է: Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում $|P(\xi)| \to \infty$, երբ $\|\xi, \mu\| \to \infty$:

УДК 519.1

МНОГОСЛОЙНАЯ КАНАЛЬНАЯ ТРАССИРОВКА

Э.Т. Пилипосян

Российско-Армянский (Славянский) Университет

- В работе предложены алгоритмы для решения следующих задач:
- Определение наибольшего количества цепей, трассировка которых осуществима на одном слое (сложность алгоритма $O(n\log\log n)$).
- Разбиение множества цепей на минимальное число частей, трассировка каждой из которых осуществима на одном слое (сложность алгоритма $O(n\log\log n)$).
- Определение для данного числа k, наибольшего количества цепей, трассировка которых осуществима на k-слойной плате. Дается также соответствующее распределение этих цепей по слоям (сложность алгоритма $O(k*n^2)$)

Ключевые слова: канальная трассировка, частично упорядоченное множество, возрастающая подпоследовательность, поток минимальной стоимости.

Введение

Рассматривается канал с вертикальными и горизонтальными магистралями, на верхней и нижней границах которого размещены контакты цепей, отнесенных к данному каналу. Предполагается, что все цепи содержат по два контакта, один из которых размещен на верхней, а другой – на нижней границе.

Пары контактов каждой цепи должны соединяться проводником, прокладываемым через магистрали (канальная трассировка цепи). Плата односторонняя, т.е. и горизонтальные, и вертикальные соединения проводятся на одной стороне платы (River Routing).

Многослойная (m-слойная) плата состоит из наложенных друг на друга m одинаковых плат, между которыми осуществлена полная изоляция, за исключением их границ. Контакт на границе канала одинаково относится ко всем слоям платы, и трассировку цепи можно провести на любом, но в одном для каждой цепи, слое.

Чтобы сформулировать проблему более точно, нам понадобятся следующие определения.

Каналом назовем пару векторов неотрицательных целых чисел: $T=(t_1,t_2,...,t_p)$ и $B=(b_1,b_2,...,b_p)$. Мы считаем, что эти числа являются метками контактов, которые расположены на верхней и нижней границах прямоугольной решетки pxq, при условии, что любое натуральное число, входящее в T или B, имеет, по крайней мере, еще одно вхождение в эти вектора [1], так как это показано на рис. 1.

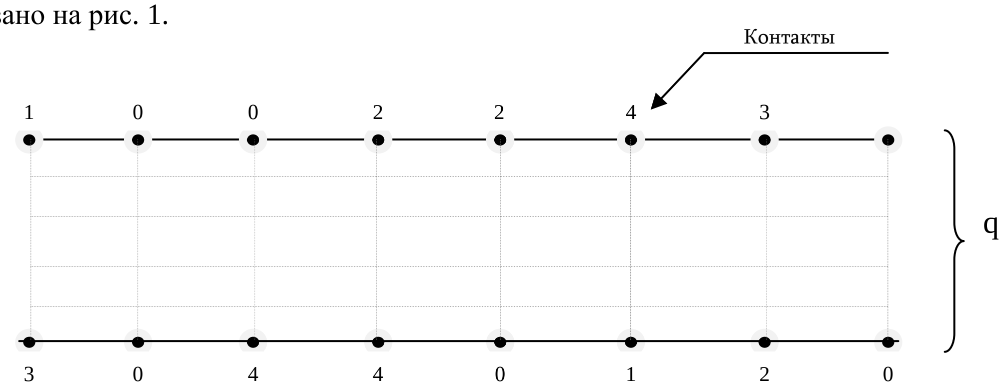

Рис. 1 Канал с контактами на границах

Контакты с одинаковыми положительными метками образуют цепи, отнесенные к данному каналу, и должны быть соединены между собой электрическим проводником. Контакты с метками 0 называются вакантными. Вакантные контакты не принадлежат ни к одной цепи, и поэтому не требуют электрического соединения. Соединение можно провести только по вертикальным и горизонтальным (между верхней и нижней границей решетки) линиям, называемые вертикальными и горизонтальными магистралями. Число горизонтальных магистралей называется шириной канала.

Проведение соединений, обеспечивающие эквипотенциальность всех контактов данной цепи, назовем трассировкой цепи. Контакты из разных цепей не должны быть эквипотенциальными, т.е. соединения, прокладываемые для разных цепей не должны пересекаться. Скажем, что проведена трассировка канала, если осуществлена трассировка всех его цепей.

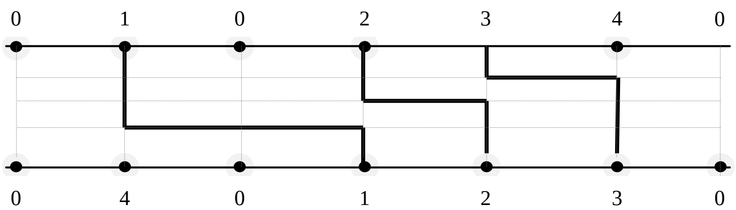

Рис. 2 Трассировка канала

Канал на рис. 2 имеет 4 цепи, его ширина равняется 3, жирными линиями показаны соединения трех цепей. Дальнейшая трассировка 4-ой цепи невозможна.

Мы рассмотрим случай, когда все цепи состоят из двух контактов, один из которых принадлежит верхней границе канала, а другой нижней (потоковая трассировка – River Routing).

Тогда вектора T и B состоят только из нулей и различных положительных чисел. Если из T и B убрать все нули, то полученные вектора T' и B' будут представлять из себя некоторые перестановки чисел 1,2,...,n, где n – количество цепей.

Перенумеруем цепи таким образом, чтобы числа в T' слева направо были расставлены по возрастанию, т.е. 1,2,…,n. Соответствующим образом изменится и B'. Ясно, что если теперь B' не представляет из себя последовательность 1,2,...,n, то трассировку всех цепей невозможно осуществить.

Если и в T, и в B ненулевые числа расположены по возрастанию, то возможность проведения трассировки всех цепей зависит от расстановки нулей в T и в B, и от ширины канала. Вопросы трассировки с данными векторами T и B в канале минимальной ширины подробно изучены в [6]. Там же приведен алгоритм трассировки.

В данной работе мы рассмотрим следующие задачи для канала с вектором B':

Задача 1. Определение наибольшего количества цепей, трассировка которых осуществима на одном слое.

Задача 2. Разбиение множества цепей на минимальное число частей канальная трассировка каждой из которых осуществима на одном слое.

Задача 3. Для данного числа k вычисление наибольшего количества цепей, канальная трассировка которых осуществима на k-слойной плате и определение соответствующего распределения цепей по k слоям.

Основные результаты

Ясно, что задача 1 эквивалентна нахождению самой длинной возрастающей подпоследовательности B'.

Алгоритмы построения самой длинной возрастающей (убывающей) подпоследовательности произвольной числовой последовательности длины n можно найти в [9] – сложности $O(n^2)$ и в [4] – сложности $O(n \log n)$. В случае, когда исходная последовательность представляет из себя перестановку чисел $1, 2, ..., n$, а таковым и является B', в [7] приведен алгоритм сложности $O(n \log\log n)$. Алгоритму из [7] мы ещё вернемся, а пока зафиксируем, что задача 1 решается за время $O(n \log\log n)$.

Задача 2 эквивалентна разложению последовательности B' на минимальное количество возрастающих подпоследовательностей, а задача 3 – нахождению k непересекающихся непустых возрастающих подпоследовательностей, которые покрывают наибольшее число членов последовательности B'.

Далее займемся решением этих двух задач.

Пусть $A=(a_1,a_2,....,a_n)$ – некоторая числовая последовательность, а $N_1,N_2,...,N_m$ – разбиение множества индексов $N=\{1,2,...,n\}$ на m подмножеств, т.е.

$$N=\bigcup_{i=1}^{m} N_i\ ,\ N_i \cap N_j = \varnothing \text{ для } i \neq j\ ,$$

$$N_i \neq \varnothing\ , \text{ для } i=1,2,...,m$$

Через $A(N_i)$ обозначим подпоследовательность последовательности A, индексы членов которой принадлежат множеству N_i. Скажем, что последовательность A разложена на m подпоследовательностей $A(N_1), A(N_2),...,$ $A(N_m)$.

Например, если $A=(3,1,7,2,8)$, $n=5$, $N=\{1,2,3,4,5\}$, $m=2$, $N_1=$ $=\{1,3,5\}$, $N_2=\{2,4\}$, тогда $A(N_1)=(3,7,8)$, $A(N_2)=(1,2)$.

Через $Q(A)$ обозначим наименьшее число m, что A можно разложить на m возрастающие подпоследовательности.

В приведенном выше примере $Q(A)=2$.

Для последовательности A через $W(A)$ обозначим длину самой длинной ее невозрастающей подпоследовательности.

Теорема

Для любой последовательности A, $Q(A)=W(A)$, т.е. длина самой длинной невозрастающей подпоследовательности равна минимальному числу возрастающих подпоследовательностей, на которых можно разложить данную последовательность.

Доказательство 1.

Рассмотрим множество пар $M=\{(a_1,1),(a_2,2),...,(a_n,n)\}$ и введем отношение между его элементами следующим образом:

$(a_i,i) \prec (a_j,j)$ тогда и только тогда, когда $i<j$ и $a_i<a_j$.

$(a_i,i) \preceq (a_j,j)$ тогда и только тогда, когда $(a_i,i) \prec (a_j,j)$ или $i=j$.

Ясно, что $\preceq$ является отношением частичного порядка на множестве M. Если $(a_{i_1},i_1) \prec (a_{i_2},i_2) \prec ... \prec (a_{i_k},i_k)$, то эти элементы образуют цепь в упорядоченном множестве M. Очевидно, что каждой цепи M соответствует возрастающая подпоследовательность последовательности A и, наоборот.

Не трудно проверить, что, если (a_i,i) и (a_j,j) два различных несравнимых элемента множества M, т.е. несправедливо ни одно из соотношений $(a_i,i) \preceq (a_j,j)$ и $(a_j,j) \preceq (a_i,i)$, то от $i<j$ следует, что $a_i \geq a_j$. Значит любому подмножеству попарно несравнимых в M элементов (такое множество на-

зывается также антицепью), соответствует невозрастающая (убывающая, если все члены последовательности A различны) подпоследовательность A.

В терминах частично упорядоченного множества $Q(A)$ – наименьшее число цепей, на которые можно разложить множество M, а $W(A)$ – наибольшее число попарно несравнимых в M элементов.

По теореме Дилворда [5], наименьшее число цепей, на которые разлагается частично упорядоченное множество, равно наибольшему числу попарно несравнимых в нем элементов, т.е. $Q(A) = W(A)$. Теорема доказана.

Приведем ещё одно доказательство этой теоремы, не использующее теорему Дилворда. Оно конструктивное, и из него вытекает полиномиальный алгоритм разложения последовательности на минимальное число возрастающих подпоследовательностей.

Но сначала опишем алгоритм определения длины самой длинной невозрастающей подпоследовательности, основанный на методе динамического программирования.

Для последовательности $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ построим последовательность $L = (l_1, l_2, ..., l_n)$, полагая $l_i = \max l_j + 1$, где максимум берется по всем таким j, что $1 \le j < i$ и $a_j \ge a_i$. Если нет такого j, то полагаем $l_i = 1$. Очевидно, что l_i равно длине самой длинной невозрастающей подпоследовательности, кончающийся на a_i, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что наибольшее из чисел l_i, т.е. $m = \max\limits_{i=1}^{n} l_i$ будет равно длине искомой невозрастающей подпоследовательности, т.е $m = W(A)$. Но любая возрастающая подпоследовательность не может иметь более одного общего члена с невозрастающей подпоследовательностю. Значит: $Q(A) \ge W(A)$.

Заметим, что для любого числа $r \in \{1, 2, ..., m\}$ существует по крайней мере одно такое $i \in \{1, 2, ..., n\}$, что $l_i = r$. Кроме того, ясно, что, если $i < j$ и $l_j = l_i$, то $a_j > a_i$ (в противном случае, добавив a_j к соответствующей невозрастающей подпостедовательности длины l_i получили бы невозрастающую подпоследовательность длины $l_j + 1$ с последним элементом a_j, что противоречит определению числа l_j).

Обозначим $N_r = \{ j / l_j = r \}$, где $r \in \{1, 2, ..., m\}$. Ясно, что $N_1, N_2, ..., N_m$ образуют разбиение множества индексов $\{1, 2, ..., n\}$, все соответствующие последовательности $A(N_1), A(N_2), ..., A(N_m)$ являются возрастающими и образуют разложение последовательности A на m возрастающие подпоследовательности, т.е. $Q(A) \le W(A)$. Доказательство теоремы завершено.

Таким образом, мы получим следующий алгоритм разложения последовательности на минимальное число возрастающих подпоследовательностей.

Этап 1. Строим последовательность $L=(l_1,l_2,...,l_n)$ и число $m=\max_{i=1}^{n} l_i$.

Этап 2. Строим множества $N_1,N_2,...,N_m$.

Этап 3. Строим последовательность $A(N_1),A(N_2),...,A(N_m)$.

Оценка сложности алгоритма. Поскольку при решении задачи 2 последовательность B'=A представляет из себя перестановку, то для вычисления последовательности $L=(l_1,l_2,...,l_n)$ применима методика предложенная в [7]. Используя специальную структуру данных – дерево ван Емд Босса, последовательность $L=(l_1,l_2,...,l_n)$ можно построить за $O(n\log\log n)$ операций. Число m считается за $O(n)$ операций. Значит, сложность этапа 1 – $O(n\log\log n)$.

Если последовательность $L=(l_1,l_2,...,l_n)$ построена, то построение множеств $N_1,N_2,...,N_m$ и последовательностей $A(N_1),A(N_2),...,A(N_m)$ можно сделать за один просмотр L. Это потребует $O(n\ )$ операций. Итак, сложность этапов 2 и 3 равно $O(n)$. Значит, сложность алгоритма 2 равно $O(n\log\log n)$.

Отметим, что каждая из возрастающих последовательностей $A(N_1),A(N_2),...,A(N_m)$ соответствует некоторому каналу, трассировка цепей которой возможна на одном слое.

Задача 3. Дана некоторая числовая последовательность $A=(a_1,a_2,....,a_n)$ и число $k\in\{1,2,...,n\}$. Требуется выделить k непересекающиеся непустые возрастающие подпоследовательности, которые покрывают наибольшее число членов последовательности A, или тоже самое, что сумма длин этих подпоследовательностей максимальна.

Очевидно, что это максимальное число зависит от последовательности A и числа k. Обозначим его через $L(A,k)$.

В [2], в рамках исследований свойств таблиц Юнга, предложен простой и эффективный способ вычисления чисел $L(A,k)$. Однако этот способ не предоставляет возможности строить соответствующие подпоследовательности. Ниже мы приведем алгоритм полиномиальной сложности вычисления чисел $L(A,k)$ и определения соответствующих k подпоследовательностей, построив при этом максимальный поток минимальной стоимости в сети специального вида.

Замечание 1. В [2] рассматриваются не строго возрастающие (неубывающие) последовательности. Мы рассмотрим строго возрастающие по двум причинам. Во – первых: в задаче канальной трассировки, для решения которой, собственно говоря, и мы сформулировали эту задачу, последовательность A представляет из себя перестановку и равенство двух членов подпоследовательности невозможно. Во – вторых, до сих пор мы работали именно с возрастающими подпоследовательностями. Однако, как весь до сих пор рассмотренный, так и последующий материал, можно распространять на случай нестрогого возрастания.

Замечание 2. При $k = 1$ задача 3 эквивалентна построению самой длинной возрастающей подпоследовательности, а при $k = W(A)$ – разложению A на минимальное число возрастающих подпоследовательностей. При $W(A) \le k \le n$ требуемые подпоследовательности могут получится разделением на части тех из $W(A)$ подпоследовательностей, длины которых больше единицы. В частности, при $k = n$ все подпоследовательности имеют единичную длину. Интерес представляет случай $1 < k < W(A)$.

Теперь перейдем к решению задачи 3. Мы предложим алгоритм сложности O(k*n^2) для построения соответствующих k подпоследовательностей. Отметим, что алгоритм такой же сложности для решения аналогичной задачи, сформулированной на языке графов перестановок, ранее был предложен в [1].

Для последовательности $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и числа $k \in \{1, 2, ..., n\}$ построим ориентированную сеть.

Сначала построим двудольный граф с $2n$ вершинами, в каждой доли по n вершин. i-ую вершину первой доли соединим с i-ой вершиной второй доли дугой с пропускной способностью 1 и со стоимостью прохождения единицы потока (далее – стоимостью), равной -1. Если $a_i < a_j$ и $i < j$, то i-ую вершину второй доли соединим с j-ой вершиной первой доли дугой с пропускной способностью 1 и со стоимостью 0.

Добавим еще три вершины: S (источник), R (распределитель) и T (сток). Соединим R со всеми вершинами первой доли, а все вершины второй доли соединим со стоком T – дугами, с пропускными способностями 1 и со стоимостями – 0. Добавим также дугу (S,R), пропускная способность которой равно k, а стоимость – 0.

Очевидно, что величина максимального потока в построенной сети равно k. Каждая единица потока из R в T доставляется по некоторому пути $Ri_1i_1^{'}i_2i_2^{'}...i_qi_q^{'}T$, которому, согласно построению сети, соответствует возрастающая последовательность $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_q}$ длины q. Стоимость прохождения потока по этому пути равна $-q$. Значит, максимальному потоку величины k соответствуют k непересекающиеся подпоследовательности, сумма длин которых равна модулю суммы стоимостей соответствующих путей, по которым единицы потока доставляются от R в T. Значит, максимальному потоку минимальной стоимости будут соответствовать k непересекающиеся непустые возрастающие подпоследовательности, сумма длин которых максимальна.

После того, как поток минимальный стоимости величины k найден, нетрудно восстанавливать конкретные подпоследовательности. Рассмотрим путь из R в T, который проходит только по тем ребрам, по которым течет поток величины 1, т.е. это путь $Ri_1i_1^{'}i_2i_2^{'}...i_qi_q^{'}T$, которому, согласно построению сети, соответствует возрастающая последовательность $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_q}$ длины q. Ясно, что таких путей будет ровно k.

На рис. 3 изображена сеть, соответствующая последовательности A=(4, 1, 3, 2) и k = 2. На рис.4 приведен пример максимального потока минимальной стоимости в этой сети, где жирными линиями отмечены дуги по которым течет поток. Максимальному потоку величины 2 соответствуют подпоследовательности A_1=(1,2), A_2=(4).

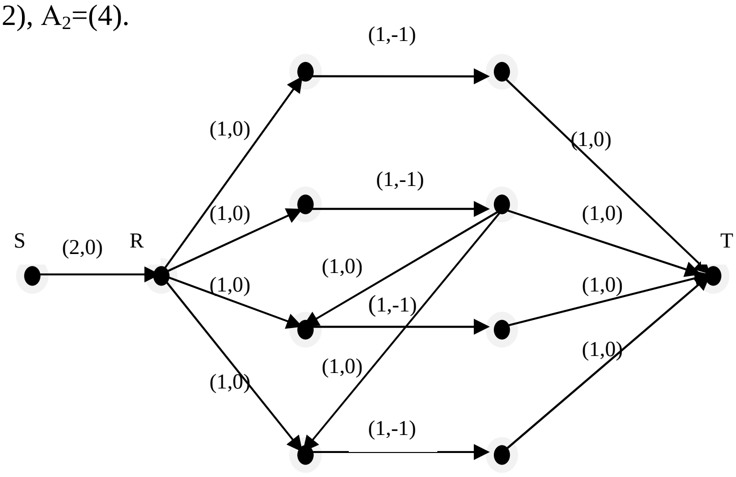

Рис. 3 Сеть последовательности (4,1,3,2) с пропускными способностями дуг и со стоимостью прохождения единичного потока

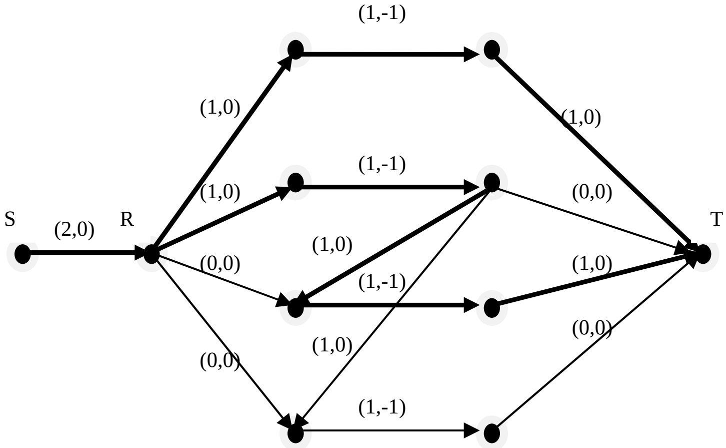

Рис. 4 Максимальный поток минимальной стоимости из S в T. Стоимость потока – 3

Таким образом алгоритм состоит из трех этапов:

Этап 1. Построение сети.

Этап 2. Нахождение максимального потока минимальной стоимости.

Этап 3. Восстановление конкретных подпоследовательностей.

Этапы 1 и 3 требуют выполнения не более $O(n^2)$ операций. Нахождение максимального потока минимальной стоимости требует выполнения не более O(F(n,m)*S(n,m)) операций, где F(n,m) – величина максимального потока, а S(n,m) – время, необходимое для нахождения кратчайшего пути в графе с n вершинами и m дугами (возможно, с отрицательными весами дуг). Эту оценку нетрудно получить, вычисляя число операций выполняемый соответствующим алгоритмам, приведенным в [3]. В построенной нами сети F(n,m)=k. Для построения кратчайшего пути, применив алгоритм Дейкстры с потенциалами, получим $S(n,m)=O(n^2)$[8]. Таким образом, сложность этапа 2 и алгоритма в целом равняется $O(k*n^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sherwani N.A.* Algorithms for VLSI Physical Design Automation, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.
2. *Фултон В.* Таблица Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии, Издательство МЦНМО. М., 2006.
3. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность М.: Мир, 1985.
4. *Kun-Mao Chao.* Dynamic Programming – a Quick Review, Taipei, 2005.
5. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency, Springer, Berlin, 2003.
6. *Ullman J.D.* Computational Aspects of VLSI, Computer Science Press, Rockville, 1984.
7. *Bespamyatnikh S.M.* Segal, Enumerating Longest Increasing Subsequences and Patience Sorting, The Pacific Institute for the Mathematical Siences, 1999.
8. *Contane D., Faro S.* Two-Levels-Greedy: A Generalization of Dijkstra’s Shortest Path Algorithm, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2004.
9. *Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C.* Introduction to Algorithms, 2ed., MIT, 2001.

MULTI-LAYER CHANNEL ROUTING

E.T. Piliposyan

Algorithms for solving following problems are offered in this paper.

– Definition of the maximum number of nets, routing of which is possible on a single layer (algorithm complexity is $O(n \log \log n)$).

– Partitioning of a set of nets to the minimum number of parts, in such way, that routing each of them is possible on a single layer (algorithm complexity is $O(n \log \log n)$).

– Definition of the maximum number of nets which are possible to route on k-layer circuit board, for a given number k. Appropriate distribution of these nets to the layers is also provided (algorithm complexity is $O(k * n^2)$)

Keywords: channel routing, partially ordered set, increasing subsequence, minimum cost flow.

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԿԱՊՈՒՂԱՅԻՆ ՈՒՂԵԳԾՈՒՄ

Է.Տ. Փիլիպոսյան

Աշխատանքում առաջարկված են ալգորիթմներ հետևյալ խնդիրների լուծման համար:

– Առավելագույն քանակությամբ շղթաների որոշում, որոնց ուղեգծումն իրականացնելի է մեկ շերտի վրա (ալգորիթմի բարդությունը` $O(n \log \log n)$)

– Շղթաների բազմության տրոհում մինիմալ թվով մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրի ուղեգծումն իրականացնելի է մեկ շերտի վրա (ալգորիթմի բարդությունը` $O(n \log \log n)$)

– Տրված k թվի համար շղթաների առավելագույն քանակի որոշում, որոնց ուղեգծումը իրականացնելի է k-շերտանի հարթակի վրա: Տրվում է նաև այդ շղթաների համապատասխան բաշխումն ըստ շերտերի (ալգորիթմի բարդությունը` $O(k * n^2)$)

УДК 519.17

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПАРАМЕТРА μ_{12} ДЕРЕВЬЕВ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Н.Н. Давтян

Иджеванский филиал Ереванского Государственного Университета

Доказано, что разность между параметром μ_{12} и числом вершин экстремальных степеней в классе деревьев с максимальной степенью вершины, равной 3, является неограниченной величиной.
Ключевые слова: дерево, реберная раскраска, интервальный спектр.

§1. Обозначения, определения, цель работы

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель [1], содержащие хотя бы одно ребро. Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины $x \in V(G)$ в графе G обозначается через $d_G(x)$, наибольшая из степеней вершин графа G – через $\Delta(G)$.

Если D – непустое конечное подмножество множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то через $l(D)$ и $L(D)$ обозначаем, соответственно, его наименьший и наибольший элемент. Непустое конечное подмножество D множества $\mathbb{N}$ назовем интервалом, если из $t \in \mathbb{N}$, $l(D) \le t \le L(D)$ вытекает $t \in D$.

Правильной реберной t-раскраской ($t \in \mathbb{N}$) графа G назовем функцию $\varphi : E(G) \to \{1, 2, ..., t\}$, удовлетворяющую условиям:

1) для $\forall i$, $1 \le i \le t$, существует хотя бы одно ребро $e^{(i)} \in E(G)$ с $\varphi\left(e^{(i)}\right) = i$;

2) для любых двух смежных ребер $e' \in E(G)$, $e'' \in E(G)$ $\varphi\left(e'\right) \ne \varphi\left(e''\right)$.

Наименьшее значение t, при котором существует правильная реберная t-раскраска графа G, обозначается через $\chi'(G)$.

Множество всех правильных реберных t-раскрасок графа G, где $\chi'(G) \le t \le \left|E(G)\right|$, обозначим через $\alpha(G,t)$, и пусть

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G,t).$$

Если $\varphi \in \alpha(G)$ и $x \in V(G)$, то множество $\{\varphi(e) / e \in E(G),\ e$ смежно с $x\}$ назовем спектром вершины x графа G при раскраске φ и обозначим через $S_G(x,\varphi)$; через $f_G(\varphi)$ обозначим число $|\{z \in V(G) / S_G(z,\varphi)$ является интервалом$\}|$.

Поскольку не для всех графов существует интервальная реберная раскраска (простейшим примером служит граф K_3), то возникает важная задача исследования для данного графа G поведения функции $f_G(\varphi)$ при $\varphi \in \alpha(G,t)$ и t, удовлетворяющем неравенству $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$.

Для произвольного дерева D с $|V(D)| \ge 2$ положим:

$$\gamma(D) \equiv \left|\{x \in V(D) / d_D(x) = 1\}\right|,$$

$$\Gamma(D) \equiv \left|\{x \in V(D) / d_D(x) = \Delta(D)\}\right|,$$

$$R(D) \equiv \begin{cases} -2, & \text{если } \Delta(D) = 1 \\ 0, & \text{если } \Delta(D) = 2 \text{ или } \Delta(D) \ge 4 \\ \min\left\{\left|\{x \in V(D) / d_D(x) = 2,\ S_D(x,\varphi) \text{ является} \right.\right. & \\ \left.\left. \qquad \text{интервалом}\}\right| / \ \varphi \in \alpha(D,3)\right\}, & \text{если } \Delta(D) = 3. \end{cases}$$

В работе [2] для произвольного связного неориентированного конечного графа без кратных ребер и петель были введены параметры μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22}, имеющие теоретико-игровой смысл (о параметре μ_{12} см. [3]).

В [2] найдены точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} для «лестниц Мебиуса».

В [4] найдены точные значения параметров μ_{11}, μ_{12}, μ_{21} и μ_{22} в случаях, когда граф G изоморфен либо простой цепи, либо простому циклу, либо простому циклу с одной хордой.

В [5] найдены точные значения параметров μ_{11} и μ_{22} для деревьев.

В [3] найдено точное значение параметра μ_{12} для деревьев. Именно, доказана

Теорема. Для произвольного дерева D с $|V(D)| \ge 2$

$$\mu_{12}(D) = \gamma(D) + \Gamma(D) + R(D).$$

Из этой теоремы и из определения $R(D)$, в частности, следует, что для любого дерева D с $|V(D)| \ge 2$ и $\Delta(D) \ne 3$ $\mu_{12}(D) \le \gamma(D) + \Gamma(D)$. Заметим, что для дерева T_0 с $\Delta(T_0) = 3$, у которого $V(T_0) = \{x_1, ..., x_7\}$, $E(T_0) = \{(x_1,x_2),(x_2,x_3),$ $(x_1,x_4),(x_4,x_5),(x_1,x_6),(x_6,x_7)\}$, выполняется неравенство $\mu_{12}(T_0) = 5 > 4 =$

$=\gamma(T_0)+\Gamma(T_0)$. В связи с последними двумя неравенствами интересно выяснить, является ли разность $\mu_{12}(D)-(\gamma(D)+\Gamma(D))$ хотя бы ограниченной величиной в классе деревьев D с $\Delta(D)=3$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать неограниченность исследуемой разности (иначе говоря, неограниченность параметра $R(D)$) в классе деревьев D с $\Delta(D)=3$.

§2. Результат

Определим два класса деревьев.

Для $\forall i\in\mathbb{N}$ положим

$$X_i\equiv\left\{x_{i,1},x_{i,2},x_{i,3},\ldots,x_{i,2^i}\right\},\qquad X_i{}'\equiv\left\{x'_{i,1},x'_{i,2},x'_{i,3},\ldots,x'_{i,3\cdot2^{i-1}}\right\},$$

$$Y_i\equiv\left\{y_{i,1},y_{i,2},y_{i,3},\ldots,y_{i,2^i}\right\},\qquad Y_i'\equiv\left\{y'_{i,1},y'_{i,2},y'_{i,3},\ldots,y'_{i,3\cdot2^{i-1}}\right\}.$$

Положим:

$$E_0\equiv\left\{\left(x_{-1},x_0\right)\right\},\qquad E_{1,1}\equiv\left\{\left(x_0,y_{1,1}\right),\left(y_{1,1},x_{1,1}\right)\right\},$$

$$E_{1,2}\equiv\left\{\left(x_0,y_{1,2}\right),\left(y_{1,2},x_{1,2}\right)\right\},\qquad E_1\equiv E_{1,1}\cup E_{1,2},$$

$$E_{1,1}{}'\equiv\left\{\left(x'_0,y'_{1,1}\right),\left(y'_{1,1},x'_{1,1}\right)\right\},\qquad E_{1,2}{}'\equiv\left\{\left(x'_0,y'_{1,2}\right),\left(y'_{1,2},x'_{1,2}\right)\right\},$$

$$E_{1,3}{}'\equiv\left\{\left(x'_0,y'_{1,3}\right),\left(y'_{1,3},x'_{1,3}\right)\right\},\qquad E_1'\equiv E_{1,1}{}'\cup E_{1,2}{}'\cup E_{1,3}{}'.$$

Для любых $i\in\mathbb{N}$, $i\geq2$ и $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $1\leq j\leq2^i$, положим:

$$E_{i,j}\equiv\left\{\left(x_{i-1,\left\lceil\frac{j}{2}\right\rceil},y_{i,j}\right),\left(y_{i,j},x_{i,j}\right)\right\}.$$

Для любых $i\in\mathbb{N}$, $i\geq2$ и $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $1\leq j\leq3\cdot2^{i-1}$, положим:

$$E_{i,j}{}'\equiv\left\{\left(x'_{i-1,\left\lceil\frac{j}{2}\right\rceil},y'_{i,j}\right),\left(y'_{i,j},x'_{i,j}\right)\right\}.$$

Для $\forall i\in\mathbb{N}$, $i\geq2$ положим:

$$E_i\equiv\bigcup_{j=1}^{2^i}E_{i,j},\ E_i'\equiv\bigcup_{j=1}^{3\cdot2^{i-1}}E'_{i,j}.$$

Для $\forall n\in\mathbb{N}$ определим граф H_n равенствами:

$$V\left(H_n\right)\equiv\left\{x_{-1},x_0\right\}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}Y_i\right),E\left(H_n\right)\equiv\bigcup_{i=0}^{n}E_i.$$

Ясно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ H_n является деревом с $\Delta(H_n) = 3$ и $|V(H_n)| = 4 \cdot 2^n - 2$.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$ определим граф D_n равенствами

$$V(D_n) \equiv \{x_0'\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i'\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i'\right), E(D_n) \equiv \bigcup_{i=1}^{n} E_i'.$$

Ясно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ D_n является деревом с $\Delta(D_n) = 3$ и $|V(D_n)| = 6 \cdot 2^n - 5$.

Теорема. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ $R(D_n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

Доказательство. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,2\}$ определим числа $h_i(n)$ следующим образом:

$$h_i(n) \equiv \min\left\{\left|\left\{x \in V(H_n) / \, d_{H_n}(x) = 2, \; S_{H_n}(x,\varphi) \text{ является интервалом}\right\}\right| \Big/ \right.$$
$$\left. \varphi \in \alpha(H_n, 3), \; \varphi((x_{-1}, x_0)) = i\right\}.$$

Ясно, что $h_1(1) = 1$, $h_2(1) = 0$.

Нетрудно убедиться, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ имеют место рекуррентные соотношения

$$h_1(n) = \min\{1 + 2h_1(n-1), \; 2 + h_1(n-1) + h_2(n-1)\},$$
$$h_2(n) = \min\{2h_1(n-1), \; 1 + h_1(n-1) + h_2(n-1), \; 2 + 2h_2(n-1)\}.$$

Нетрудно проверить, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,2\}$ $h_i(n) = 2^n - i$.

Легко заметить, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ лес, порожденный подмножеством $V(D_n) \setminus \{x_0'\}$ вершин дерева D_n, содержит 3 компоненты связности, каждая из которых изоморфна дереву H_{n-1}. Отсюда вытекает, что для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ верно равенство

$$R(D_n) = \min\{1 + 3h_1(n-1), \; 2 + 2h_1(n-1) + h_2(n-1), \; 3 + h_1(n-1) + 2h_2(n-1)\},$$

которое и приводит к доказываемому равенству.

Теорема полностью доказана.

Следствие. Для $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists n(m)$, такое, что

$$\mu_{12}(D_{n(m)}) - \left(\gamma(D_{n(m)}) + \Gamma(D_{n(m)})\right) \geq m.$$

Доказательство. Легко видеть, что по данному числу m достаточно выбрать в качестве $n(m)$ число $1 + \left\lceil \log_2 \frac{m+2}{3} \right\rceil$.

Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

2. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t-цветных раскрасок «лестниц Мебиуса» при варьировании t // Сборник научных статей Годичной научной конференции (декабрь, 2008) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер.: Изд-во РАУ, 2009. С. 81–84.

3. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О параметре μ_{12} дерева // Сборник научных статей Годичной научной конференции (декабрь, 2009) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер.: Изд-во РАУ, 2010. С. 149–151.

4. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О свойствах числа вершин с интервальным спектром в правильных реберных раскрасках некоторых графов // Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, № 2, 2009. С. 33–42.

5. *Давтян Н.Н.* О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева // Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. Т. 32. Ер., 2009. С. 107–111.

ON A PROPERTY OF THE PARAMETER μ_{12} OF TREES OF SPECIAL KIND

N.N. Davtyan

It's proved that in the class of trees, for which the greatest degree of a vertex is 3, the difference between the parameter μ_{12} and the number of vertices with extremal degrees is a boundless quantity.

ՀԱՏՈՒԿ ՏԻՊԻ ԾԱՌԵՐԻ μ_{12} ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՄԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ն.Ն. Դավթյան

Ապացուցված է, որ 3-ի հավասար գագաթի առավելագույն աստիճանով ծառերի դասում μ_{12} պարամետրի և էքստրեմալ աստիճաններով գագաթների թվի տարբերությունը անսահմանափակ մեծություն է:

С О Д Е Р Ж А Н И Е

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила для авторов журнала «Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки»

Журнал печатает оригинальные статьи по различным направлениям физико-математических и естественных наук.

• К рассмотрению принимаются статьи на русском или английском языках.

• Статьи должны быть представлены в жесткой и электронной форме.

• К материалам статьи прилагается Договор с издательством РАУ, подписанный одним (ответственным) автором (оформляется в одном экземпляре).

• Статья должна иметь направление от учреждения, в котором выполнена работа. Рукопись подписывается автором (соавторами) с указанием фамилии, имени, отчества, домашнего адреса, места работы, номеров телефонов и e-mail. Необходимо указать, с кем вести переговоры и переписку. Авторы могут предложить возможных рецензентов. Отклоненные статьи не возвращаются.

• В редакцию направляются два экземпляра статьи, набранные шрифтом 12 пунктов через *два* интервала на одной стороне листа (приблизительно 30 строк на странице, 60 символов в строке). Поля с левой стороны должны быть не менее 4 см. Рукописные вставки не допускаются. Все страницы должны быть пронумерованы.

Перед текстом статьи указываются:

– название статьи;

– инициалы и фамилии авторов (для иностранных авторов на языке оригинала или на английском языке);

– название учреждения (без сокращений и аббревиатур), которое направляет статью, его адрес (город, страна);

– e-mail авторов.

Далее помещается аннотация объемом не более 0.5 машинописной страницы, которая не должна дублировать вводный или заключительный разделы. Аннотация не должна содержать литературных ссылок и аббревиатур. В конце аннотации указываются ключевые слова (keywords). Требуется также аннотация на английском языке.

• **Изложение материала** должно быть ясным и кратким, без формул и выкладок промежуточного характера и громоздких математических выражений.

• **Рисунки** представляются в двух экземплярах. Все надписи на рисунке следует давать на английском языке.

• **Формулы** следует набирать крупно, свободно и четко.

Нумерация формул должна быть сквозной по всей статье (не по разделам).

– Химические формулы, математические символы, сокращения (в том числе в индексах), единицы измерения набираются прямым шрифтом.

– Жирным шрифтом набираются *только* векторные величины (стрелка сверху не нужна).

– Греческие, готические и «рукописные» буквы должны легко распознаваться.

– Все остальные символы набираются курсивом.

• **Таблицы** должны быть напечатаны на отдельных листах, включенных в общую нумерацию текста. Обязательно наличие заголовков и единиц измерения величин. Все столбцы таблицы должны быть озаглавлены.

• **Список литературы** должен быть набран на английском языке и оформлен следующим образом:

– для книг – инициалы и фамилии *всех* авторов, название книги, издательство, место издания, год издания в круглых скобках, том;

– для периодических изданий – инициалы и фамилии *всех* авторов, название журнала, том, – номера первой и последней страниц статьи, год издания в круглых скобках.

Нумерация ссылок должна соответствовать порядку их упоминания в тексте.