

**РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)
УНИВЕРСИТЕТ**

В Е С Т Н И К

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

№1

ISSN 1829-0450

ЕРЕВАН 2011

**РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)
УНИВЕРСИТЕТ**

В Е С Т Н И К

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

№1

Издательство РАУ

Ереван 2011

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ. №1 – Ер.: Изд-во РАУ, 2011. – с. 99.

Редакционная коллегия:

Главный редактор	<i>С.А. Амбарцумян</i>
Зам. главного редактора	<i>П.С. Аветисян</i>
Ответственные секретари	<i>Т.А. Асланян, Р.С. Шагинян</i>

Члены редколлегии:

*В.И. Буренков, Э.С. Варданян, Г.Р. Вардапетян, М.А. Давтян,
Г.Г. Данагулян, В.С. Егиазарян, И.Д. Завславский, Г.Г. Казарян,
Э.М. Казарян, Г.А. Карапетян, Б.И. Коноплев, Г.Б. Маранджян,
Р.Л. Мелконян, В.И. Муронец, Б.С. Нагапетян, С.Г. Петросян,
А.А. Саркисян, Г.З. Саркисян, А.Г. Сергеев, В.И. Таурян.*

Журнал входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК
РА

Российско-Армянский (Славянский) университет, 2011 г.

ISBN 1829-0450

© Издательство РАУ, 2011

УДК 512.543

СТРОГО РАВНОМЕРНАЯ НЕАМЕНАБЕЛЬНОСТЬ СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП**В.С. Атабекян***Ереванский государственный университет
Российско-Армянский (Славянский) университет*

Известная теорема С.И. Адяна утверждает, что для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$ свободная m -порожденная бернсайдовая группа $B(m, n)$ периода n – неаменабельна. Более сильной формой неаменабельности является равномерная неаменабельность. В работе доказывается, что каждая нециклическая подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 1003$ является строго равномерно неаменабельной группой.

Ключевые слова: неаменабельная группа, равномерная неаменабельность, свободная бернсайдова группа, периодическая группа, константа Фелнера, константа Каждана.

1. Введение

Определение 1 (см.: [1]). Константой Фелнера группы G относительно конечного порождающего множества S называется число

$$Fol_S(G) = \inf_A \frac{|\partial_S(A)|}{|A|},$$

где инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$ и

$$\partial_S(A) = \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in S^{\pm 1}\}.$$

Известно, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда $Fol_S(G) = 0$ для некоторого (а следовательно, для каждого) конечного порождающего множества S [2]–[4]. По определению, группа G называется **аменабельной**, если для нее существует конечноаддитивная мера μ , определенная на множестве всех подмножеств группы G , которая инвариантна относительно

левых сдвигов группы G и $\mu(G) = 1$. Как показано Дж. фон Нейманом [5], класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, фактор-группы, индуктивного предела, расширения. С другой стороны, любая группа, содержащая свободную подгруппу ранга 2, – неаменабельна.

Одним из классических результатов периодических групп является теорема 5 из работы [6] С.И. Адяна, утверждающая, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ является неаменабельной группой (решение проблемы Кестена [7]). Напоминаем, что *свободной бернсайдовой группой* (или *свободной периодической группой*) $B(m, n)$ периода n и ранга m называется группа, которая имеет следующее задание:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$.

Группы $B(m, n)$ – первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющие нетривиальному тождеству, и тем самым не содержащие свободные подгруппы ранга 2. Обзору результатов по свободным периодическим группам посвящена статья [8].

Следует отметить, что первые примеры неаменабельных групп без свободных подгрупп были построены А.Ю. Ольшанским в работе [9] (контрпример к гипотезе фон Неймана). Эти группы являются периодическими, но, в отличие от свободных бернсайдовых групп, имеют неограниченно возрастающие порядки элементов.

Если существует $\varepsilon > 0$ – такое, что $Fol_\varepsilon(G) > \varepsilon$ для любого конечного порождающего множества S , то группа G называется **равномерно неаменабельной** группой.

Известны некоторые классы равномерно неаменабельных групп. Например, любая неэлементарная гиперболическая группа, а также любая большая (в смысле Громова) группа – равномерно неаменабельна. С другой стороны, существуют неаменабельные группы, которые не являются равномерно неаменабельными (см.: [1], [10]).

В работе [11] автора было доказано, что для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ является равномерно неаменабельной группой. В частности, для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 1003$ свободная бернсайдовая группа $B(m, n)$ – равномерно неаменабельная группа (см. также [12]).

Рассмотрим левое регулярное представление конечно порожденной группы G над гильбертовым пространством $L^2(G)$. Для любого конечного порождающего симметризованного множества S из G определим число $\alpha(G, S)$ как максимальное $\varepsilon \geq 0$ – такое, что для любого вектора $v \in L^2(G)$ с

нормой $\|v\|=1$ существует элемент $s \in S$, удовлетворяющий неравенству $\|sv - v\| \geq \varepsilon$. Число $\alpha(G, S)$ называется L^2 -константой Каждана группы G . Одна из наиболее интересных характеристик аменабельных групп была получена Уланицким в работе [13] в терминах левого регулярного представления: *конечно порожденная группа G является аменабельной тогда и только тогда, когда $\alpha(G, S) = 0$ для некоторого (и, следовательно, для любого) конечного порождающего множества S группы G .*

Тем самым для данной неаменабельной группы G возникает возможность выяснить ее равномерную неаменабельность с использованием либо константы Фелнера, либо L^2 -константы Каждана. Определим величину

$$\alpha(G) = \inf_S (\alpha(G, S)),$$

где нижняя грань берется по всем конечным порождающим множествам группы G . Если $\alpha(G) > 0$ для конечно порожденной группы G , то скажем, что G – *строго равномерно неаменабельная группа*.

Следующая лемма, доказанная в работе [1], показывает, что равномерная неаменабельность следует из строгой равномерной неаменабельности, чем и объясняется термин «строго». Отметим, что обратная импликация является открытым вопросом.

Лемма 12 (см.: предложение 2.4 [2]). Пусть G – конечно порожденная группа. Тогда для любого конечного порождающего множества S группы G имеет место неравенство $Fol_S(G) \geq \frac{1}{2} \alpha(G, S)^2$.

В работе Д.В. Осина [14] доказывается, что существует целое число N ($N > 10^{78}$) – такое, что любая свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ нечетного показателя $n > N$ и ранга $m > 1$ является строго равномерно неаменабельной группой (см.: теорема 1.3 [14]).

Нашей основной целью является

Теорема 1.3 Для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ – строго равномерно неаменабельная группа.

Следствие 1.4 Для любого $m > 1$ и нечетного $n \geq 1003$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ – строго равномерно неаменабельная группа.

Теоремой 1 усиливаются соответствующие результаты работ [1], [6], [11], [14].

В дальнейшем изложении мы будем использовать терминологию и обозначения работ [15]–[17].

2. Вспомогательные леммы

Пусть S – произвольное множество, порождающее нециклическую подгруппу $\langle S \rangle_{B(2,n)}$ группы $B(2,n)$. Согласно теореме С.И. Адяна VI.3.3[15], при нечетных $n \geq 665$ каждая абелева подгруппа группы $B(m,n)$ – циклическая, следовательно подгруппа $\langle S \rangle_{B(2,n)}$ – неабелева. Поэтому можно выбрать пару непостоянных элементов X и Y из множества S .

Лемма 2.5 При любом нечетном $n \geq 1003$ всякая нециклическая подгруппа $\langle X, Y \rangle$ группы $B(2,n)$ содержит нециклическую подгруппу вида $U \langle A, C \rangle U^{-1}$ – такую, что C – элементарный период некоторого ранга α и $C \stackrel{B(m,n,\alpha-1)}{=} [A^d, Z^{-1}B^dZ]$, где A и B – минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-1}$, $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$, $d = 191$ и длины слов UAU^{-1} и UCU^{-1} относительно порождающих X и Y удовлетворяют неравенствам

$$|UAU^{-1}|_{\{X,Y\}} < 84^3 n \text{ и } |UCU^{-1}|_{\{X,Y\}} < 84^3 n.$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \langle X, Y \rangle_{B(2,n)}$ – произвольная нециклическая подгруппа группы $B(2,n)$. В силу лемм VI.2.4 [15] и VI.1.2 [15] выполнены равенства $X \stackrel{B(2,n)}{=} TF^i T^{-1}$ и $T^{-1}YT \stackrel{B(2,n)}{=} Z^{-1}E^j Z$ для некоторых слов T , Z и минимизированных элементарных периодов F и E , имеющих ранги σ и ρ . Без ограничения общности можем предположить, что $\sigma \leq \rho$, а в силу лемм VI.2.4 [15] и IV.1.13 [15] можем считать, что $Z \in \mathcal{M}_\xi \cap \mathcal{A}_{\xi+1}$ для некоторого $\xi \geq \rho$.

Пусть $\text{НОД}(i, n) = k$ и r такое целое число, что $|r| < n$ и $F^{ir} = F^k$. Выбрав число $s = \lfloor n/3k \rfloor$, получим $n/5 < sk < n/3$. Таким образом, $X^{rs} = TF^{irs} T^{-1} = TF^{ks} T^{-1}$ и $186 < ks < \frac{n+1}{2} - 148$, поскольку $n \geq 1003$.

Итак, для слова $X_1 = X^{rs}$ имеем $X_1 = TF^{ks} T^{-1}$ и

$$|X_1|_{\{X,Y\}} \leq |rs| |X|_{\{X,Y\}} < n.$$

Аналогично можно найти такой $Y_1 \in \langle Y \rangle_{B(2,n)}$ и такие числа t и l , что $186 < tl < \frac{n+1}{2} - 148$, $T^{-1}Y_1 T = Z^{-1}E^{tl} Z$ и $|Y_1|_{\{X,Y\}} < n$.

По теореме VI.3.1 [15] имеем $[X_1, Y_1] \neq 1$. В силу лемм 3.2 [16], 7.2 [16] и 2.8 [16] коммутатор $[X_1, Y_1] = T[F^{ks}, Z^{-1}E^d Z]T^{-1}$ сопряжен в $B(m, n)$ некоторому минимизированному элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geq \rho + 1$. Пусть $T^{-1}[X_1, Y_1]T = Z_1^{-1}DZ_1$, где $Z_1 \in \mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \delta$. Тогда, вновь применив леммы 3.2 [16], 7.2 [16] и 2.8 [16], получим, что коммутатор $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = T[F^{ks}, Z_1^{-1}D^d Z_1]T^{-1}$ сопряжен в $B(2, n)$ некоторому минимизированному элементарному периоду B некоторого ранга $\mu \geq \delta + 1$.

Допустим, что $T^{-1}[X_1, [X_1, Y_1]^d]T = Z_2^{-1}BZ_2$. Тогда в подгруппе $\Delta = \langle X, Y \rangle_{B(2, n)}$ содержатся элементы $[X_1, Y_1] = TZ_1^{-1}DZ_1T^{-1}$ и $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = TZ_2^{-1}BZ_2T^{-1}$. Можно считать, что $Z_3^{-1} = Z_1Z_2^{-1} \in \mathcal{M}_\nu \cap \mathcal{A}_{\nu+1}$, где $\nu \geq \mu$. По лемме 3.2 [16], найдем приведенную форму C коммутатора $[D^d, Z_3^{-1}B^d Z_3]$. Согласно лемме 7.2 [16], имеем, что C – элементарный период некоторого ранга $\tau \geq \mu + 1$. В силу соотношения (3.6) [16] имеет место

$$C \stackrel{B(2, n, \mu)}{=} w[D^d, Z_3^{-1}B^d Z_3]w^{-1}, \text{ где } w \in \Theta(D, D_1).$$

Рассмотрим элементарные периоды $A = wDw^{-1}$ и $C = w[D^d, Z_3^{-1}B^d Z_3]w^{-1}$. Из определений следуют равенства

$$A = wZ_1T^{-1}[X_1, Y_1]TZ_1^{-1}w^{-1},$$

$$C = wZ_1T^{-1}\left[[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d\right]TZ_1^{-1}w.$$

Значит, если $U = TZ_1^{-1}w^{-1}$, то $UAU^{-1} \in \Delta$, $UCU^{-1} \in \Delta$ и

$$|UAU^{-1}|_{\{X, Y\}} = |[X_1, Y_1]|_{\{X, Y\}} < n|X, Y|_{\{X, Y\}} = 4n, \quad (1)$$

$$|UCU^{-1}|_{\{X, Y\}} = |[[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d]|_{\{X, Y\}} < n(8d + 2d(8d + 2)). \quad (2)$$

Остается заметить, что $n(8d + 2d(8d + 2)) < 84^3 n$. Лемма доказана.

Следующее утверждение доказано автором в работе [17].

Лемма 36 (см.: теорема 2 [17]). Пусть в группе $B(2, n, \alpha - 1)$ коммутатор $[A^d, Z^{-1}B^d Z]$ равен элементарному периоду C ранга α , где A – элементарный период ранга γ , B – элементарный период ранга β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-1}$ ($\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$),

$d = 191$, $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число и слова A^q и B^q входят в некоторые слова из множеств $\mathcal{M}_{\gamma-1}$ и $\mathcal{M}_{\beta-1}$ соответственно. Тогда слова

$$u = C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200}, v = C^{300} A C^{300} A^2 \dots A^{n-1} C^{300}$$

являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2, n)$.

Лемма 4.7 Для любого $m > 1$ и нечетного $n \geq 1003$ существует такое число $L < (57n)^3$, что для произвольного множества S , порождающего нециклическую подгруппу $\langle S \rangle$ группы $B(m, n)$, можно найти элементы $u, v \in \langle S \rangle$ – такие, что $\{u, v\}$ есть базис свободной бернсайдовой подгруппы периода n и длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$.

Доказательство. Поскольку подгруппы $\langle u, v \rangle_{B(2, n)}$ и $\langle UuU^{-1}, UvU^{-1} \rangle_{B(2, n)}$ изоморфны, то в силу леммы 2 элементы UuU^{-1} , UvU^{-1} являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2, n)$. Очевидно,

$$UuU^{-1} = (UCU^{-1})^{200} (UAU^{-1}) \dots (UAU^{-1})^{n-1} (UCU^{-1})^{200},$$

$$UvU^{-1} = (UCU^{-1})^{300} (UAU^{-1}) \dots (UAU^{-1})^{n-1} (UCU^{-1})^{300}.$$

Согласно лемме 1, имеем $UuU^{-1}, UvU^{-1} \in \langle X, Y \rangle_{B(m, n)}$. Используя неравенства (1) и (2), получаем неравенства

$$|UuU^{-1}|_{\{X, Y\}} < \frac{n(n-1)}{2} 4n + 200n^2(8d + 2d(8d + 2)),$$

$$|UvU^{-1}|_{\{X, Y\}} < \frac{n(n-1)}{2} 4n + 300n^2(8d + 2d(8d + 2)).$$

Заметим, что $|UuU^{-1}|_S \leq |UuU^{-1}|_{\{X, Y\}}$, $|UvU^{-1}|_S \leq |UvU^{-1}|_{\{X, Y\}}$, поскольку $\{X, Y\} \subseteq S$.

В качестве L можно взять число $2n^2(n-1) + 300n^2(8d + 2d(8d + 2)) < (57n)^3$. Лемма 4 доказана.

Предположим, что G является группой с заданным конечным множеством образующих S , а T – некоторое подмножество в G . Глубиной $depth_S(T)$ подмножества T относительно S называется число

$$depth_S(T) = \max_{t \in T} |t|_S.$$

Следующая лемма доказана в работе [18].

Лемма 5 8(см.: лемма А.4 [18]). Пусть G – группа, H – подгруппа группы G , S и T конечные порождающие множества групп G и H , соответственно. Тогда имеет место неравенство

$$\alpha(G, S) \geq \frac{\alpha(H, T)}{\sqrt{|T| \cdot \text{depth}_S(T)}},$$

где через $|T|$ обозначено количество элементов множества T .

Нам понадобится также следующая лемма, немедленно вытекающая из определения константы $\alpha(G, S)$.

Лемма 69. Пусть G – конечно порожденная группа с множеством порождающих S , $\pi : G \rightarrow G'$ – изоморфизм групп, $S' = \pi(S)$. Тогда

$$\alpha(G, S) = \alpha(G', S').$$

3. Доказательство теоремы 1

В силу теореме 1 работы [17] автора, для любого нечетного $n \geq 1003$ и конечного m группа $B(m, n)$ изоморфно вкладывается в любую нециклическую подгруппу группы $B(2, n)$. Поэтому теорему 1 достаточно доказать в случае $m = 2$.

Чтобы доказать теорему 1, предположим, что S есть произвольное конечное множество порождающих элементов нециклической подгруппы G группы $B(2, n)$. По лемме 4, существуют элементы $u, v \in G$ – такие, что $\{u, v\}$ есть базис свободной бернсайдовой подгруппы $\langle u, v \rangle_{B(2, n)} \simeq B(2, n)$ ранга 2, а длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$, где число $L < (57n)^3$ не зависит от выбора множества S порождающих элементов группы G . В силу леммы 5, число $\alpha(G, S)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\alpha(G, S) \geq \frac{\alpha(\langle u, v \rangle_{B(2, n)}, \{u, v\})}{\sqrt{|\{u, v\}| \cdot \text{depth}_S(\{u, v\})}}.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\alpha(G, S) > \frac{\alpha(\langle u, v \rangle_{B(2, n)}, \{u, v\})}{\sqrt{2L}}.$$

В силу леммы 6, число $\beta = \alpha(\langle u, v \rangle_{B(2, n)}, \{u, v\})$ не зависит от выбора пары свободных порождающих u, v . Поскольку по теореме С.И. Адяна (теорема 5 работы [6]), группа $B(2, n)$ – неаменабельная, то $\beta > 0$. Таким образом, для

любого множества порождающих S нециклической подгруппы G имеем $\alpha(G, S) > \frac{\beta}{\sqrt{2L}} > 0$, из чего следует неравенство

$$\alpha(G) = \inf_s (\alpha(G, S)) \geq \frac{\beta}{\sqrt{2L}} > 0.$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arzhantseva G.N., Burillo J., Lustig M., Reeves L., Short H., Ventura E.* Uniform non-amenability. *Adv. Math.* **197**:2 (2005). СС. 499–522.
2. *Følner E.* On groups with full Banach mean value, *Math. Scand.* **3** (1955). PP. 243–254.
3. *Namioka I.* Folner's condition for amenable semi-group. *Math. Scand.* **15** (1964). PP. 18–28.
4. *P. de la Harpe, Valette A.* La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, *Astérisque* **175**, (1989).
5. *J. von Neumann.* Zur allgemeinen theorie der massen, *Fundam. Math.* **13** (1929). СС.73–116.
6. *Адян С.И.* Случайные блуждания на свободных периодических группах. Изв. АН СССР. Сер. матем. **46**:6 (1982). СС. 1139–1149.
7. *Kesten H.* Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **2** (1959). PP. 336–354.
8. *Адян С.И.* Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы. УМН. **65**:5 (395), (2010). СС. 5–60.
9. *Ольшанский А.Ю.* К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе. УМН. **35**:4 (214), (1980). СС. 199–200.
10. *Osin D.V.* Weakly amenable groups. *Computational and statistical group theory.* Las Vegas, NV/Нoboken, NJ (2001). PP. 105–113.
11. *Атабекян В.С.* Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода. Матем. Заметки. **85**:4 (2009). СС. 516–523.
12. *Атабекян В.С.* О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп. Матем. Заметки. **86**:4 (2009). СС. 483–490.
13. *Hulanicki A.* Means and Følner condition on locally compact groups. *Studia Math.* **27** (1966). PP. 87–104.
14. *Osin D.V.* Uniform non-amenability of free Burnside groups. *Arch. Math.* **88**:5 (2007). 403–412.
15. *Адян С.И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
16. *Адян С.И., Лысенко И.Г.* О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические. Изв. АН СССР. Сер. матем., **55**:5 (1991). СС. 933–990.

17. Атабекян В.С. О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$. Изв. РАН. Сер. матем., **73:5** (2009). СС. 3–36.
18. Ershov M. Kazhdan quotients of Golod–Shafarevich groups. Proceedings of the London Mathematical Society, **102:4** (2011). PP. 599–636.

STRICTLY UNIFORM NON-AMENABILITY OF FREE PERIODIC GROUPS

V.S. Atabekyan

A famous theorem of Adyan states that, for any $m > 1$ and any odd $n \geq 665$, the free m -generated Burnside group of period n is not amenable. More strong form of nonamenability is the uniform non-amenability. We prove that every non-cyclic subgroup of the free Burnside group $B(m, n)$ of odd period $n \geq 1003$ is a strictly uniformly non-amenable group.

УДК 519.17

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ РАСКРАСКАХ МУЛЬТИГРАФОВ

П.А. Петросян

*Ереванский Государственный Университет,
Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА*

Интервальной t -раскраской мультиграфа G назовем раскраску ребер G в цвета $1, 2, \dots, t$, при которой в каждый цвет i , $1 \leq i \leq t$, окрашено хотя бы одно ребро мультиграфа G , и ребра, инцидентные каждой вершине, окрашены в последовательные цвета. Доказано, что если 2-связный мультиграф G имеет интервальную t -раскраску, то $t \leq 1 + \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil (\Delta(G) - 1)$, где $V(G)$ – множество вершин

G , а $\Delta(G)$ – максимальная из степеней вершин G . Показано, что полученная оценка неумлучшаема.

Доказана справедливость гипотезы М. Аксенович для 2-связных планарных мультиграфов G с $\Delta(G) \leq 4$.

Доказано, что если кубический мультиграф (граф) G имеет интервальную t -раскраску, то $t \leq |V(G)| + 1$ ($t \leq |V(G)|$), причем во множестве кубических графов интервальная $|V(G)|$ -раскраска существует только для K_4 .

Показано, что любой двудольный мультиграф G с $\Delta(G) = 3$ имеет интервальную 3- или 4-раскраску.

Ключевые слова: мультиграф, кубический граф, реберная раскраска, интервальная раскраска

1. Обозначения, определения, цель работы

Пусть G – неориентированный мультиграф, $V(G)$ – множество вершин мультиграфа G , $E(G)$ – множество ребер мультиграфа G . Для двух различных

вершин u и v мультиграфа G через $E(uv)$ обозначим множество ребер мультиграфа, инцидентных вершинам u и v , а через $\mu(uv)$ – мощность множества $E(uv)$. Степень вершины v в G обозначим через $d_G(v)$, максимальную из степеней вершин – через $\Delta(G)$, а хроматический класс G – через $\chi'(G)$. Не определяемые понятия и обозначения можно найти в [6].

Интервальной t -раскраской мультиграфа G назовем раскраску ребер G в цвета $1, 2, \dots, t$, при которой в каждый цвет i , $1 \leq i \leq t$, окрашено хотя бы одно ребро мультиграфа G , и ребра, инцидентные каждой вершине $v \in V(G)$, окрашены в $d_G(v)$ последовательных цветов. Мультиграф G назовем интервально окрашиваемым, если существует $t \geq 1$, для которого G имеет интервальную t -раскраску. Множество всех интервально окрашиваемых мультиграфов обозначим через \mathfrak{N} . Для $G \in \mathfrak{N}$ обозначим через $w(G)$ и $W(G)$, соответственно, наименьшее и наибольшее t , для которого G имеет интервальную t -раскраску.

Определение интервальной реберной раскраски мультиграфа было введено в [1]. В работе [1] А.С. Асратяном и Р.Р. Камаляном были получены следующие результаты:

Теорема 1. Если $G \in \mathfrak{N}$, то $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Теорема 2. Пусть G регулярный мультиграф. Тогда:

1. $G \in \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\chi'(G) = \Delta(G)$;

2. если $G \in \mathfrak{N}$ и $\Delta(G) \leq t \leq W(G)$, то мультиграф G имеет интервальную t -раскраску.

Некоторые результаты по интервальным реберным раскраскам мультиграфов были установлены в [3].

Целью настоящей работы является исследование параметров $w(G)$ и $W(G)$ для интервально окрашиваемого мультиграфа G .

2. Основные результаты

Теорема 3. Если G 2-связный мультиграф и $G \in \mathfrak{N}$, то

$$W(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil (\Delta(G) - 1).$$

Доказательство. Рассмотрим интервальную $W(G)$ -раскраску α мультиграфа G . Пусть $\alpha(e) = 1$, $\alpha(e') = W(G)$, где $e = uv$, а $e' = u'v'$. Так как мультиграф G является 2-связным, то существует простой цикл C , содержащий реб-

ра e и e' . Теперь рассмотрим простой цикл C . Пронумеруем вершины цикла C в направлении от u к u' и от v к v' : $u = u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s = u'$ и

$v = v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, v_t = v'$, где $s, t \geq 1$. Легко видеть, что $\min\{s, t\} \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil$.

Предположим для определенности, что $s \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil$. Ясно, что в этом случае

$$\begin{aligned} \alpha(u_1 u_2) &\leq d_G(u_1), \\ \alpha(u_2 u_3) &\leq \alpha(u_1 u_2) + d_G(u_2) - 1, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha(u_i u_{i+1}) &\leq \alpha(u_{i-1} u_i) + d_G(u_i) - 1, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha(u_{s-1} u_s) &\leq \alpha(u_{s-2} u_{s-1}) + d_G(u_{s-1}) - 1, \\ W(G) = \alpha(e') &= \alpha(u'v') \leq \alpha(u_{s-1} u_s) + d_G(u_s) - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^s (d_G(u_i) - 1) \leq 1 + \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil (\Delta(G) - 1).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 1. Если G 2-связный мультиграф с $\Delta(G) = 4$, и $G \in \mathfrak{N}$, то

$$W(G) \leq 3 \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil + 1.$$

Из данного следствия вытекает справедливость гипотезы Аксенович [2] для интервально окрашиваемых 2-связных планарных мультиграфов с максимальной степенью не более 4.

Заметим, что если G связный кубический мультиграф и $G \in \mathfrak{N}$, то, по теореме 1, $\chi'(G) = 3$ и, следовательно, G – 2-связный мультиграф.

Следствие 2. Если G связный кубический мультиграф и $G \in \mathfrak{N}$, то

$$W(G) \leq |V(G)| + 1.$$

Теперь покажем, что верхняя оценка теоремы 3 достижима. Имеет место следующая

Теорема 4. Для любых $n, r \geq 2$ существует 2-связный мультиграф G с $|V(G)| = 2n$ и $\Delta(G) = r$ такой, что $G \in \mathfrak{N}$ и $W(G) = n(r-1) + 1$.

Доказательство. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно построить мультиграф G , удовлетворяющий условию теоремы.

Определим мультиграф $G_{n,r}$ следующим образом:

$$V(G_{n,r}) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ и}$$

$$E(G_{n,r}) = \{u_1 v_1, u_n v_n \mid \mu(u_1 v_1) = \mu(u_n v_n) = r-1\} \cup \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i \mid \mu(u_i v_i) = r-2, 2 \leq i \leq n-1\}, \quad n, r \geq 2.$$

Ясно, что $G_{n,r}$ 2-связный мультиграф с $|V(G_{n,r})| = 2n$ и $\Delta(G_{n,r}) = r$.

Покажем, что мультиграф $G_{n,r}$ имеет интервальную $(n(r-1)+1)$ -раскраску. Для этого определим раскраску α ребер мультиграфа $G_{n,r}$ следующим образом: окрасим сначала ребра из множества $E(u_1 v_1)$ в цвета $1, 2, \dots, r-1$, а ребра из множества $E(u_n v_n)$ – в цвета $(n-1)(r-1)+2, \dots, n(r-1)+1$. Затем окрасим ребра из множества $E(u_i v_i)$ в цвета $(i-1)(r-1)+2, \dots, i(r-1)$, $2 \leq i \leq n-1$, а ребра $u_j u_{j+1}$ и $v_j v_{j+1}$ окрасим в цвет $j(r-1)+1$, $1 \leq j \leq n-1$. Нетрудно проверить, что α является интервальной $(n(r-1)+1)$ -раскраской мультиграфа $G_{n,r}$.

Теорема 4 доказана.

Теперь покажем, что если G – связный кубический граф и $G \in \mathfrak{N}$, то $W(G) \leq |V(G)|$.

Теорема 5. Пусть G – связный кубический граф и $G \in \mathfrak{N}$. Тогда $W(G) \leq |V(G)|$. Кроме того, если $G \neq K_4$, то $W(G) \leq |V(G)| - 1$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что из следствия 2 вытекает, что $W(G) \leq |V(G)| + 1$ для интервально окрашиваемого связного кубического графа G .

Покажем, что $W(G) \leq |V(G)|$.

Пусть α является интервальной $(|V(G)|+1)$ -раскраской кубического графа G . Пусть, далее, $\alpha(e) = 1$, $\alpha(e') = |V(G)|+1$, где $e = uv$, а $e' = u'v'$. Так как G связный кубический граф и $G \in \mathfrak{N}$, то G является 2-связным и, следовательно, существует простой цикл C , содержащий ребра e и e' . Рассмотрим простой цикл C . Пронумеруем вершины цикла C в направлении от u к u' и от

v к v' : $u = u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s = u'$ и $v = v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, v_t = v'$, где $s, t \geq 1$. Легко видеть, что в этом случае $s = t = \frac{|V(G)|}{2}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \alpha(u_1 u_2) &= \alpha(v_1 v_2) = 3, \\ \alpha(u_2 u_3) &= \alpha(v_2 v_3) = 5, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_i u_{i+1}) &= \alpha(v_i v_{i+1}) = 2i + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha(u_{s-1} u_s) &= \alpha(v_{t-1} v_t) = 2s - 1 = 2t - 1, \\ W(G) = \alpha(e') &= \alpha(u'v') = 2s + 1 = 2t + 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $i = 1, 2, \dots, \frac{|V(G)|}{2}$ $u_i v_i \in E(G)$ и $\alpha(u_i v_i) = 2i$, что приводит к противоречию $1 = \alpha(uv) = \alpha(e) = \alpha(u_1 v_1) = 2$.

Ясно, что $K_4 \in \mathfrak{N}$ и $W(K_4) = |V(K_4)| = 4$. Теперь покажем, что если G связный кубический граф, $G \neq K_4$, и $G \in \mathfrak{N}$, то $W(G) \leq |V(G)| - 1$.

Пусть теперь $|V(G)| \geq 6$ и β является интервальной $|V(G)|$ -раскраской кубического графа G . Пусть, далее, $\beta(e) = 1$, $\beta(e') = |V(G)|$, где $e = uv$, а $e' = u'v'$. Так как G – связный кубический граф и $G \in \mathfrak{N}$, то G является 2-связным и, следовательно, существует простой цикл C , содержащий ребра e и e' . Рассмотрим простой цикл C . Пронумеруем вершины цикла C в направлении от u к u' и от v к v' : $u = u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, u_s = u'$ и $v = v_1, v_2, \dots, v_{t-1}, v_t = v'$, где $s, t \geq 1$. Легко видеть, что в этом случае $s = t = \frac{|V(G)|}{2}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\beta(u_1 u_2) = \beta(v_1 v_2)$.

Если $\beta(u_1 u_2) = \beta(v_1 v_2) = 2$, то $\beta(u_1 v_2) = \beta(v_1 u_2) = 3$ и

$$\begin{aligned} \beta(u_2 u_3) &= \beta(v_2 v_3) = 4, \\ \beta(u_3 u_4) &= \beta(v_3 v_4) = 6, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\beta(u_i u_{i+1}) = \beta(v_i v_{i+1}) = 2i,$$

.....

$$\beta(u_{s-1} u_s) = \beta(v_{t-1} v_t) = 2s - 2 = 2t - 2,$$

$$W(G) = \beta(e') = \beta(u'v') = 2s = 2t.$$

Отсюда следует, что для $i = 3, \dots, \frac{|V(G)|}{2}$ $u_i v_i \in E(G)$ и $\beta(u_i v_i) = 2i - 1$,

что приводит к противоречию $|V(G)| = \beta(u'v') = \beta(e') = \beta(u_s v_t) = |V(G)| - 1$.

Аналогично рассматривается случай $\beta(u_1 u_2) = \beta(v_1 v_2) = 3$.

Случай 2. $\beta(u_1 u_2) \neq \beta(v_1 v_2)$.

Если $\beta(u_1 u_2) = 2$ и $\beta(v_1 v_2) = 3$, то

$$\beta(u_2 u_3) = 4,$$

$$\beta(u_3 u_4) = 6,$$

.....

$$\beta(u_i u_{i+1}) = 2i,$$

.....

$$\beta(u_{s-1} u_s) = 2s - 2 = 2t - 2,$$

$$|V(G)| = \beta(e') = \beta(u'v') = 2s = 2t.$$

Отсюда следует, что существует ребро $u_1 v_{j_0} \in E(G)$, где $3 \leq j_0 \leq t$, и $\beta(u_1 v_{j_0}) = 3$. Теперь рассмотрим простую цепь

$$P = (v_1, v_1 u_1, u_1, u_1 v_{j_0}, v_{j_0}, v_{j_0} v_{j_0+1}, v_{j_0+1}, \dots, v_t, v_t u_s, u_s).$$

Ясно, что длина цепи P меньше, чем $\frac{|V(G)|}{2} - 1$, откуда следует, что

$$|V(G)| = \beta(u'v') = \beta(e') = \beta(u_s v_t) \leq 2 \left(\frac{|V(G)|}{2} - 1 \right) + 1 = |V(G)| - 1,$$

что является противоречием.

Аналогично рассматривается случай $\beta(u_1 u_2) = 3$ и $\beta(v_1 v_2) = 2$.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Для любого $n \geq 3$ существует связный кубический граф G с $|V(G)| = 2n$ такой, что $G \in \mathfrak{N}$ и $W(G) = |V(G)| - 1$.

Доказательство. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно построить кубический граф G , удовлетворяющий условию теоремы. Определим граф G_n . Положим $G_3 = K_{3,3}$. Пусть, теперь $n \geq 4$. Определим граф G_n следующим образом:

$$V(G_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ и}$$

$$E(G_n) = \{u_1 v_1, u_1 v_2, v_1 u_2, u_{n-1} v_n, u_n v_{n-1}, u_n v_n\} \cup \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i \mid 3 \leq i \leq n-2\}.$$

Ясно, что G_n связный кубический граф с $|V(G_n)| = 2n$.

Покажем, что G_n имеет интервальную $(2n-1)$ -раскраску. Прежде всего заметим, что $K_{3,3} \in \mathfrak{N}$ и $W(K_{3,3}) = 5$, откуда следует, что граф G_3 имеет интервальную 5-раскраску. Пусть, теперь $n \geq 4$. Определим раскраску α ребер графа G_n следующим образом: окрасим сначала ребро $u_1 v_1$ в цвет 1, ребра $u_1 v_2, v_1 u_2$ в цвет 3, ребра $u_{n-1} v_n, u_n v_{n-1}$ в цвет $2n-3$, а ребро $u_n v_n$ – в цвет $2n-1$. Затем окрасим ребро $u_i v_i$ в цвет $2i-1$, $3 \leq i \leq n-2$, а ребра $u_j u_{j+1}$ и $v_j v_{j+1}$ окрасим в цвет $2j$, $1 \leq j \leq n-1$. Нетрудно проверить, что α является интервальной $(2n-1)$ -раскраской графа G_n .

Теорема 6 доказана.

Из теорем 2 и 6 вытекает следующее:

Следствие 3. Для любого $n \geq 3$ существует связный кубический граф G с $|V(G)| = 2n$ такой, что

1. $G \in \mathfrak{N}$,
2. $w(G) = 3$,
3. $W(G) = 2n - 1$,
4. если $w(G) \leq t \leq W(G)$, то G имеет интервальную t -раскраску.

Отметим, однако, что существуют кубические графы $G \in \mathfrak{N}$, у которых значение параметра $W(G)$ близко к $\frac{|V(G)|}{2}$. Так, например, в работе [5] было показано, что для «лестниц Мебиуса» M_{2n} ($n \geq 2$) с $2n$ вершинами справедлива следующая

Теорема 7. При $n \geq 2$

1. $M_{2n} \in \mathfrak{N}$,
2. $w(M_{2n}) = 3$,
3. $W(M_{2n}) = n + 2$,
4. Если $w(M_{2n}) \leq t \leq W(M_{2n})$, то M_{2n} имеет интервальную t -раскраску.

В заключение рассмотрим двудольные мультиграфы. В работе [4] была доказана следующая

Теорема 8. Если G двудольный граф с $\Delta(G) \leq 3$, то $G \in \mathfrak{N}$ и $w(G) \leq 4$.

Покажем, что теорема 8 справедлива также для произвольного двудольного мультиграфа G с $\Delta(G) \leq 3$.

Теорема 9. Если G двудольный мультиграф с $\Delta(G) \leq 3$, то $G \in \mathfrak{N}$ и $w(G) \leq 4$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\Delta(G) \leq 2$, то $G \in \mathfrak{N}$ и $w(G) \leq 2$.

Теперь предположим, что $\Delta(G) = 3$. Индукцией по $|E(G)|$ покажем, что двудольный мультиграф G имеет интервальную 3- или 4-раскраску.

При $|E(G)| \leq 4$ доказываемое очевидно. Пусть теперь $|E(G)| \geq 5$, и утверждение верно для всех мультиграфов G' с $|E(G')| < |E(G)|$. Докажем, что утверждение верно для мультиграфа G . Если G не имеет кратных ребер, то утверждение вытекает из теоремы 8. Пусть теперь $uv \in E(G)$ и $\mu(uv) \geq 2$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1. $\mu(uv) = |\{e_1, e_2, e_3\}| = 3$.

Положим, $G' = G - E(uv)$. Из индуктивного предположения вытекает, что существует интервальная 3- или 4-раскраска α мультиграфа G' . Теперь окрасим ребро e_i в цвет i , $i = 1, 2, 3$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Случай 2. $\mu(uv) = |\{e_1, e_2\}| = d_G(u) = d_G(v) = 2$.

Положим, $G' = G - E(uv)$. Из индуктивного предположения вытекает, что существует интервальная 3- или 4-раскраска α мультиграфа G' . Теперь окрасим ребро e_i в цвет i , $i = 1, 2$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Случай 3. $\mu(uv) = |\{e_1, e_2\}| = d_G(v) = 2$ и $d_G(u) = \Delta(G) = 3$.

Ясно, что в этом случае в мультиграфе G существует мост $uw \in E(G)$. Положим, $G' = G - E(uv)$. Из индуктивного предположения вытекает, что существует интервальная 3- или 4-раскраска α мультиграфа G' .

Случай 3.1. $\alpha(uw) \leq 2$.

Окрасим ребро e_i в цвет $\alpha(uw) + i$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Случай 3.2. $\alpha(uw) \geq 3$.

Окрасим ребро e_i в цвет $\alpha(uw) - i$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Случай 4. $\mu(uv) = |\{e_1, e_2\}| = 2$ и $d_G(u) = d_G(v) = \Delta(G) = 3$.

Ясно, что в этом случае в мультиграфе G существуют вершины $x, y \in V(G)$ ($x \neq y$) такие, что $ux \in E(G)$ и $vy \in E(G)$. Положим $G' = (G - E(uv) - ux - vy) + xy$. Из индуктивного предположения вытекает, что существует интервальная 3- или 4-раскраска α мультиграфа G' .

Случай 4.1. $\alpha(xy) \leq 2$.

Удалим ребро xy из G' и окрасим ребра ux и vy в цвет $\alpha(xy)$, а ребро e_i окрасим в цвет $\alpha(xy) + i$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Случай 4.2. $\alpha(xy) \geq 3$.

Удалим ребро xy из G' и окрасим ребра ux и vy в цвет $\alpha(xy)$, а ребро e_i окрасим в цвет $\alpha(xy) - i$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что полученная раскраска является интервальной 3- или 4-раскраской мультиграфа G .

Теорема 9 доказана.

Автор благодарен О. Тананяну и В. Мкртчяну за полезные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асратян А.С., Камалян Р.Р. Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика. Ер., Изд-во ЕГУ, 1987. Вып. 5. СС. 25–34.
2. Axenovich M.A. On interval colorings of planar graphs // Congr. Numer. 159, 2002. PP. 77–94.
3. Камалян Р.Р. Интервальные реберные раскраски графов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1990, 103 с.
4. Hansen H.M. Scheduling with minimum waiting periods // Master's Thesis, Odense University, Odense, Denmark, 1992.

5. *Petrosyan P.A.* Interval edge colorings of Möbius ladders // Proceedings of the CSIT Conference. Yerevan, 2005, pp. 146–149.
6. *West D.B.* Introduction to Graph Theory – Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

ON INTERVAL EDGE-COLORINGS OF MULTIGRAPHS

P.A. Petrosyan

An edge-coloring of a multigraph G with colors $1, 2, \dots, t$ is called an interval t -coloring if for each i , $1 \leq i \leq t$, there is at least one edge of G colored by i , and the colors of edges incident to any vertex of G are distinct and form an interval of integers. It's proved that if a 2-connected multigraph G admits an interval t -coloring, then $t \leq 1 + \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil (\Delta(G) - 1)$, where $V(G)$ is the set of vertices of G and $\Delta(G)$ is the maximum degree of a vertex of G . It's shown that this upper bound is sharp. This result implies that Axenovich's conjecture on 2-connected planar multigraphs G with $\Delta(G) \leq 4$ is true. For some classes of cubic and subcubic multigraphs and graphs having an interval t -coloring upper bounds for t are obtained.

ՄՈՒԼՏԻԳՐԱՖՆԵՐԻ ՄԻՋԱԿԱՅՔԱՅԻՆ ԿՈՂԱՅԻՆ ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Պ.Ս. Պետրոսյան

G մուլտիգրաֆի կողային ներկումը $1, 2, \dots, t$ գույներով կոչվում է միջակայքային t -ներկում, եթե ամեն մի i , $1 \leq i \leq t$, գույնով ներկված է առնվազն մեկ կող և յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են տարբեր և հաջորդական գույներով: Ապացուցված է, որ եթե 2-կապակցված G մուլտիգրաֆն ունի միջակայքային t -ներկում, ապա $t \leq 1 + \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil (\Delta(G) - 1)$, որտեղ $V(G)$ -ն G -ի գագաթների բազմությունն է, իսկ $\Delta(G)$ -ն՝ գագաթների առավելագույն աստիճանը: Ցույց է տրված ստացված գնահատականի հասանելիությունը: Ապացուցված է Մ. Աքսենովիչի հիպոթեզի ճշտությունը $\Delta(G) \leq 4$ պայմանին բավարարող 2-կապակցված հարթ G մուլտիգրաֆների համար: Ստացված են միջակայքային t -ներկում ունեցող որոշ դասերի խորանարդային և ենթախորանարդային մուլտիգրաֆների և գրաֆների համար t -ի վերին գնահատականներ:

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В (h, φ) -ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ЗАДАЧАХ

К. Петросян

*Государственный Университет Бухареста,
Бухарест, Румыния*

В статье приведены определения функций типа $(h, \varphi) - (F, a, p, d)$ I, которые использованы для получения достаточных условий оптимальности в дифференцируемых многообъектных задачах, использующих обобщенные алгебраические операции Бен-Тала. В статье приведено одно условие достаточности оптимальности Каруш-Кун-Таккера, которое является основой для еще нескольких результатов достаточности оптимальности и для теорем дуальностей решений в для парето слабых решений.

Ключевые Слова. Обобщенные алгебраические операции Бен-Тала, функции $(h, \varphi) - (F, a, p, d)$ типа I, условие достаточности Каруш-Кун-Таккера, слабые решения парето.

1. ВВЕДЕНИЕ

В литературе [1–2] определены некоторые обобщенные алгебраические операции сложения и умножения скалярных и векторных величин. С помощью этих операторов приведено новое обобщение выпуклости функций, называемых (h, φ) – выпуклостью [1]. Там же дано понятие (h, φ) – дифференцируемости. Хю и Лю [3] получили необходимые условия Кун-Таккера для оптимальности в задачах многообъектной оптимизации, где все функции (h, φ) дифференцируемы.

Пусть n -мерное евклидово пространство, а R и R_+ , соответственно, множество всех реальных и множество неотрицательных реальных чисел.

Приведем определения обобщенных операций сложения и умножения Бен-Тала [3]:

1) Пусть h – векторная непрерывная функция, определенная на R^n и со значениями из R^n . Пусть, существует обратная функция h^{-1} . Определим сложение векторов $x, y \in R^n$ относительно функции h следующим образом:

$$x \oplus y = h^{-1}(h(x) + h(y))$$

и умножение вектора $x \in R^n$ скалярным значением $a \in R$ относительно функции h следующим образом:

$$a \otimes x = h^{-1}(ah(x))$$

2) Пусть, φ – реальная функция, определенная на R , для которой существует обратная функция φ^{-1} . Тогда сложение двух реальных чисел $a \in R$ и $\beta \in R$ относительно функции φ определим как:

$$a[+] \beta = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(\beta))$$

а умножение скалярных значений $a \in R$ и $\beta \in R$ относительно функции φ как:

$$\beta[\cdot] a = \varphi^{-1}(\beta\varphi(a))$$

Обозначим:

$$\bigoplus_{i=1}^m x^i = x^1 \oplus x^2 \oplus \dots \oplus x^m, \quad x^i \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] a^i = a_1[+]a_2[+] \dots [+] a_m, \quad a_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$a[-] \beta = a[+][(-1)[\cdot] \beta], \quad a, \beta \in R.$$

Выше приведенны обобщенные алгебраические операции Бен-Тала. Отметим, что $\beta[\cdot] a$ может не совпадать с $a[\cdot] \beta$ для любых $a, \beta \in R$. Легко убедиться, что $1 \otimes x = x$ для $\forall x \in R^n$ и $1[\cdot] a = a$ для $\forall a \in R$.

Пусть, $a, \beta \in R$ и $x \in R^n$. Тогда можно доказать следующие уравнения:

$$\varphi(a[\cdot] \beta) = a\varphi(\beta), \quad h(a \otimes x) = ah(x).$$

$$a[-] \beta = \varphi^{-1}(\varphi(a) - \varphi(\beta)).$$

Определение 1.1. Пусть, X – непустое подмножество пространства R^n . Функционал $F : X \times X \times R^n \rightarrow R$ будем называть (h, φ) – сублинейным, если для любых $x, \bar{x} \in X$,

$$F(x, \bar{x}, a_1 \oplus a_2) \leq F(x, \bar{x}, a_1)[+] F(x, \bar{x}, a_2), \quad \forall a_1, a_2 \in R^n,$$

$$F(x, \bar{x}, a \oplus a) \leq a[\cdot] F(x, \bar{x}, a) \quad \forall a \in R^n, \quad a \geq 0, \quad \forall a \in R^n.$$

Из вышеприведенного определения легко доказать, что если $F(h, \varphi)$ сублинейна, то имеет место следующее неравенство:

$$F\left(x, \bar{x}, \bigoplus_{i=1}^m a_i\right) \leq \left[\sum_{i=1}^m \right] F\left(x, \bar{x}, a^i\right), \quad a_i \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

Некоторые свойства обобщенных алгебраических операций Бен-Тала приведены в [3].

Лемма 1.1. Пусть, f – реальная функция, определенная на R^n и (h, φ) – дифференцируемая в точке $\bar{x} \in R^n$. Тогда удовлетворены следующие условия:

(а) Пусть $x^i \in R^n$, $\lambda_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$ Тогда

$$\bigoplus_{i=1}^m (\lambda_i \otimes x^i) = h^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i h(x^i) \right), \quad \bigoplus_{i=1}^m x^i = h^{-1} \left(\sum_{i=1}^m h(x^i) \right).$$

(б) Пусть, $\mu_i, a_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] (\mu_i [\cdot] a_i) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \varphi(a_i) \right), \quad \left[\sum_{i=1}^m \right] a_i = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \varphi(a_i) \right).$$

(с) Для любого $a \in R$ функция $a[\cdot]f(h, \varphi)$ дифференцируема в точке \bar{x} и $\nabla^* (a[\cdot]f(\bar{x})) = a \otimes \nabla^* f(\bar{x})$.

Лемма 1.2. Пусть, $i = 1, 2, \dots, m$. Имеют место следующие утверждения:

(а) Для $a, \beta, \gamma \in R$ справедливо $a[\cdot](\beta[\cdot]\gamma) = \beta[\cdot](a[\cdot]\gamma) = (a\beta)[\cdot]\gamma$.

(б) Для $\beta, a_i \in R$ справедливо

$$\beta[\cdot] \left[\sum_{i=1}^m \right] a_i = \left[\sum_{i=1}^m \right] (\beta[\cdot] a_i).$$

(с) Для $a, \beta, \gamma \in R$ справедливо $\gamma[\cdot](a[-]\beta) = (\gamma[\cdot]a)[-](\gamma[\cdot]\beta)$

(д) Для $a_i, \beta_i \in R$ справедливо

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] (a_i [-] \beta_i) = \left[\sum_{i=1}^m \right] a_i [-] \left[\sum_{i=1}^m \right] \beta_i,$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] a_i (a_i [+] \beta_i) = \left[\sum_{i=1}^m \right] a_i [+] \left[\sum_{i=1}^m \right] \beta_i.$$

Лемма 1.3. Пусть функция φ обобщенный алгебраических операций Бен-Тала строго монотонна и $\varphi(0) = 0$. Тогда следующие условия удовлетворены:

- (a) Если $\gamma \geq 0$, $\gamma, a, \beta \in R$, и $a \leq \beta$, тогда $\gamma[\cdot]a \leq \gamma[\cdot]\beta$.
- (b) Если $\gamma \geq 0$, $\gamma, a, \beta \in R$, и $a < \beta$, тогда $\gamma[\cdot]a \leq \gamma[\cdot]\beta$.
- (c) Если $\gamma > 0$, $\gamma, a, \beta \in R$ и $a < \beta$, тогда $\gamma[\cdot]a < \gamma[\cdot]\beta$.
- (d) Если $\gamma < 0$, $\gamma, a, \beta \in R$ и $a \geq \beta$, тогда $\gamma[\cdot]a \leq \gamma[\cdot]\beta$.
- (e) Если $a_i, \beta_i \in R$, $i \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $a_i \leq \beta_i$ для любой $i \in M$, тогда

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] a_i \leq \left[\sum_{i=1}^m \right] b_i \quad (2)$$

Если $a_i \leq \beta_i$ для любой $i \in M$ и существует хотя бы один $k \in M$, для которого $a_k < \beta_k$, то

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] a_i < \left[\sum_{i=1}^m \right] b_i. \quad (3)$$

Лемма 1.4. Пусть, φ – непрерывная, монотонная функция и $\varphi(0) = 0$. Пусть, $a, \beta \in R$. Тогда

$$a < \beta \Leftrightarrow a[-]\beta < 0, \quad (4)$$

$$a \leq \beta \Leftrightarrow a[-]\beta \leq 0, \quad (5)$$

$$a[+]\beta < 0 \Rightarrow a < (-1)[\cdot]\beta, \quad (6)$$

$$a[+]\beta \leq 0 \Rightarrow a \leq (-1)[\cdot]\beta. \quad (7)$$

Далее, в этой статье мы будем предполагать, что функция h непрерывна, имеет обратную функцию и $h(0) = 0$. Функцию φ будем предполагать непрерывной, строго монотонной с $\varphi(0) = 0$. При этих условиях нетрудно доказать, что $0[\cdot]a = a[\cdot]0$ для любой $a \in R$.

Пусть, X – непустое подмножество пространства R^n , $F : X \times X \times R^n \rightarrow R(h, \varphi)$ -сублинейная функция, а $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : X \rightarrow R^m$ и $g = (g_1, g_2, \dots, g_p) : X \rightarrow R^p(h, \varphi)$ дифференцируемые на множестве X относительно одной и той же пары (h, φ) . Пусть, $\rho = (\rho^1, \rho^2)$, где $\rho^1 = (\rho_1^1, \rho_2^1, \dots, \rho_m^1) \in R^m$, $\rho^2 = (\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_p^2) \in R^p$. Пусть $a = (a^1, a^2)$, где $a^1 : X \times X \rightarrow R_+ \setminus \{0\}$, $a^2 : X \times X \rightarrow R_+ \setminus \{0\}$ и $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow R$.

Рассмотрим следующую многообъектную задачу:

$(MOP)_{h,\varphi} \min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), x \in X \rightarrow R$ так, что $g(x) \leq 0$.

Обозначим через F множество всех допустимых решений задачи $(MOP)_{h,\varphi}$.

$$F = \{x \in X : g(x) \leq 0\}.$$

Допустим, что F – непустое множество и обозначим: $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $P = \{1, 2, \dots, p\}$

Для допустимого решения $\bar{x} \in F$ обозначим $J(\bar{x}) = \{j \in P : g_j(\bar{x}) = 0\}$.

Будем искать слабые решения парето для проблемы $(MOP)_{h,\varphi}$. Понятие слабого решения парето широко используется в методах оптимального управления и определено в [12].

Определение 2.2. Точка \bar{x} называется слабым решением парето или слабым минимумом для проблемы $(MOP)_{h,\varphi}$, если $\bar{x} \in F$ и $f(x) \not\prec f(\bar{x})$ для всех $x \in F$.

Определение 2.3. Пусть $i \in M$. Скажем, что (f_i, g) является (h, φ) – (F, a, ρ, d) -типа I в точке $\bar{x} \in X$, если для всех $x \in F$ выполняются условия:

$$f_i(x) [-] f_i(\bar{x}) \geq F(x, \bar{x}, a^1(x, \bar{x}) \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})) [+](\rho_i^1[\cdot] d^2(x, \bar{x})), i \in M, \quad (8)$$

$$(-1)[\cdot] g_j(\bar{x}) \geq F(x, \bar{x}, a^2(x, \bar{x}) \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})) [+](\rho_i^2[\cdot] d^2(x, \bar{x})), j \in P. \quad (9)$$

Если в вышеуказанном определении $x \neq \bar{x}$ и неравенство (8) строгое, то (f_i, g) называется полустрогим (h, φ) – (F, a, ρ, d) -типа I в точке \bar{x} .

2. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Теорема 2.1. Допустим, существует допустимое решение $\bar{x} \in F$ и $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m) \in R^m$, $\bar{\lambda} \geq 0$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J(\bar{x})$ так, что:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J(\bar{x})} \mu_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}) \right) = 0, \quad (10)$$

Если $i \in M \left(f_i, g_{j(\bar{x})} \right)$, функция $(h, \varphi) - (F, a, \rho, d)$ -типа I в точке \bar{x} и

$$\begin{aligned} & \left(a^1(\cdot, \bar{x})^{-1} [\cdot] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left((\bar{\lambda}_i, \rho_i^1) [\cdot] d^2(\cdot, \bar{x}) \right) \right) [+] \\ & [+] \left(a^2(\cdot, \bar{x})^{-1} [\cdot] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\bar{\mu}_j, \rho_j^2) [\cdot] d^2(\cdot, \bar{x}) \right) \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

где $g_{j(\bar{x})} = (g_j)_{j \in J(\bar{x})}$, то \bar{x} – слабый минимум для задачи $(MOP)_{h, \varphi}$.

Доказательство: Так как (10) выполняется, то из (h, φ) -подлинейности функции F , для всех $x \in X$ получаем:

$$F \left(x, \bar{x}, \left(\bigoplus_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J(\bar{x})} (\bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})) \right) \right) = 0 \quad (12)$$

Проведем доказательство методом от противного. Допустим \bar{x} не является слабым минимумом для задачи $(MOP)_{h, \varphi}$. Тогда существует допустимое решение \hat{x} задачи $(MOP)_{h, \varphi}$, так что $f_i(\hat{x}) < f_i(\bar{x})$, $i \in M$.

Так как $\bar{\lambda} \geq 0$, значит существует хотя бы одно k так, что $\bar{\lambda}_k > 0$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$, $\forall i \in M$, $i \neq k$.

Из леммы 1.3 (а)-(с) получаем

$$\bar{\lambda}_k [\cdot] f_k(\hat{x}) < \bar{\lambda}_k [\cdot] f_k(\bar{x}), \quad \bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\hat{x}) \leq \bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\bar{x}), \quad \forall i \in M, \quad i \neq k.$$

Из леммы 1.3 (е) и (4) получаем:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^m \right] (\bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\hat{x})) < \left[\sum_{i=1}^m \right] (\bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\bar{x})), \\ & \left[\sum_{i=1}^m \right] (\bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\hat{x})) - \left[\sum_{i=1}^m \right] (\bar{\lambda}_i [\cdot] f_i(\bar{x})) < 0 \end{aligned} \quad (13).$$

Из предположения $(h, \varphi) - (F, a, \rho, d)$ -типа I для $(f_i, g_{j(\bar{x})})$ для вышеуказанного \hat{x} получим

$$f_i(\hat{x}) [-] f_i(\bar{x}) \geq F \left(\hat{x}, \bar{x}, a^1(\hat{x}, \bar{x}) \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}) \right) [+] \left(\rho_i^1 [\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right), \quad i \in M$$

$$0 = (-1)[\bullet]g_j(\bar{x}) \geq F\left(\hat{x}, \bar{x}, a^2(\hat{x}, \bar{x}) \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})\right)[+]\left(\rho_j^2[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right), \quad j \in J(\bar{x}).$$

Из (h, φ) -подлинейности F получим:

$$f_i(\hat{x})[-]f_i(\bar{x}) \geq a^1(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* f_i(\bar{x})\right)[+]\left(\rho_i^1[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)$$

$$0 \geq a^2(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* g_j(\bar{x})\right)[+]\left(\rho_j^2[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right), \quad j \in J(\bar{x})$$

Так как $\bar{\lambda}_i \geq 0$, $i \in M$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J(\bar{x})$, из **леммы 1.3** (а), имеем:

$$\bar{\lambda}_i[\bullet]\left(f_i(\hat{x})[-]f_i(\bar{x})\right) \geq \bar{\lambda}_i[\bullet]\left(a^1(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* f_i(\bar{x})\right)[+]\left(\rho_i^1[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)\right),$$

$i \in M$

$$0 \geq \bar{\mu}_j[\bullet]\left(a^2(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* g_j(\bar{x})\right)[+]\left(\rho_j^2[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)\right), \quad j \in J(\bar{x})$$

Из **леммы 1.2** (а)-(с) имеем:

$$\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\hat{x})\right)[-]\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\bar{x})\right) \geq$$

$$\geq a^1(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* f_i(\bar{x})\right)[+]\left(\bar{\lambda}_i\rho_i^1[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)\right), \quad i \in M$$

$$0 \geq a^2(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]\left(\bar{\mu}_j[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \nabla^* g_j(\bar{x})\right)[+]\left(\bar{\mu}_j\rho_j^2[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)\right), \quad j \in J(\bar{x})$$

Из (h, φ) -подлинейности F имеем:

$$\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\hat{x})\right)[-]\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\bar{x})\right) \geq$$

$$\geq a^1(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})\right)[+]\left(\bar{\lambda}_i\rho_i^1[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right), \quad i \in M$$

$$0 \geq a^2(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})\right)[+]\left(\bar{\mu}_j\rho_j^2[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right), \quad j \in J(\bar{x})$$

Из **леммы 1.3** (е) получаем:

$$\left[\sum_{i=1}^m\right]\left(\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\hat{x})\right)[-]\left(\bar{\lambda}_i[\bullet]f_i(\bar{x})\right)\right) \geq$$

$$\geq \left[\sum_{i=1}^m\right]\left(a^1(\hat{x}, \bar{x})[\bullet]F\left(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})\right)[+]\left(\bar{\lambda}_i\rho_i^1[\bullet]d^2(\hat{x}, \bar{x})\right)\right)$$

$$0 \geq \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}))[\cdot] \left(\bar{\mu}_j \rho_j^2[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right)$$

Из леммы 1.2 (d) получаем:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i[\cdot] f_i(\hat{x}) \right) [-] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i[\cdot] f_i(\bar{x}) \right) \geq \\ & \geq \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}))[\cdot] \right) [+] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i \rho_i^1[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$0 \geq \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}))[\cdot] \right) [+],$$

$$[+] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left(\bar{\mu}_j \rho_j^2[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \quad (15)$$

Из (13) и (14) получаем:

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}))[\cdot] \right) [+] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i \rho_i^1[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) < 0 \quad (16)$$

Из (16) и (13), используя (6) и (7) получаем:

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}))[\cdot] \right) < (-1)[\cdot] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i \rho_i^1[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) < 0,$$

$$\left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}))[\cdot] \right) \leq (-1)[\cdot] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left(\bar{\mu}_j \rho_j^2[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right),$$

Используя лемму 1.2 (b) получаем:

$$a^1(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] \left[\sum_{i=1}^m \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})) < (-1)[\cdot] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left(\bar{\lambda}_i \rho_i^1[\cdot] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \quad (17)$$

$$a^2(\hat{x}, \bar{x})[\cdot] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})) \leq$$

$$\leq (-1)[\bullet] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\overline{\mu_j \rho_j^2})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right), \quad (18)$$

Умножая (17) и (18) с $a^1(\hat{x}, \bar{x})^{-1}$ и $a^2(\hat{x}, \bar{x})^{-1}$, соответственно, в смысле φ -скалярном произведении, из **леммы 1.3** (а) и (с) получаем:

$$\begin{aligned} & \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})^{-1} a^1(\hat{x}, \bar{x}) \right) [\bullet] \left[\sum_{i=1}^m \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})) < \\ & < (-1)[\bullet] \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left((\overline{\lambda_i \rho_i^1})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left(a^2(\hat{x}, \bar{x}) a^2(\hat{x}, \bar{x})^{-1} \right) [\bullet] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})) \leq \\ & \leq (-1)[\bullet] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\overline{\mu_j \rho_j^2})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, из **леммы 1.2** (b) и **леммы 1.3** (е) получаем

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^m \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x})) [+] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] F(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x})) (-1)[\bullet] \\ & [\bullet] \left(a^1(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left((\overline{\lambda_i \rho_i^1})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right) [+] (-1)[\bullet] \\ & [\bullet] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\overline{\mu_j \rho_j^2})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

Из (11) и из **леммы 1.3** (d) получаем

$$(-1)[\bullet] \left(\left(a^1(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{i=1}^m \right] \left((\overline{\lambda_i \rho_i^1})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right) [+] \left(a^2(\hat{x}, \bar{x})^{-1} [\bullet] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\overline{\mu_j \rho_j^2})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) \right) \right) \leq 0, \quad (22)$$

Из (21) и (22) получаем

$$\left[\sum_{i=1}^m \right] \left((\overline{\lambda_i \rho_i^1})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) [+] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] \left((\overline{\mu_j \rho_j^2})[\bullet] d^2(\hat{x}, \bar{x}) \right) < 0,$$

Из (h, φ) -подлинейности функции F и (1), используя (12), получаем:

$$0 = F \left(x, \bar{x}, \left(\bigoplus_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}) \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J(\bar{x})} \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}) \right) \leq \\ \leq \left[\sum_{i=1}^m \right] F \left(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}_i \otimes \nabla^* f_i(\bar{x}) \right) [+] \left[\sum_{j \in J(\bar{x})} \right] F \left(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\mu}_j \otimes \nabla^* g_j(\bar{x}) \right) < 0,$$

которое является противоречием. Следовательно, \bar{x} слабый минимум для проблемы $(MOP)_{h, \varphi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Avriel M. Nonlinear Programming: Analysis and Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
2. Ben-Tal A. On Generalized Means and Generalized Convex Functions, *J. Optim. Theory Appl.* 21 (1977). PP. 1–13.
3. Xu Y. H., Liu S.Y. Kuhn-Tucker Necessary Conditions for (h, φ) -multiobjective Optimization Problems, *Journal of Systems and Complexity* 17 (2004). PP. 472–484.
4. Aghezzaf B., Hachimi M. Sufficiency and Duality in Multiobjective Programming, involving Generalized (F, φ) -convexity, *J. Ath. Anal.* 258 (2001). PP. 617–628.
5. Hanson M.A., Mond B. Further Generalizations of Convexity in Mathematical Programming, *J. Inform. Optim. Sci.* 3 (1986). PP. 25–32.
6. Hanson M.A., Mond B. Necessary and Sufficient Conditions in Constrained Optimization, *Math. Programming* 37 (1987). PP. 51–58.
7. Kaul R.N., Suneja S.K., Srivastava M.K. Optimality Criteria and Duality in Multiple Objective Optimization Involving Generalized Invexity, *J. Optim. Theory Appl.* 80 (1994). PP. 465–482.
8. Liang Z.A., Huang H.X., Pardalos P.M. Optimality Conditions and Duality for A Class of Nonlinear Fractional Programming Problems, *Optim. Theory Appl.* 110 (2001). PP. 611–619.
9. Preda V. On Efficiency and Duality for Multiobjective Programs, *J. Math. Anal. Appl.* 166 (1992). PP. 365–377.
10. Rueda N.G., Hanson M.A. Optimality Criteria in Mathematical Programming Involving Generalized Invexity / *Math. Anal. Appl.* 130 (1998). PP. 375–385.
11. Rueda N.G., Hanson M.A., Singh C. Optimality and Duality with Generalized Convexity, *J. Optim. Theory Appl.* 86 (1995). PP. 491–500.
12. Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press, Orlando (1985).
13. Aghezzaf B., Hachimi M. Generalized Invexity and Duality in Multiobjective Programming Problems, *J. Global Optim* 18 (2000). PP. 91–100.

OPTIMIZATION SUFFICIENCY CONDITION IN THE (h, φ) -DIFFERENTIABLE PROBLEMS

K. Petrosyan

In this article we define a class of functions (h, φ) - (F, a, p, d) type I, which are used in obtained sufficient conditions of optimality in differentiable multiobjective problems, using generalized algebraic operations of Ben-Tal. We presented one sufficient condition of optimality of Karush-Kuhn-Tucker, which is used in obtaining some other optimality conditions and theorems of duality for weak pareto solutions.

Keywords: Generalized algebraic operations of Ben-Tal., (h, φ) - (F, a, p, d) type I functions, sufficient conditions of Karush-Kuhn-Tucker, weak pareto solutions.

УДК 004.056.53

A NOVEL THRESHOLD-BASED IMAGE WATERMARKING ALGORITHM USING DWT2

M. Khalili, D. Asatryan

*Institute for Informatics and Automation Problems of NAS Armenia,
Russian-Armenian (Slavonic) University*

In this paper, a novel threshold-based image watermarking is proposed in which a scrambled binary image by ATM, after encryption, is embedded into sub-images of the first channel wavelet decomposition of CIELab color space using block processing technique. The experimental results show that the proposed method improves security and imperceptibility compared the similar works and has stronger robustness against JPEG compression, different noises and motion filter attacks.

Keywords. Threshold-based watermarking, block processing technique, DWT2, ATM, CIELab color space.

1. Introduction

With the development of network and multimedia technologies, multimedia copyright protection and content authentication have become serious problems that need to be solved urgently. Digital watermarking technology provides a strong solution for it [1]. Most of the digital watermarking algorithms uses transform domain

techniques to embed the watermark information in a robust and imperceptible way into the host image. The most commonly used transform domain techniques are DCT, DWT, and SVD [2]. Digital watermarking based on wavelet analysis can effectively use the characteristics of the human visual system and can be compatible with international compression standard. In this domain, the embedded watermark signal energy can be distributed to all the pixels on the space [3]. For watermarking in DWT domain, certainly the embedding strategy affects robustness of watermarks, while the selection of embedding frequency bands is another important issue. As we all know that schemes in low frequency bands will bring about stronger robustness, but human's eyes are just like low filters and sensitive to even slight modifications in low frequency coefficients, so improper methods can easily spoil the image quality. While watermark hidden in the middle or lower frequency bands is more liable to be suppressed by compression [4]. In this paper, we propose a new technique in low frequency based on B-spline wavelet filter and improve the obtained results in [7]. Cause of use of B-spline function wavelet is that, B-spline functions, do not have compact support, and are demonstrated more appropriate orthogonal wavelet base and have better smoothness property for digital image wavelet decomposition [5, 6]. For more security of the proposed scheme, before watermark embedding process, the binary watermark image after scrambling by Transform Map Arnold (ATM) method is reshaped to a sequence and then a random binary sequence R of size n is adopted to encrypt the watermark, where n is the size of the watermark. This adopting process uses a pseudo-random number generator to determine the pixel to be used on a given key. On the other hand, the RGB channels of the host image are converted to CIELab channels and then the first channel is pre-filtered to enhance embedding process. After that, low frequency subband of wavelet decomposition of its first channel, is quantized and divided to different sub-blocks with the certain sub-block size to embed the encrypted watermark.

2. Arnold Transform Map

Usually scrambling transform is used in the pretreatment stage of the watermark as a way of encryption. Generally, a meaningful watermark image becomes meaningless and disorderly (chaotic) after scrambling transform. Without the scrambling algorithm and the key, the attacker will not recover the watermark at all even if it has been extracted from the watermarked image. So the scrambling transform gives a secondary security for the digital products. In addition, after scrambling transform, the spatial relationships of the pixels of an image has been destroyed completely, which makes it evenly distributed in all the space, so the robustness of the algorithm was improved in this way [8]. ATM or Arnold Transform Map [9] is a kind of image scrambling methods, called as Arnold's cat mapping. The discrete Arnold transformation is defined as follows [10]:

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \pmod{N} \quad (1)$$

where, a , b , c and d are positive integers, and $|A|=ad-bc \neq 0$, so only three among the four parameters of a , b , c and d are independent. X_{n+1} , Y_{n+1} , X_n and Y_n are integers in $\{0,1,2,\dots,N-1\}$. In this paper the extended Arnold transform in [11] is used to scramble watermarking of copyright protection.

3. CIELab Color Space

In 1976, the International Commission on Illumination (CIE) recommended the CIE $L^*a^*b^*$, or CIELab color space for color quality estimation [12]. The color space CIELab is a perceptually uniform color space created by nonlinear transformations of tristimulus XYZ values to overcome the non-uniformity of color spaces which had been discussed by Macadam [13]. The main intention was to provide a standard and approximate uniform color space which can be used to compare the color values easily. In this color space the differences between points plotted in the color space correspond to visual differences between the colors plotted. The CIE recommended to use XYZ coordinate system to transform RGB to $L^*a^*b^*$. The equations in [14, 15] are used to transfer RGB to CIELab and CIELab to

4. Watermarking Procedure

A digital watermarking system usually consists of embedding framework and extraction framework. The block diagram of the proposed watermarking approach is shown in Figure 1.

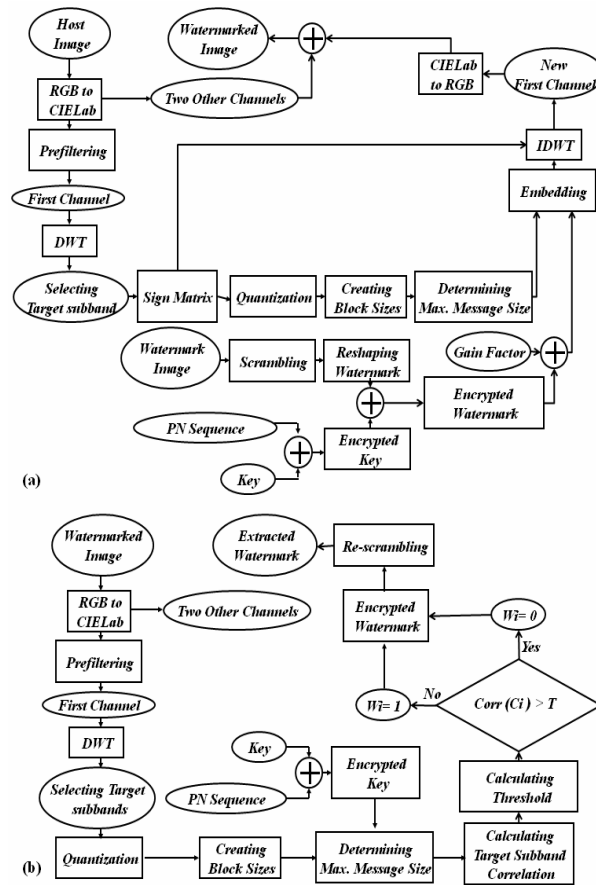


Figure 1. Block diagrams of the proposed watermarking approach; (a) Embedding procedure, (b) Extracting procedure.

4.1. The Embedding Framework

The steps involved in the embedding of watermark image into the in LL3 coefficients of the host image are described as follows:

Step 1: Convert RGB channels of a host image H into CIE Lab.

Step 2: pre-filtering the first channel.

Step 3: Decompose the first channel into three levels with ten DWT subbands, $F(Y)$. The subband LL3 is taken as the target subband for embedding watermarks.

Step 4: Creating a sign matrix to save the signs of selected target subband coefficients.

Step 5: Quantization of the selected embedding coefficients.

Step 6: Divide of the Target subband into the different sub-blocks. In this paper each sub-block size is equal to 16.

Step 7: Determining the maximum message size of each sub-blocks.

Step 8: For more security of watermarks, first, the watermark W is scrambled for key times with presented ATM algorithm in [14] and then reshaped to a sequence; after that, a random binary sequence R of size n is adopted to encrypt the watermark, where n is the size of the watermark image. This adopting process uses a pseudo-random number generator to determine the pixel to be used on a given key.

Step 9: Embedding the watermark using the correlation properties of additive pseudo-random noise patterns according to equation shown in below:

$$I_{w,x,y}(u,v) = \begin{cases} I_{x,y} + k * W_i & \text{if } W = 0 \\ I_{x,y} * W_i & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

where k denotes a gain factor for completely controlling the imperceptibility of watermarked images and the robustness of watermarks and also IW is the resulting watermarked image.

Step 10: Apply the sign matrix.

Step 11: Perform Inverse DWT on new first channel with all changed and unchanged DWT coefficients.

Step 12: Reconvert CIELab channels of the changed host image into RGB channels.

Step 13: Save key times of ATM, random binary sequence R and index of the embedded subband as the authenticated key.

4.2. The Extraction Framework

The proposed algorithm is a blind watermarking algorithm and thus the original host image is not required to extract the watermark. Execution algorithm is the same as embedding one and pre-filtering is used before applying DWT transform to better separate watermark information from host image. The watermark extraction procedure is described in details in the following steps:

Step 1: Convert RGB channels of a watermarked image H into CIELab channels.

Step 2: pre-filtering the first channel.

Step 3: Decompose the first channel into three levels with ten DWT subbands.

The subband LL3 is taken as the target subband for extraction watermarks.

Step 4: Quantization of the selected embedding coefficients.

Step 5: Divide of the Target subband into the different sub-blocks.

Step 6: Determining the maximum message size of each sub-blocks.

Step 7: Computation of threshold T as follows:

$$T = \frac{\text{Correlation}(HL) + \text{Correlation}(LH)}{2} \quad (3)$$

Step 8: Computation of the threshold T and each embedded coefficient correlation in sub-blocks, separately.

Step 9: The sequence encrypted watermark is extracted as follows:

$$\begin{cases} W_i = 0 & \text{if } C_i > T \\ W_i = 1 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

Step 10: The encrypted image watermark is produced by reconvertng the extracted sequence watermark.

Step 11: Scramble the encrypted image watermark with the same ATM algorithm with the same key times.

5. EXPERIMENTAL RESULTS

The proposed perceptual watermarking framework was implemented for evaluating security, imperceptibility and robustness. Three 512×512 famous images: Lenna, Peppers and Baboon, shown in figure 2(a-c) were taken as the host images to embed a 27×27 binary watermark image, shown in figure 2(d). For gain factor k, value 1.0 was taken entire implementation of the proposed scheme. Also for the entire test results in this paper, MATLAB R2007a software is used. Also for computing the wavelet transforms, 9-7 biorthogonal spline (B-spline) wavelet filter are used.

Table 1. Watermark imperceptibility results

Image	Lenna	Peppers	Baboon
Extracted Watermark	M. KH	M. KH	M. KH
PSNR (dB)	86.34	85.94	87.28
Corr	0.9996	0.9997	0.9993
NC	1.00	1.00	1.00
Error Bit%	0	0	0

Table 1 shows the watermark imperceptibility results. It can be seen that in addition of enhancement the security, the proposed watermarking approach yields satisfactory results in watermark imperceptibility and robustness and improves the earlier works such as [7]. The PSNRs of the watermarked images produced by the proposed approach are all greater than 85 dB, NCs between original watermark images and extracted watermark images are all equal 1, and correlations between host images and watermarked images are all greater than 0.999, which are perceptually imperceptible.

After able to achieve the desired watermark imperceptibility the watermarked images were tested under JPEG compression, Gaussian and ““Salt & Pepper”” noises and motion attacks to evaluate the robustness of the proposed scheme.

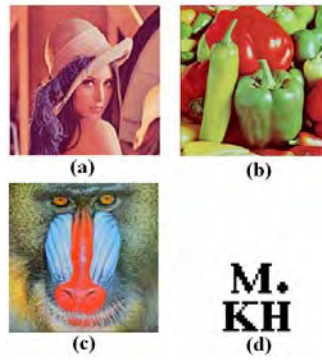


Figure 2. The host images for watermarking;
(a-c) Lenna, Peppers and Baboon, (d) Watermark image

5.1. Robustness to JPEG Compression

In this experiment, the watermarked images compressed with different jpeg qualities Q_s : 5, 10, 15, 20, 25, 50, 70 and 90 and then the watermark images extracted from the compressed watermarked images. The obtained results from compression experiment and the extracted watermarks from compressed watermarked images are shown in tables 2 and 3, respectively.

It can be seen that the extracted watermarks are excellent if the quality factors are greater than 20. PSNRs are still greater than 74 dB and the maximum error bit rates are all less than 11% even if the quality factors is less than 10. Also, it can be seen that the extracted watermarks still show satisfactory quality under the high quality factor compression 5. Comparing the obtained results in [7], it was found that the proposed scheme is more robust in JPEG compression experiment.

5.2. Robustness to Gaussian Noise

In this experiment, Gaussian noise with zero mean and different variances V_s : 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 and 1 applied on the watermarked images and then the watermark images extracted from the noisy watermarked images. Table 4 shows the obtained results from Gaussian noise experiment and table 5 shows the extracted watermarks after applying different variances. From these results it can be found that the proposed scheme satisfies robustness against Gaussian noise attacks and enhances the obtained results in [7]. The PSNRs are all greater than 47 dB. In variance of 1, the maximum error bit rate is less than 22% and the extracted watermarks are still recognizable.

5.3. Robustness to “Salt & Pepper” Noise

In this experiment, the “Salt & Pepper” noise with zero mean and different noise densities $N.D_s$: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 and 0.5 introduced in the watermarked images

and then the watermark images extracted from the noisy watermarked images. Table 6 shows the obtained results from “Salt & Pepper” noise attack. The obtained results show that the maximum error bit rate is still less than 13% and in noise density of 0.1 the minimum PSNRs are all greater than 52 dB. The extracted watermarks from noisy watermarked images are shown in table 7. It can be seen that in noise density 0.3 the extracted watermark images are near perfect and they are still recognizable in noise density 0.5. Therefore, it can be found that the proposed scheme satisfies robustness against “Salt & Pepper” noise and improves the obtained results in [7].

Table 2. The obtained results from JPEG compression experiment

Lenna			
Q	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	83.41	0.8684	6.03
20	86.60	0.9939	0.27
50	92.82	1.0000	0.00
90	111.98	1.0000	0.00
Peppers			
Q	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	80.97	0.7631	10.83
20	83.69	0.9511	2.19
50	88.57	0.9847	0.68
90	97.80	1.0000	0.00
Baboon			
Q	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	77.63	0.8604	6.72
20	80.10	0.9818	0.82
50	84.45	0.9969	0.13
90	92.29	1.0000	0.00

5.4. Robustness to Motion Filter

In this experiment, the motions filter with different angles θ s: 10, 20, 30, 40 and 50 in a counterclockwise direction applied on the watermarked images and then the watermark images extracted from the filtered watermarked images. The obtain results from this experiment and the extracted watermarks are shown in tables 8 and 9, respectively. As it is obvious, all of the extracted watermarks are recognizable. The maximum error bit rate is less than 17% and PSNRs are all greater than 76 dB. Thus, the proposed scheme satisfies robustness against filter motion, thoroughly.

6. CONCLUSIONS

In this paper we introduced a threshold-based image watermarking scheme based on block processing, ATM, CIELab color space and DWT2 which improves the similar works such as [7]. The observations regarding the proposed watermarking scheme are summarized as follows:

- For more security of the proposed scheme, before watermark embedding process, the binary watermark image after scrambling by ATM method is reshaped to a sequence and then a random binary sequence R of size n is adopted to encrypt the watermark, where n is the size of the watermark. This adopting process uses a pseudo-random number generator to determine the pixel to be used on a given key.
- After converting the RGB channels of the host image to CIELab channels, the first channel is pre-filtered to enhance embedding process. After that, low frequency subband of wavelet decomposition of its first channel, is quantized and divided to different sub-blocks with the certain sub-block size to embed the encrypted watermark.
- The proposed scheme satisfies security, imperceptibility and robustness against different attacks such as JPEG-compression, Gaussian and “Salt & Pepper” noises and filter motion.
- The proposed scheme has no need to original image in watermark extracting process.

Table 3. The extracted watermarks in JPEG experiment

Q	Lenna	Peppers	Baboon
5			
10			
15			
20			
25			
50			
75			
90			

Table 4. The obtained results from Gaussian noise experiment

Lenna			
Variance	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	72.64	1.0000	0.00
0.3	61.52	0.9969	0.13
0.5	56.42	0.9878	0.54
0.7	54.40	0.9079	4.11
0.9	54.12	0.7135	12.75
1.0	54.11	0.5069	21.39
Peppers			
Variance	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	70.67	1.0000	0.00
0.3	58.31	0.9969	0.13
0.5	52.71	0.9694	1.37
0.7	50.59	0.9418	2.60
0.9	50.03	0.8957	4.66
1.0	49.98	0.7342	12.07
Baboon			
Variance	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	71.04	1.0000	0.00
0.3	58.06	1.0000	0.00
0.5	51.54	1.0000	0.00
0.7	48.65	0.9786	0.96
0.9	47.84	0.8514	6.85
1.0	47.78	0.7004	13.99

Table 5. The extracted watermarks in Gaussian noise experiment

V	Lenna	Peppers	Baboon
0.5	M. KH	M. KH	M. KH
0.7	M. KH	M. KH	M. KH
0.9	M. KH	M. KH	M. KH
1.0	M. KH	M. KH	M. KH

Table 6. The obtained results from “Salt & Pepper” noise experiment

Lenna			
N.D	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	65.64	1.0000	0.00
0.2	59.69	0.9909	0.41
0.3	56.14	0.9404	2.74
0.4	53.60	0.8868	5.48
0.5	51.66	0.7924	10.56
Peppers			
N.D	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	66.81	0.9847	0.68
0.2	60.81	0.9427	2.60
0.3	57.23	0.8958	4.80
0.4	54.74	0.8174	8.50
0.5	52.81	0.7488	12.34
Baboon			
N.D	PSNR (db)	NC	Error Bit %
0.1	66.58	0.9939	0.27
0.2	60.47	0.9819	0.82
0.3	57.01	0.9246	3.56
0.4	54.50	0.8596	6.85
0.5	52.58	0.7772	11.24

Table 7. The extracted watermarks in “Salt & Pepper” noise experiment

N.D	Lenna	Peppers	Baboon
0.1	M. KH	M. KH	M. KH
0.2	M. KH	M. KH	M. KH
0.3	M. KH	M. KH	M. KH

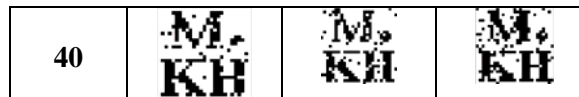
0.4			
0.5			

Table 8. The obtained results from motion filter experiment

Lenna			
Degree	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	83.07	0.7651	10.69
20	83.27	0.7612	10.83
30	83.95	0.8611	6.17
40	84.46	0.8705	5.76
50	84.53	0.8302	7.54
Peppers			
Degree	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	83.43	0.7315	12.20
20	83.29	0.7289	12.34
30	83.55	0.8179	8.09
40	83.80	0.8181	8.09
50	83.63	0.7726	10.15
Baboon			
Degree	PSNR (db)	NC	Error Bit %
10	78.18	0.6567	16.18
20	77.38	0.6772	16.28
30	77.17	0.8156	8.91
40	77.10	0.8206	8.64
50	76.73	0.7665	11.52

Table 9. The extracted watermarks in motion filter experiment

Degree	Lenna	Peppers	Baboon
10			
20			
30			



REFERENCES

1. Ben Wang, Jinkou Ding, Qiaoyan Wen, Xin Liao and Cuixiang Liu. An Image Watermarking Algorithm Based on DWT DCT and SVD, *IEEE Proceedings of IC-NIDC*. PP. 1034–1038, 2009.
2. Hemalatha T., Sukumar K., Soman K.P. Improving Security of Watermarking Algorithms via Parametric M-band Wavelet Transform, *IEEE Computer Society Proceeding of the 2009 International Conference on Advances in Recent Technologies in Communication and Computing*. PP. 360–362, 2009.
3. Jianmin Xie and Qin Qin. Study of Image Digital Watermarking Algorithm and Robustness Based on the Wavelet Transform Techniques, *IEEE Proceeding*. PP. 529–239, 2010.
4. Xiaonian Tang, Quan Wen, Guijun Nian, Jianchun Wang and Huiming Zhu. An Improved Robust Watermarking Technique in Wavelet Domain, *IEEE Computer Society Proceeding of the Second International Conference on MultiMedia and Information Technology*. PP. 270–273, 2010.
5. Li Fan and Tiegang Gao. A Novel Blind Robust Watermarking Scheme Based on Statistic Characteristic of Wavelet Domain Coefficients, *IEEE Computer Society Proceeding of the International Conference on Signal Processing Systems*. PP. 121–125, 2009.
6. Ingemar Cox, Jeffrey Bloom and Matthew Miller. *Digital Watermarking: Principle & Practice*, Morgan Kaufmann Publishers, 1-st edition, 2001.
7. Yu Jun, Chi Jie-ru, and Zhuang Xiao-dong. A New Wavelet-based Robust Watermarking for Digital Image. PP. 391–1394, 2007.
8. Wang Hui-qin and Hao Ji-chao. Color Image Watermarking Algorithm Based on the Arnold Transform, *IEEE Computer Society Proceeding of the International Conference on Communications and Mobile Computing*. Vol. 1. PP. 66–69, 2010.
9. Andrew B. Watson. DCT Quantization Matrices Visually Optimized for Individual Images, *Proceedings of the SPIE Conference of Human Vision, Visual Processing and Digital Display*. Vol. 1913. PP. 202–216, 1993.
10. Qian-Chuan Zhong, Qing-Xing Zhu and Ping-Li Zhang. A Spatial Domain Color Watermarking Scheme Based on Chaos, *IEEE Proceedings of the International Conference on Apperceiving Computing and Intelligence Analysis (ICACIA)*. PP. 137–142, 2008.
11. Yu Wei, Yanling Hao and Yushen Li. A Multipurpose Digital Watermarking Algorithm of Color Image, *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Changchun, China*. PP. 112–117, 2009.
12. Nagaraj V. Dharwadkar and B.B. Amberker. Estimating the Embedding Capacity of a Color Image using Color Difference, *IEEE Proceeding*, 2010.

13. *M. Mahy, L. Van Eyckden, and A. Oosterlinck.* Evaluation of uniform color spaces developed after the adoption of CIELAB and CIELUV, *Color Res. App. 1. Vol. 19.* PP. OS-121, 1994.
14. *Michael Wirth and Denis Nikitenko.* The effect of color space on image sharpening algorithms, *Canadian Conference Computer and Robot Vision*, 2010.
15. *M. Emre Celebi, Hassan A. Kingravi and Fatih Celiker.* Accelerating Color Space Transformations Using Numerical Approximations, *17th International Conference on Image Processing.* Hong Kong, 2010.

НОВЫЙ ПОРОГОВЫЙ АЛГОРИТМ ВСТРАИВАНИЯ ЦВЗ В ИЗОБРАЖЕНИЕ, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ DWT2

М. Халили, Д. Асатрян

В работе предложен новый пороговый алгоритм встраивания ЦВЗ в изображение, который встраивает бинарное изображение, закодированное методом АТМ, в подизображения первого канала вейвлет-разложения цветового пространства CIE Lab, используя блочный метод обработки. Эксперименты показывают, что предложенный метод улучшает показатели защищенности и необнаруживаемости по сравнению с другими аналогичными методами, и обладает большей устойчивостью относительно атак, характеризуемых JPEG сжатием, разными шумами и фильтрацией движения.

DWT2 ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ ՊԱՏԿԵՐԻ ՋՐԱՆՇՄԱՆ ՇԵՄԱՅԻՆ ՆՈՐ ԱԼԳՈՐԻԹՄ

Մ. Խալիլի, Դ. Ասատրյան

Հոդվածում առաջարկվել է պատկերի ջրանշման նոր շեմային ալգորիթմ, որը երկուական պատկերը АТМ մեթոդով կոդավորումից հետո բլոկային մշակման եղանակով ներմուծվում է CIE Lab գունային տարածության վեյվլետային վերլուծության առաջին կապուղու ենթապատկերների մեջ: Փորձերը ցույց են տալիս, որ առաջարկված մեթոդը բարելավում է ալգորիթմի պաշտպանվածության և անտեսանելիության ցուցանիշները՝ ի համեմատ այլ նույնատիպ մեթոդների, և ունի ավելի մեծ կայունություն JPEG սեղմումով, տարբեր տեսակի աղմկահարումներով և տեղաշարժման գոխչներով բնորոշվող հարձակումների նկատմամբ:

УДК 519.17

О СТРУКТУРЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РАСКРАСОК ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Р.Р. Камалян

Институт информатики и проблем автоматизации НАН РА

Доказано, что при $m = \lambda n$, где $\lambda \in \mathbb{N}$, любая интервальная раскраска полного двудольного графа $K_{m,n}$ состоит из интервальных раскрасок его реберно непересекающихся подграфов G_1, \dots, G_λ , каждый из которых изоморфен графу $K_{n,n}$.

Ключевые слова: полный двудольный граф, интервальная раскраска, структура.

1. Введение: определения, обозначения, цель работы

В работе рассматриваются неориентированные связные графы без кратных ребер и петель [1]. Не определяемые понятия и обозначения можно найти в [2]. Множество вершин графа G обозначаем через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$, наибольшую из степеней вершин – через $\Delta(G)$, хроматический класс [1] – через $\chi'(G)$. Множество всех правильных реберных t -раскрасок графа G , где $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, обозначим через $\alpha(G, t)$, и пусть

$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G, t)$. Если $c \in \alpha(G)$, $x \in V(G)$, то множество

$\{c(e)/e \in E(G), e \text{ инцидентно } x\}$ обозначим через $S_G(x, c)$.

Если D – непустое конечное подмножество множества \mathbb{N} , то через $l(D)$ и $L(D)$ обозначаем наименьший и наибольший элемент D , соответственно. Непустое конечное подмножество D множества \mathbb{N} назовем интервалом, если из $l(D) \leq t \leq L(D)$, $t \in \mathbb{N}$ следует $t \in D$. Интервал D назовем h -интервалом, если $|D| = h$. Интервал D обозначим через $\text{Int}(q, h)$, если $l(D) = q$, $|D| = h$. Непустое конечное подмножество D множества \mathbb{N} назовем разрывным, если D не является интервалом, а число t назовем разрывом D , если

$l(D) < t < L(D)$, $t \in \mathbb{N}$, $t \notin D$. Множество разрывов разрывного множества D обозначим через $\text{gaz}(D)$.

Скажем, что правильная реберная раскраска $c \in \alpha(G)$ интервальна в вершине $x_0 \in V(G)$ графа G , если $S_G(x_0, c)$ является интервалом; скажем, что c является интервальной раскраской графа G , если для $\forall x \in V(G)$ c интервальна в x . Интервальные раскраски графов были введены в [3], интерес к ним связан с тем, что в случае двудольных графов они могут служить графовыми моделями “безоконых” учебных расписаний. В [4] было доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ полный двудольный граф $K_{m,n}$ имеет интервальную раскраску в цвета $1, 2, \dots, t$ тогда и только тогда, когда $m + n - \sigma(m, n) \leq t \leq m + n - 1$, где $\sigma(m, n)$ есть наибольший общий делитель m и n . Целью настоящей работы является исследование структуры интервальных раскрасок графов $K_{m,n}$ при m , кратном n (отметим, что при $\sigma(m, n) = 1$ структура интервальных раскрасок графов $K_{m,n}$ исследована в [5,6]).

Множество $V(K_{m,n})$ вершин графа $K_{m,n}$ считаем представленным в виде $X \cup Y$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – одна доля графа, а $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ – другая. Всюду в настоящей работе предполагаем, что $n, \lambda \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m = \lambda n$, и для $\tau = 1, \dots, \lambda$ используем обозначение $Y_\tau \equiv \{y_{1+(\tau-1)n}, \dots, y_{\tau n}\}$.

Для $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ в случае $X' \neq \emptyset$, $Y' \neq \emptyset$ через $T(X', Y')$ будем обозначать подграф графа $K_{m,n}$, порожденный подмножеством $X' \cup Y'$ его вершин, а через (X', Y') – множество ребер графа $T(X', Y')$. Цвет ребра (x, y) при раскраске $c \in \alpha(K_{m,n})$ обозначаем через $c((x, y))$. Для $U \subseteq (X, Y)$, $c \in \alpha(K_{m,n})$ в случае $U \neq \emptyset$ положим $C(U) \equiv \bigcup_{(x,y) \in U} \{c((x, y))\}$.

Для $i \in \text{Int}(1, n)$ определим множество $R(i) \equiv \{j \in \mathbb{N} / j \equiv i \pmod{n}\}$; если $a \in R(i)$, будем писать также, что $r(a) = i$. Если $c \in \alpha(K_{m,n})$, то для $i = 1, \dots, n$ и $\tau = 1, \dots, \lambda$ положим $F((i, \tau), c) \equiv \{j \in \text{Int}(1, n) / |C(\{x_i\}, Y_\tau) \cap R(j)| \geq 2\}$, а для $\tau = 1, \dots, \lambda$ обозначаем $H(\tau, c) \equiv \bigcup_{i=1}^n F((i, \tau), c)$, и пусть $Q(c) \equiv \{\tau / 1 \leq \tau \leq \lambda, H(\tau, c) \neq \emptyset\}$. Для $c \in \alpha(K_{m,n})$, $D \subset \mathbb{N}$, $U \subseteq (X, Y)$ положим $f(D, U, c) \equiv |\{(x, y) / (x, y) \in U, c((x, y)) \in D\}|$.

При употреблении обозначений – в тех случаях, когда ясно, о какой раскраске речь – будем использовать сокращенные обозначения, опуская символ названия раскраски. Так, например, будем писать $f(D, U)$ вместо $f(D, U, c)$ и т.п.

2. Результаты

Сначала отметим, что имеет место следующая, простая

Лемма 1. Пусть B разрывное множество, $|B| = n$, $B \subseteq \text{Int}(a, 2n-1)$. Если $|B \cap R(i)| = 1$ при $i = 1, \dots, n$, то существует такое $t > a + n - 1$, что $t \in \text{raz}(B)$.

Лемма 2. Пусть c – интервальная раскраска графа $K_{m,n}$, такая, что для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C(\{x_1\}, Y_\tau) = \text{Int}((\tau-1)n+1, n)$. Тогда для $\tau = 1, \dots, \lambda$:

- 1) $\tau n \in C(\{x_j\}, Y_\tau)$, $j = (\tau-1)n+1, \dots, \tau n$;
- 2) $f(\{\tau n\}, (X, Y)) = f(\{\tau n\}, (X, Y_\tau)) = n$;
- 3) $C(\{x_j\}, Y_\tau) \subseteq \text{Int}((\tau-1)n+1, 2n-1)$;
- 4) $\tau n \in C(\{x_i\}, Y_\tau)$, $i = 1, \dots, n$;
- 5) $f(R(j), (X, Y_\tau)) = n$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Сначала отметим, что утверждение 5) следует из интервальности раскраски c и равенств $|Y_\tau| = n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$.

Так как для $j = 1, \dots, n$ $1 \leq c((x_1, y_j)) \leq n$ и $C(\{x_j\}, Y_\tau)$ n -интервал, то

$$n \in C(\{x_j\}, Y_\tau), j = 1, \dots, n \quad (1)$$

следовательно, $f(\{n\}, (X, Y_1)) = n$. Поскольку $|X| = |Y_1| = n$, то отсюда и из условия леммы следует, что для $i = 1, \dots, n$ $n \in C(\{x_i\}, Y_1)$. Так как для $j = 1, \dots, n$ $C(\{x_j\}, Y_\tau)$ n -интервал, то из (1) следует, что для $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ $1 \leq c((x_i, y_j)) \leq 2n-1$. Этим лемма для $\tau = 1$ доказана.

Пусть лемма доказана для $\tau = 1, \dots, \varepsilon$. Если $\varepsilon = \lambda$, то этим ее доказательство завершено. Поэтому предположим, что $\varepsilon < \lambda$.

Так как $\varepsilon n \in C(\{x_i\}, Y_\varepsilon)$ для $i = 1, \dots, n$, то

$$\varepsilon n \notin C(\{x_j\}, Y_\tau), j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n \quad (2)$$

Из условия леммы имеем

$$\varepsilon n + 1 \leq c((x_1, y_j)) \leq (\varepsilon + 1)n, j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что при $1 \leq a \leq \varepsilon n$

$$a \notin C(\{x_j\}, Y_\tau), j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n \quad (4)$$

Из (3) и (4), с учетом того, что $C(\{x_j\}, Y_\tau)$ для $j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n$ n -интервал, получаем

$$(\varepsilon + 1)n \in C((X, \{y_j\})), \quad j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n \quad (5)$$

следовательно, $f(\{(\varepsilon + 1)n\}, (X, Y_{\varepsilon+1})) = n$. Поскольку $|X| = |Y_{\varepsilon+1}| = n$, то отсюда и из условия леммы следует, что для $i = 1, \dots, n$ $(\varepsilon + 1)n \in C(\{x_i\}, Y_{\varepsilon+1})$. Так как для $j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n$ $C((X, \{y_j\}))$ n -интервал, то из (5) следует, что для $i = 1, \dots, n$, $j = \varepsilon n + 1, \dots, (\varepsilon + 1)n$ $\varepsilon n + 1 \leq c((x_i, y_j)) \leq (\varepsilon + 1)n + n - 1$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $c \in \alpha(K_{m,n})$ такова, что для $i = 1, \dots, n$ $C(\{x_i\}, Y)$ является интервалом, для $j = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$ $f(R(j), (X, Y_\tau), c) = n$, для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C((X, Y_\tau)) \subseteq \text{Int}((\tau - 1)n + 1, 2n - 1)$. Тогда если $Q(c) \neq \emptyset$, то $l(Q(c)) = 1$.

Доказательство от противного. Пусть

$$l(Q(c)) = \tau_0 \neq 1 \quad (6)$$

Отсюда и из условия леммы следует, что $1 < \tau_0 \leq \lambda$. По определению, $H(\tau_0) \neq \emptyset$. Пусть

$$l(H(\tau_0)) = j_0, \quad 1 \leq j_0 \leq n \quad (7)$$

и $j_0 \in F(i_0, \tau_0)$, $1 \leq i_0 \leq n$. По определению,

$$|C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}) \cap R(j_0)| \geq 2 \quad (8)$$

Из условия леммы получаем $|C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}) \cap R(j_0)| \leq |C((X, Y_{\tau_0}) \cap R(j_0))| \leq |\text{Int}((\tau_0 - 1)n + 1, 2n - 1) \cap R(j_0)| \leq 2$.

Отсюда и из (8) следует $|C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}) \cap R(j_0)| = 2$. Пусть

$$C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}) \cap R(j_0) = \{t', t''\} \quad (9)$$

Предположим, для определенности, что

$$t' < t'' \quad (10)$$

Из соотношений (9), (10) и условия леммы следует

$$(\tau_0 - 1)n + 1 \leq t' < \tau_0 n < t' + n = t'' \leq \tau_0 n + n - 1 \quad (11)$$

Поскольку $R(j') \cap R(j'') = \emptyset$ при $j' \neq j''$, $1 \leq j' \leq n$, $1 \leq j'' \leq n$, и

$C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}) \subset \bigcup_{j=1}^n R(j)$, то

$$n = |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\})| = \left| \bigcup_{j=1}^n (C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j)) \right| = \sum_{j=1}^n |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j)|.$$

Отсюда и из (8) следует, что существует $j_1, 1 \leq j_1 \leq n, j_1 \neq j_0$, такое, что

$$|C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j_1)| = 0 \tag{12}$$

Очевидно, существует единственное $p_0, 0 \leq p_0 \leq n-1$, такое, что $(t' + p_0) \in \text{Int}(t', n) \cap R(j_1)$. Отсюда и из (12) получаем

$$(t' + p_0) \notin C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \tag{13}$$

Из условия леммы следует, что

$$f(R(n), (X, Y_{\tau_0})) = n \tag{14}$$

Ясно, что $\text{Int}((\tau_0 - 1)n + 1, 2n - 1) \cap R(n) = \{\tau_0 n\}$. Отсюда, из (14) и условия леммы следует $f(\{\tau_0 n\}, (X, Y_{\tau_0})) = n$, откуда, ввиду правильности раскраски c , получаем

$$\tau_0 n \in C(\{\{x_i\}, Y_{\tau_0}\}), i = 1, \dots, n \tag{15}$$

Из (9) и (13) следует $p_0 > 0$, а из (13) и (15) получаем $t' + p_0 \neq \tau_0 n$.

Случай 1. $t' + p_0 < \tau_0 n$.

Из (11) получаем

$$(\tau_0 - 1)n + 1 \leq t' < t' + p_0 < \tau_0 n < t' + n = t'' \leq \tau_0 n + n - 1 \tag{16}$$

Случай 1а. $l(C(\{\{x_{i_0}\}, Y)) \leq t' - (\tau_0 - 1)n$.

Пусть $S = \text{Int}(l(C(\{\{x_{i_0}\}, Y)), \tau_0 n - l(C(\{\{x_{i_0}\}, Y)) + 1) \cap R(j_1)$. Легко видеть, что из (16) и условия случая 1а) следует

$$|S| = \tau_0 \tag{17}$$

Так как $C(\{\{x_{i_0}\}, Y)$ интервал и $\tau_0 n \in C(\{\{x_{i_0}\}, Y)$, то $S \subseteq C(\{\{x_{i_0}\}, Y)$. Отсюда и из условия леммы следует, что

$S \subseteq C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} Y_{\tau})$ и, ввиду (12), $S \subseteq C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0-1} Y_{\tau})$. Отсюда и из очевидного

равенства $C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0-1} Y_{\tau}) = \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0-1} C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau})$ следует

$S \subseteq \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0-1} C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau})$, откуда, с учетом (17), получаем, что существует

$\tau_1, 1 \leq \tau_1 \leq \tau_0 - 1$, такое, что $|C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_1}\}) \cap R(j_1)| \geq 2$, следовательно, $j_1 \in F(i_0, \tau_1)$, $H(\tau_1) \neq \emptyset$, $\tau_1 \in Q(c)$, что противоречит (6), поскольку $\tau_1 \leq \tau_0 - 1$.

Случай 1б). $l(C(\{\{x_{i_0}\}, Y)) > t' - (\tau_0 - 1)n$.

Из (9) следует $(t' - (\tau_0 - 1)n) \in R(j_0)$. Отсюда и из условия случая 1б) следует

$$l(C(\{\{x_{i_0}\}, Y) \cap R(j_0)) \geq t' - (\tau_0 - 2)n \quad (18)$$

Из (9), (16) и условия леммы получаем $L(C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} Y_{\tau})) \cap R(j_0)) = t''$.

Отсюда, из (9) и (18) $|C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)| \leq \tau_0$. Из этого неравенства, пра-

вильности раскраски c и (8) получаем: $\tau_0 \geq |C(\{\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)| =$

$$\left| \bigcup_{\tau=1}^{\tau_0} (C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)) \right| = |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j_0)| + \sum_{\tau=1}^{\tau_0-1} |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)| \geq$$

$$\geq 2 + \sum_{\tau=1}^{\tau_0-1} |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)|, \quad \text{откуда} \quad \sum_{\tau=1}^{\tau_0-1} |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau}\}) \cap R(j_0)| \leq \tau_0 - 2.$$

Следовательно, существует $\tau_2, 1 \leq \tau_2 \leq \tau_0 - 1$, такое, что $|C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_2}\}) \cap R(j_0)| = 0$. Теперь из правильности раскраски c вытекает, что существует $j_2, 1 \leq j_2 \leq n$, $j_2 \neq j_0$, для которого выполняется неравенство $|C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_2}\}) \cap R(j_2)| \geq 2$. Отсюда следует, что $j_2 \in F(i_0, \tau_2)$, $H(\tau_2) \neq \emptyset$, $\tau_2 \in Q(c)$, что противоречит (6), поскольку $\tau_2 \leq \tau_0 - 1$.

Случай 2. $t' + p_0 > \tau_0 n$.

Поскольку $p_0 \leq n - 1$, то из (11) следует:

$$(\tau_0 - 1)n + 1 \leq t' < \tau_0 n < t' + p_0 < t' + n = t'' \leq \tau_0 n + n - 1 \quad (19)$$

Из условия леммы, правильности раскраски c и (12) имеем:

$$n = f(R(j_1), (X, Y_{\tau_0})) = |C(\{\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j_1)| +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n |C(\{\{x_i\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j_1)| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n |C(\{\{x_i\}, Y_{\tau_0}\}) \cap R(j_1)|,$$

следовательно, существует $i_1, 1 \leq i_1 \leq n$, $i_1 \neq i_0$, такое, что $|C(\{x_{i_1}\}, Y_{\tau_0}) \cap R(j_1)| \geq 2$. Поэтому $j_1 \in F((i_1, \tau_0))$ и

$$j_1 \in H(\tau_0) \quad (20)$$

Из (19) и определения числа p_0 следует

$$r(t' + p_0) = j_1 = t' + p_0 - \tau_0 n \quad (21)$$

Аналогично, из (10) и (19) следует

$$r(t'') = j_0 = t' + n - \tau_0 n \quad (22)$$

Так как $p_0 < n$, то из (21) и (22) вытекает неравенство $j_1 < j_0$, которое невозможно ввиду (7) и (20).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $c \in \alpha(K_{m,n})$ такова, что для $i = 1, \dots, n$ $C(\{x_i\}, Y)$ интервал, для $j = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$ $f(R(j), (X, Y_\tau), c) = n$, для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C((X, Y_\tau)) \subseteq \text{Int}((\tau - 1)n + 1, 2n - 1)$. Тогда $Q(c) = \emptyset$.

Доказательство от противного. Пусть $Q(c) \neq \emptyset$. По лемме 3, $l(Q(c)) = 1$. По определению, $H(1) \neq \emptyset$. В остальной части рассуждение ведется аналогично рассуждению, которое проводится для доказательства леммы 3 после установления неравенства $H(\tau_0) \neq \emptyset$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $\lambda \geq 2$, и $c \in \alpha(K_{m,n})$ такова, что для $i = 1, \dots, n$ $C(\{x_i\}, Y)$ интервал, для $j = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$ $f(R(j), (X, Y_\tau), c) = n$, и для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C((X, Y_\tau)) \subseteq \text{Int}((\tau - 1)n + 1, 2n - 1)$.

Тогда для $i = 1, \dots, n$: 1) $C(\{x_i\}, Y_\lambda)$ интервал; 2) $C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau)$ интервал; 3) $L(C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau)) + 1 = l(C(\{x_i\}, Y_\lambda))$; 4) $l(C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau)) + m - n = l(C(\{x_i\}, Y_\lambda))$.

Доказательство.

1) Предположим противное: существует такое $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$, что $C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda)$ разрывное множество. Из правильности раскраски c следует

$$|C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda)| = n \quad (23)$$

По условию,

$$C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \subseteq \text{Int}((\lambda - 1)n + 1, 2n - 1) \quad (24)$$

Случай а). При $j = 1, \dots, n$ $|C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \cap R(j)| = 1$.

Поскольку $C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda)$ разрывное множество, то из (23), (24) и леммы 1 следует, что существует такое t , что

$$t > \lambda n \quad (25)$$

и

$$t \in \text{raz}(C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda)) \quad (26)$$

Так как $C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \subseteq C(\{x_{i_0}\}, Y)$ и $C(\{x_{i_0}\}, Y)$ интервал, то из (26) следует $t \in C(\{x_{i_0}\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau)$. Поэтому существует такое τ_0 , $1 \leq \tau_0 \leq \lambda - 1$, что $t \in C(\{x_{i_0}\}, Y_{\tau_0})$. Отсюда, по условию леммы, следует неравенство $t \leq \tau_0 n + n - 1 \leq (\lambda - 1)n + n - 1 = \lambda n - 1$, противоречащее (25).

Случай б). Существует такое $j_0, 1 \leq j_0 \leq n$, что

$$|C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \cap R(j_0)| \neq 1 \quad (27)$$

Из правильности раскраски c следует

$$n = |C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda)| = |C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \cap R(j_0)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n |C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \cap R(j)|,$$

откуда, ввиду (27), ясно, что существует $j_1, 1 \leq j_1 \leq n$, для которого $|C(\{x_{i_0}\}, Y_\lambda) \cap R(j_1)| \geq 2$. Следовательно, $F(i_0, \lambda) \neq \emptyset$, $H(\lambda) \neq \emptyset$, $Q(c) \neq \emptyset$, что противоречит лемме 4.

Этим утверждение 1) доказано.

2) Очевидно, для $i = 1, \dots, n$

$$C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau) \cap C(\{x_i\}, Y_\lambda) = \emptyset, C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau) \cup C(\{x_i\}, Y_\lambda) = C(\{x_i\}, Y).$$

Отсюда, из условия леммы и доказанного утверждения 1) следует утверждение 2).

3) Утверждение 3) следует из условия леммы и доказанных утверждений 1) и 2).

4) Утверждение 4) непосредственно следует из утверждения 3), поскольку

$$C(\{x_i\}, \bigcup_{\tau=1}^{\lambda-1} Y_\tau) \text{ для } i = 1, \dots, n \text{ является } (m - n) \text{-интервалом.}$$

Лемма 5 доказана.

Из леммы 5 следует

Утверждение 1. Пусть $c \in \alpha(K_{m,n})$ такова, что для $i = 1, \dots, n$ $C(\{x_i\}, Y)$ интервал, для $j = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$ $f(R(j), (X, Y_\tau), c) = n$, и для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C((X, Y_\tau)) \subseteq \text{Int}((\tau - 1)n + 1, 2n - 1)$. Тогда: 1) $C(\{x_i\}, Y_\tau)$ интервал, $i = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$; 2) если $\lambda \geq 2$, то при $i = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda - 1$ $l(C(\{x_i\}, Y_\tau)) + n = l(C(\{x_i\}, Y_{\tau+1}))$.

Из утверждения 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 1. Пусть интервальная раскраска c графа $K_{m,n}$ такова, что для $\tau = 1, \dots, \lambda$ $C(\{x_i\}, Y_\tau) = \text{Int}((\tau - 1)n + 1, n)$. Тогда: 1) $C(\{x_i\}, Y_\tau)$ интервал, $i = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda$; 2) подграф $T(X, Y_\tau)$ графа $K_{m,n}$ интервально окрашен, $C((X, Y_\tau)) \subseteq \text{Int}((\tau - 1)n + 1, 2n - 1)$, $\tau = 1, \dots, \lambda$; 3) если $\lambda \geq 2$, то при $i = 1, \dots, n$, $\tau = 1, \dots, \lambda - 1$ $l(C(\{x_i\}, Y_\tau)) + n = l(C(\{x_i\}, Y_{\tau+1}))$.

Более сложными рассуждениями можно показать [5], что теорема 1 допускает обобщение и на случай произвольных натуральных чисел p и q : любая интервальная раскраска полного двудольного графа $K_{p,q}$ состоит из интервальных раскрасок его реберно непересекающихся подграфов $G_1, \dots, G_{\frac{p \cdot q}{(\sigma(p,q))^2}}$, каж-

дый из которых изоморфен графу $K_{\sigma(p,q), \sigma(p,q)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA. 1969.
2. *Давтян Н.Н.* О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева // Мат. воп. киб. и выч. техники. Т. 32. Ер., 2009. СС. 107–111.
3. *Асратян А.С., Камалян Р.Р.* Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика. Вып. 5. ЕГУ, 1987. СС. 25–34.
4. *Камалян Р.Р.* Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев // Препринт ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ. Ер., 1989. 11 с.
5. *Камалян Р.Р.* Интервальные реберные раскраски графов // Дисс. на соиск. уч. степ. канд.ф.-м.н., ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1990.
6. *Камалян Р.Р., Петросян П.А.* Единственность интервальной реберной $(m + n - 1)$ -раскраски полного двудольного графа $K_{m,n}$ // Proceedings of the CSIT Conference. Yerevan, 2003. PP. 114–117.

ON A STRUCTURE OF INTERVAL COLORINGS OF COMPLETE BIPARTITE GRAPHS

R.R. Kamalian

It's proved that if $m = \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{N}$, then an arbitrary interval coloring of the complete bipartite graph $K_{m,n}$ consists of interval colorings of it's subgraphs G_1, \dots, G_λ , where for $\tau = 1, \dots, \lambda$ G_τ is isomorphic to $K_{n,n}$, and for arbitrary i, j , $1 \leq i < j \leq \lambda$, G_i and G_j have no common edge

**ԼՐԻՎ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՏՆԵՐԻ ՄԻՋԱԿԱՅՔԱՅԻՆ
ՆԵՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ՄԱՍԻՆ**

Ռ.Ռ. Քամալյան

Ապացուցված է, որ եթե $m = \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{N}$, ապա $K_{m,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆի կամայական միջակայքային ներկում բաղկացած է $K_{n,n}$ -ին իզոմորֆ G_1, \dots, G_λ կողերով չհաստվող ենթագրաֆների միջակայքային ներկումներից:

УДК 519.17

ОБ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА μ_{12} ПРОИЗВОЛЬНОГО ДЕРЕВА

Н.Н. Давтян¹, Р.Р. Камалян²¹Иджеванский филиал Ереванского государственного университета²Институт информатики и проблем автоматизации НАН РА

Предложен алгоритм, позволяющий по любому дереву G вычислять точное значение параметра $\mu_{12}(G)$ за линейное время.

Ключевые слова: дерево, реберная раскраска, интервальный спектр.

1. Обозначения, определения, вспомогательные результаты, цель работы

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель [1], содержащие хотя бы одно ребро. Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины $x \in V(G)$ в графе G обозначается через $d_G(x)$, наибольшая из степеней вершин графа G – через $\Delta(G)$. Для графа G и $\forall i$, где $1 \leq i \leq \Delta(G)$, положим: $V^{(i)}(G) \equiv \{x \in V(G) / d_G(x) = i\}$. Для графа G положим: $\gamma(G) \equiv |V^{(1)}(G)|$, $\Gamma(G) \equiv |V^{(\Delta(G))}(G)|$. Для графа G и произвольных двух его вершин x и y через $\rho_G(x, y)$ обозначаем расстояние [1] между x и y в графе G . Для произвольного дерева G и двух любых его вершин x и y через $P_G(x, y)$ обозначаем простую цепь [1], соединяющую вершины x и y , через $VP_G(x, y)$ – множество вершин этой цепи, и обозначаем

$$\text{int } VP_G(x, y) \equiv VP_G(x, y) \setminus (\{x\} \cup \{y\}).$$

Если D – непустое конечное подмножество множества \mathbb{N} натуральных чисел, то через $l(D)$ и $L(D)$ обозначаем, соответственно, его наименьший и наибольший элемент. Непустое конечное подмножество D множества \mathbb{N} назовем интервалом, если из $t \in \mathbb{N}$, $l(D) \leq t \leq L(D)$ вытекает $t \in D$.

Правильной реберной t -раскраской ($t \in \mathbb{N}$) графа G назовем функцию $\varphi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$, удовлетворяющую условиям:

1) для $\forall i, 1 \leq i \leq t$, существует хотя бы одно ребро $e^{(i)} \in E(G)$ с $\varphi(e^{(i)}) = i$;

2) для любых двух смежных ребер $e' \in E(G), e'' \in E(G)$ $\varphi(e') \neq \varphi(e'')$.

Наименьшее значение t , при котором существует правильная реберная t -раскраска графа G , обозначается через $\chi'(G)$.

Множество всех правильных реберных t -раскрасок графа G , где $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, обозначим через $\alpha(G, t)$, и пусть

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G, t).$$

Для графа G и раскраски $\varphi \in \alpha(G, t)$, где $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, через φ^* обозначим правильную реберную t -раскраску графа G , удовлетворяющую условию: для $\forall e \in E(G)$ $\varphi^*(e) = t + 1 - \varphi(e)$.

Если $\varphi \in \alpha(G)$ и $x \in V(G)$, то множество $\{\varphi(e) / e \in E(G), e \text{ смежно с } x\}$ назовем спектром вершины x графа G при раскраске φ и обозначим через $S_G(x, \varphi)$; через $f_G(\varphi)$ обозначим число $|\{z \in V(G) / S_G(z, \varphi) \text{ является интервалом}\}|$.

Замечание 1. Для любого графа G и $\forall \varphi \in \alpha(G)$ $f_G(\varphi) = f_G(\varphi^*)$.

Изучению поведения функции $f_G(\varphi)$ для графов некоторых классов при $\varphi \in \alpha(G, t)$ и t , удовлетворяющем неравенству $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, посвящены работы [2–5]. В работе [2] для произвольного связного неориентированного конечного графа без кратных ребер и петель были введены параметры $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$, имеющие, в частности, теоретико-игровой смысл (о параметре μ_{12} см. работу [3]).

Предположим, что ребра графа раскрашиваются в игре двух лиц с антагонистическими интересами и асимметричным распределением ролей. Первому игроку дано право выбора количества цветов в раскраске, а второму – право раскрасить граф с использованием количества цветов, указанного первым игроком. Первый игрок заинтересован в том, чтобы в итоговой раскраске графа оказалось как можно меньше вершин с интервальным спектром, а второй – в том, чтобы таких вершин оказалось как можно больше. При такой интерпретации μ_{21} является наименьшим, гарантированным для первого игрока числом вершин с интервальным спектром по окончании игры.

Аналогичный смысл может быть придан и параметрам μ_{11} и μ_{22} , с той разницей, что интересы обоих игроков будут совпадающими: в случае с μ_{11} оба заинтересованы в том, чтобы число вершин с интервальным спектром в итоговой раскраске графа оказалось как можно меньше, а в случае с μ_{22} – как можно больше.

В [2] найдены точные значения параметров μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} и μ_{22} для «лестниц Мебиуса».

В [4] найдены точные значения параметров μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} и μ_{22} в случаях, когда граф G изоморфен либо простой цепи, либо простому циклу, либо простому циклу с одной хордой.

В [5] найдены точные значения параметров μ_{11} и μ_{22} для деревьев.

В [3] найдено точное значение параметра μ_{12} для деревьев. Именно, доказана

Теорема. Для произвольного дерева D с $|V(D)| \geq 2$

$$\mu_{12}(D) = \gamma(D) + \Gamma(D) + R(D),$$

где

$$R(D) \equiv \begin{cases} -2, & \text{если } \Delta(D) = 1 \\ 0, & \text{если } \Delta(D) = 2 \text{ или } \Delta(D) \geq 4 \\ \min \left\{ \left| \left\{ x \in V(D) / d_D(x) = 2, S_D(x, \varphi) \text{ является} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{интервалом} \right\} / \varphi \in \alpha(D, 3) \right\}, & \text{если } \Delta(D) = 3. \end{cases}$$

Целью работы является описание алгоритма, позволяющего для произвольного дерева D с $\Delta(D) = 3$ вычислять точное значение параметра $\mu_{12}(D)$ за линейное время.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ через P_n обозначаем граф, изоморфный простой цепи [1] с n вершинами; предполагаем, что выбрано некоторое направление для движения вдоль цепи P_n от одной из ее висячих вершин до другой, и все ребра из множества $E(P_n)$ в соответствии с упомянутым движением последовательно пронумерованы: e_1, \dots, e_{n-1} .

2. Результат

Для $\forall s \in \mathbb{N}$ положим:

$$\mathfrak{M}(s) \equiv \{F/F: E(P_{s+1}) \rightarrow \{1, 2, 3\}\}.$$

Для $\forall F_0 \in \mathfrak{M}(s)$, где $s \in \mathbb{N}$, положим:

$$g(F_0) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } s=1 \\ \infty, & \text{если } s \geq 2 \text{ и } \{i/1 \leq i \leq s-1, F_0(e_{i+1}) = F_0(e_i)\} \neq \emptyset \\ \left| \left\{ i/1 \leq i \leq s-1, |F_0(e_{i+1}) - F_0(e_i)| = 1 \right\} \right|, & \\ \infty, & \text{если } s \geq 2 \text{ и } \{i/1 \leq i \leq s-1, F_0(e_{i+1}) = F_0(e_i)\} = \emptyset. \end{cases}$$

Для $\forall s \in \mathbb{N}$ и любых i, j , где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, положим:

$$c_{s,i,j} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } s=1 \text{ и } i=j \\ \infty, & \text{если } s=1 \text{ и } i \neq j \\ \min \{g(F)/F \in \mathfrak{M}(s), F(e_1)=i, F(e_s)=j\}, & \\ \infty, & \text{если } s \geq 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что для $\forall s \in \mathbb{N}$ и любых i, j , где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, верно равенство $c_{s,i,j} = c_{s,j,i}$. Заметим также, что для $\forall s \in \mathbb{N}$ $c_{s,1,1} = c_{s,3,3}$ и $c_{s,1,2} = c_{s,2,3}$.

Нетрудно убедиться, что для $\forall s \in \mathbb{N}$ имеют место следующие равенства:

$$c_{s,1,1} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 2r+1, \text{ где } r \in \mathbb{Z}, r \geq 0 \\ \infty, & \text{если } s = 2 \\ 2, & \text{если } s = 2r, \text{ где } r \in \mathbb{N}, r \geq 2, \end{cases}$$

$$c_{s,1,2} = \begin{cases} \infty, & \text{если } s = 1 \\ 1, & \text{если } s \in \mathbb{N}, s \geq 2, \end{cases}$$

$$c_{s,1,3} = \begin{cases} \infty, & \text{если } s = 1 \\ 2, & \text{если } s = 2r+1, \text{ где } r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{если } s = 2r, \text{ где } r \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$c_{s,2,2} = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \\ \infty, & \text{если } s = 2 \\ 2, & \text{если } s \in \mathbb{N}, s \geq 3. \end{cases}$$

Ясно, что если G – дерево с $\Delta(G) = 3$ и $\{x \in V(G)/d_G(x) = 2\} = \emptyset$, то $R(G) = 0$ и $\mu_{12}(G) = \gamma(G) + \Gamma(G)$, поэтому в остальной части работы рассматриваются деревья G с $\Delta(G) = 3$, удовлетворяющие условию $\{x \in V(G)/d_G(x) = 2\} \neq \emptyset$. Договоримся считать, что при исследовании любого такого дерева G автоматически фиксируется некоторая (произвольная) его вершина x_0 с $d_G(x_0) = 2$ и вводятся в рассмотрение следующие, однозначно определяемые выбором вершины x_0 , числа и множества.

$$v_G(x_0) \equiv \max_{z \in V^{(1)}(G)} \left| \text{int VP}_G(x_0, z) \cap V^{(3)}(G) \right|;$$

$$B(x_0, G) \equiv V^{(1)}(G) \cup V^{(3)}(G) \cup \{x_0\};$$

$$B_G(x_0, 0) \equiv V^{(1)}(G);$$

для $\forall x \in B(x_0, G) \setminus V^{(1)}(G)$ определено подмножество $\text{Post}(x_0, x, G)$ вершин дерева G следующим образом:

$$\text{Post}(x_0, x, G) \equiv \begin{cases} \{z \in B(x_0, G) / x \in \text{int } VP_G(x_0, z)\}, & \text{если } x \neq x_0 \\ B(x_0, G) \setminus \{x_0\}, & \text{если } x = x_0; \end{cases}$$

для $j = 1, 2, \dots, 1 + v_G(x_0)$ определено подмножество $B_G(x_0, j)$ множества $V^{(3)}(G)$ следующим образом:

$$B_G(x_0, j) \equiv \left\{ x \in B(x_0, G) \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} B_G(x_0, i) \mid \text{Post}(x_0, x, G) \subseteq \bigcup_{i=0}^{j-1} B_G(x_0, i) \right\}.$$

(При этом ясно, что для $\forall j_0$, где $1 \leq j_0 \leq 1 + v_G(x_0)$, и для $\forall x \in V^{(3)}(G) \cup \{x_0\}$, из соотношения $x \in B_G(x_0, j_0)$ вытекает существование двух вершин $x_{\downarrow 1}$, $x_{\downarrow 2}$ в дереве G , удовлетворяющих условиям:

- 1) $\{x_{\downarrow 1}, x_{\downarrow 2}\} \subseteq \text{Post}(x_0, x, G)$,
- 2) $\text{int } VP_G(x, x_{\downarrow i}) \cap V^{(3)}(G) = \emptyset$, где $i = 1, 2$.)

Алгоритм А вычисления для произвольного дерева G с $|V(G)| \geq 2$ числа $A(G)$, равного точному значению параметра $R(G)$.

Шаг 0. Присвоение чисел $a_1(x)$, $a_2(x)$ всем вершинам x из множества $B_G(x_0, 0)$.

Для $\forall x \in B_G(x_0, 0)$ и $\forall i, 1 \leq i \leq 2$, положить $a_i(x) \equiv 0$.

Шаг j. ($1 \leq j \leq v_G(x_0)$). Присвоение чисел $a_1(x)$, $a_2(x)$ всем вершинам x из множества $B_G(x_0, j)$. (Осуществление **Шага j** начинается тогда и только тогда, когда полностью завершены **Шаги 0, 1, ..., j-1**.)

Последовательно для всех вершин x из $B_G(x_0, j)$ положить:

$$\begin{aligned} a_1(x) &\equiv \min \left\{ \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 1}), 2, k} + a_k(x_{\downarrow 1}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 2}), 1, k} + a_k(x_{\downarrow 2}) \right\} \right\}, \\ &\quad \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 1}), 1, k} + a_k(x_{\downarrow 1}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 2}), 2, k} + a_k(x_{\downarrow 2}) \right\} \right\}, \\ a_2(x) &\equiv \min \left\{ \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 1}), 1, k} + a_k(x_{\downarrow 1}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x, x_{\downarrow 2}), 1, k} + a_k(x_{\downarrow 2}) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Ясно, что в результате выполнения **Шага** $v_G(x_0)$ будут вычислены числа $a_1(x_{0_{\downarrow 1}})$, $a_2(x_{0_{\downarrow 1}})$, $a_1(x_{0_{\downarrow 2}})$, $a_2(x_{0_{\downarrow 2}})$.

Шаг 1 + $v_G(x_0)$. Вычисление числа $A(G)$. Положить:

$$A(G) \equiv \min \left\{ \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 1}}), 1, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 2}}), 2, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}}) \right\} + 1, \right. \\ \left. \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 1}}), 2, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 2}}), 1, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}}) \right\} + 1, \right. \\ \left. \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 1}}), 1, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 1}}) \right\} + \min_{1 \leq k \leq 2} \left\{ c_{\rho_G(x_0, x_{0_{\downarrow 2}}), 1, k} + a_k(x_{0_{\downarrow 2}}) \right\} \right\}.$$

Шаг 2 + $v_G(x_0)$. Завершение алгоритма. Стоп.

Замечание 3. Корректность алгоритма **A** вытекает из определения чисел $c_{s,i,j}$ ($s \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$), их свойств, из описания шагов алгоритма **A**, из замечания 1 и из принципа динамического программирования [6].

Замечание 4. Нетрудно убедиться, что указанные до описания **Алгоритма A** вычисления чисел и множеств, связанных с выбором вершины x_0 с $d_G(x_0) = 2$ дерева G , могут быть выполнены за время $O(|V(G)|)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA. 1969.
2. Давтян Н.Н., Камалян Р.Р. О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t -цветных раскрасок «лестниц Мебиуса» при варьировании t // Сборник научных статей Годичной научной конференции (5–10 декабря 2008г.) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер., Изд-во РАУ, 2009. СС. 81–84.
3. Давтян Н.Н., Камалян Р.Р. О параметре μ_{12} дерева // Сборник научных статей Годичной научной конференции (30 ноября – 4 декабря 2009г.) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер., Изд-во РАУ, 2010. СС. 149–151.
4. Давтян Н.Н., Камалян Р.Р. О свойствах числа вершин с интервальным спектром в правильных реберных раскрасках некоторых графов // Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, № 2, 2009. СС. 33–42.
5. Давтян Н.Н. О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева // Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. Т. 32. Ер., 2009. СС. 107–111.
6. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960.

**ON AN ALGORITHM OF EVALUATION OF THE EXACT VALUE OF
THE PARAMETER μ_{12} OF AN ARBITRARY TREE**

N.N. Davtyan, R.R. Kamalian

A linear algorithm is proposed for evaluation of the exact value of the parameter μ_{12} for an arbitrary tree.

**ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԾԱՌԻ μ_{12} ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԱՐԺԵՔԻ
ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ՄԱՍԻՆ**

Ն.Ն. Դավթյան, Ռ.Ռ. Քամալյան

Առաջարկված է ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս կամայական G ծառի համար գտնել այդ ծառի μ_{12} պարամետրի ճշգրիտ արժեքը գծային ժամանակում:

СМЕШАННЫЙ ТИП ДУАЛЬНОСТИ В МНОГООБЪЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБОБЩЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

К. Петросян

*Государственный Университет Бухареста,
Бухарест, Румыния*

В этой статье рассмотрена следующая многообъектная нелинейная задача оптимизации: $(VP) \min f(x), \quad g(x) \leq 0, \quad x \in C,$
 $f = (f_1, f_2, \dots, f_p): R^n \rightarrow R^p, \quad g = (g_1, g_2, \dots, g_m): R^n \rightarrow R^m,$ где f и $g(h, \varphi)$ - дифференцируемые, а минимум надо искать по смыслу парето. Приведены теоремы смешанных дуальностей для решений этой задачи и соответствующей ей дуальной задачи, где используются как обобщенные алгебраические операции Бен-Тала, так и (h, φ) -дифференциал.

Ключевые слова. Обобщенные алгебраические операции Бен-Тала, (h, φ) -подлинейный функционал, смешанная дуальная задача, парето слабые решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для разных предположений выпуклости функций (выпуклость, обобщенная выпуклость или обобщенная ρ – выпуклость) в литературе Веир и Монд [1], Веир [2] и Егудо [3, 4] использовали понятия характерной оптимальности (англ: “properefficiency”, по смыслу Геоффриона) и оптимальности для получения некоторых результатов дуальности, где рассматриваются дуалы типа Вольфа и Монд-Веира. Василе Преда [5] определил понятие обобщенной (F, ρ) – выпуклости как продолжение для F -выпуклости, определенной Хансоном и Мондом [6], и обобщенной ρ -выпуклости, определенной Виалом [7]. Он также использовал понятие (F, ρ) – выпуклости для получения некоторых важных результатов для теории дуалов.

В этой статье мы определим смешанную дуальную задачу для задачи (VP). Дуалы же типа Вольфа или Монд-Веира являются частными случаями дуала смешанного типа. Мы получим несколько новых результатов для теории дуальности для проблемы (VP) под разными предположениями обобщенных (F, ρ) -выпуклостей.

Для простоты чтения ниже приведены некоторые определения обобщенной (F, ρ) -выпуклости из [5], использующие обобщенные алгебраические операции Бен-Тала вместо обычных:

Определение 1.1. Функционал $F : C \times C \times R^n \rightarrow R$ называется (h, φ) -подлинейным, если для любых $x, x^0 \in C$, выполняются условия

$$F(x, x^0, c_1 \oplus c_2) \leq F(x, x^0, c_1)[+]F(x, x^0, c_2), \quad \forall c_1, c_2 \in R.$$

$$F(x, x^0, \alpha \otimes c) \leq a[\bullet]F(x, x^0, c), \quad \forall a \in R, a \geq 0, c \in R^n.$$

Пусть, $F(h, \varphi)$ -сублинейный функционал а $\psi : C \rightarrow R$ является (h, φ) -дифференцируемой функцией в точке $x^0 \in C$, $\rho \in R$ и $(\bullet, \bullet) : C \times C \rightarrow R$.

Определение 1.2. Функция ψ называется (h, φ, F, ρ) выпуклой функцией в точке x^0 , если для всех $x \in C$ имеет место

$$\psi(x) - \psi(x^0) \geq F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0))[+]d^2(x, x^0)[\bullet]\rho.$$

Из вышеприведенного определения мы можем предложить следующие обобщения (h, φ, F, ρ) -выпуклости.

Определение 1.3. Функция ψ называется (h, φ, F, ρ) -квазивыпуклой в точке x^0 , если для всех $x \in C$ имеет место

$$\psi(x) \leq \psi(x^0) \Rightarrow F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0)) \leq -d^2(x, x^0)[\bullet]\rho,$$

или эквивалентно,

$$F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0)) > -d^2(x, x^0)[\bullet]\rho \Rightarrow \psi(x) > \psi(x^0)$$

Определение 1.4. Функция ψ называется (h, φ, F, ρ) -псевдовыпуклой в точке x^0 , если для всех $x \in C$ имеет место

$$F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0)) \geq -d^2(x, x^0)[\bullet]\rho \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(x^0)$$

Определение 1.5. Функция ψ называется строго (h, φ, F, ρ) -псевдовыпуклой в точке x^0 , если для всех $x \in C$, $x \neq x^0$ имеет место

$$F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0)) \geq -d^2(x, x^0)[\cdot] \rho \Rightarrow \psi(x) > \psi(x^0)$$

или эквивалентно,

$$\psi(x) \leq \psi(x^0) \Rightarrow F(x, x^0, \nabla^* \psi(x^0)) < -d^2(x, x^0)[\cdot] \rho.$$

Обозначим через X множество допустимых решений задачи (VP) , $P = \{1, 2, \dots, p\}$ и $M = \{1, 2, \dots, m\}$.

Далее, мы дадим определение новых операторов, как продолжение для обоих обобщенных операторов умножения и для одного из операторов сложения, определенных Бен-Талом.

Определение 1.6. Для двух скалярных значений $\alpha \in R$ и $\beta \in R$ скалярное произведение этих двух чисел относительно реальной функции φ Бен-Тал определил как $\alpha[\cdot]\beta = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(\beta))$. Произведение векторов $\beta \in R^k$, где $k > 1$ мы определим следующим образом:

$$\alpha[\cdot]\beta = \left[\sum_{i=1}^k \right] \alpha_i[\cdot]\beta_i.$$

Определение 1.7. Для скалярного значения $\alpha \in R$ и вектора $x \in R^n$ произведение вектора x со скалярным значением a относительно векторной функции h Бен-Тал определил как $\alpha \otimes x = h^{-1}(ah(x))$. Произведение вектора $\alpha \in R^k$ и матрицы $x \in M_{k \times n}$, где $k > 1$ мы определим следующим образом:

$$\alpha \otimes x = \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \otimes x_i$$

Определение 1.8. Для двух скалярных значений $\alpha \in R$ и $\beta \in R$ скалярное сложение этих двух чисел относительно реальной функции φ Бен-Тал определил как $\alpha[+] \beta = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha) + \varphi(\beta))$. Сложение векторов $\alpha, \beta \in R^k$, где $k > 1$, мы определим следующим образом:

$$\alpha[+] \beta = (\varphi^{-1}(\varphi(\alpha_1) + \varphi(\beta_1)), \dots, \varphi^{-1}(\varphi(\alpha_k) + \varphi(\beta_k))) \in R^k.$$

2. СМЕШАННАЯ ДУАЛЬНОСТЬ

Пусть, J_1 – некоторое подмножество множества M и $J_2 = M \setminus J_1$, $a \in R^p$, $\beta \in R^m$, и пусть, e – вектор пространства R^p , у которого все компоненты – единицы. Мы будем изучать смешанный тип дуала для задачи (VP):

$$(MDP) \begin{cases} \max f(u)[+](\beta_{J_1}[\cdot]g_{J_1}(u))e, \\ \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta \otimes \nabla^* g(u) = 0, \\ \beta_{J_2}[\cdot]g_{J_2}(u) \geq 0, \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, u \in C. \end{cases}$$

Далее в этой работе по умолчанию мы будем предполагать функцию φ строго растущей и $\varphi(0) = 0$. Также будем предполагать $h(0) = 0$ для вектор-функции h . Для получения нужных результатов нам необходимо доказать еще одно дополнительное свойство (h, φ) -дифференцируемых функций.

Лемма 2.1. Допустим, что функции $f, g : R^n \rightarrow R(h, \varphi)$ -дифференцируемые в точке x . $a \in R$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (a) $\nabla^* f(x) \oplus \nabla^* g(x) = \nabla^* (f(x)[+]g(x))$,
- (b) $\alpha \otimes \nabla^* f(x) = \nabla^* (\alpha[\cdot]f(x))$.

Доказательство: Для (a), из определения (h, φ) -дифференцируемости имеем:

$$\begin{aligned} \nabla^* f(x) &= h^{-1} \left(\nabla \hat{f}(t) \Big|_{t=h(x)} \right), \quad \hat{f}(t) = \varphi(f(h^{-1}(x))), \\ \nabla^* g(x) &= h^{-1} \left(\nabla \hat{g}(t) \Big|_{t=h(x)} \right), \quad \hat{g}(t) = \varphi(g(h^{-1}(x))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Обозначим } l(x) = f(x)[+]g(x) \text{ и рассмотрим значение для } \hat{l}(x). \\ \hat{l}(x) &= \varphi(l(h^{-1}(x))) = \varphi(f(h^{-1}(x))[+]g(h^{-1}(x))) = \\ &= \varphi(f(h^{-1}(x))) + \varphi(g(h^{-1}(x))) = \hat{f}(x) + \hat{g}(x) \end{aligned}$$

Теперь, используя приведенные утверждения, в левой части уравнения (a) мы можем получить:

$$\begin{aligned}
\nabla^* f(x) \oplus \nabla^* g(x) &= h^{-1} \left(h(\nabla^* f(x)) + h(\nabla^* g(x)) \right) = h^{-1} \left(\nabla \hat{f}(t) \Big|_{t=h(x)} + \nabla \hat{g}(t) \Big|_{t=h(x)} \right) \\
&= h^{-1} \left(\left(\nabla \hat{f}(t) + \nabla \hat{g}(t) \right) \Big|_{t=h(x)} \right) = h^{-1} \left(\nabla (\hat{f}(t) + \hat{g}(t)) \Big|_{t=h(x)} \right) = h^{-1} \left(\nabla \hat{l}(t) \Big|_{t=h(x)} \right) = \\
&= \nabla^* l(x) = \nabla^* (f(x) [+] g(x)).
\end{aligned}$$

Доказательство (а) закончено.

Для (b) обозначим $s(x) = \alpha [\cdot] f(x)$ и рассмотрим значение $\hat{s}(x)$:

$$\hat{s}(x) = \varphi \left(s(h^{-1}(x)) \right) = \varphi \left(\alpha [\cdot] f(h^{-1}(x)) \right) = \alpha \cdot \varphi \left(f(h^{-1}(x)) \right) = \alpha \cdot \hat{f}(x).$$

Теперь левую часть уравнения (b) можно раскрыть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes \nabla^* f(x) &= h^{-1} \left(\alpha h(\nabla^* f(x)) \right) = h^{-1} \left(\alpha \cdot \nabla \hat{f}(t) \Big|_{t=h(x)} \right) = h^{-1} \left(\nabla (\alpha \cdot \hat{f}(t)) \Big|_{t=h(x)} \right) = \\
&= h^{-1} \left(\nabla \hat{s}(x) \Big|_{t=h(x)} \right) = \nabla^* s(x) = \nabla^* (\alpha \cdot f(x)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. (Слабая дуальность). Допустим, что для всех допустимых решений x задачи (VP) и для всех допустимых решений (u, α, β) дуальной задачи (MDP)

(а) $\beta_{J_2} [\cdot] g_{J_2}(\cdot)$ является (h, φ, F, ρ) -квазивыпуклой в точке u и допустим, что одно из следующих условий удовлетворяется:

(б) $\alpha_i > 0$ для всех $i \in P$, и $f_i(\cdot) [+] \beta_{J_1} [\cdot] g_{J_1}(\cdot)$ является $(h, \varphi, F, \rho_{i_i})$ -квазивыпуклой и $(h, \varphi, F, \rho_{i_i})$ -псевдовыпуклой в точке u , $i \in P$ и

$$\rho [+] \alpha [\cdot] \rho_1 \geq 0.$$

(с) $\alpha_i > 0$, $i \in P$ для всех $i \in P$, и $f_i(\cdot) [+] \beta_{J_1} [\cdot] g_{J_1}(\cdot)$ является $(h, \varphi, F, \rho_{i_i})$ -квазивыпуклой в точке u и существует такой $k \in P$, что $f_k(\cdot) [+] \beta_{J_1} [\cdot] g_{J_1}(\cdot)$ является строго $(h, \varphi, F, \rho_{1k})$ -псевдовыпуклой в точке u , и

$$\rho [+] \alpha [\cdot] \rho_1 \geq 0.$$

(д) $\alpha_i > 0$ для всех $i \in P$, $\alpha [\cdot] f(\cdot) [+] \beta_{J_1} [\cdot] g_{J_1}(\cdot)$ и является (h, φ, F, ρ_2) -псевдовыпуклой в точке u , и

$$\rho [+] \rho_2 \geq 0$$

Тогда следующие условия не могут выполняться одновременно:

$$\forall i \in P, \quad f_i(x) \leq f_i(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u), \quad (1)$$

$$\exists i \in P \quad f_i(x) < f_i(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u). \quad (2)$$

Доказательство: Пусть, x – некоторое допустимое решение задачи (VP) и пусть, (u, α, β) – некоторое допустимое решение задачи (MPD). Тогда будем иметь

$$\beta_{J_2}[\cdot] g_{J_2}(x) \leq \beta_{J_2}[\cdot] g_{J_2}(u) \quad (3)$$

Из неравенства (3) и из условия (а), используя лемму 2.1 (b), получим

$$F(x, u, \beta_{J_2} \otimes \nabla^* g_{J_2}(u)) \leq -d^2(x, u)[\cdot] \rho \quad (4)$$

С другой стороны, из допустимости (u, α, β) для задачи (MPD) и из подлинейности F получим

$$\begin{aligned} & F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) [+] F(x, u, \beta_{J_2} \otimes \nabla^* g_{J_2}(u)) \geq \\ & \geq F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta \otimes \nabla^* g(u)) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Имея в виду монотонность функции φ , из (4) и (5) будем иметь:

$$F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) \geq d^2(x, u)[\cdot] \rho \quad (6)$$

Для условия (б) из подлинейности F и (6) получим

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^p \right] \alpha_i [\cdot] F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f_i(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) \geq \\ & \geq F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) \geq d^2(x, u)[\cdot] \rho \geq \\ & \geq -d^2(x, u)[\cdot] \left[\sum_{i=1}^p \right] \alpha_i [\cdot] \rho_{i_i} = - \left[\sum_{i=1}^p \right] \alpha_i [\cdot] d^2(x, u)[\cdot] \rho_{i_i} \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\alpha_i > 0$, $i \in P$, из (7) следует, что, либо

$$\forall i \in P, \quad F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f_i(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) = -d^2(x, u)[\cdot] \rho_{i_i}, \quad (8)$$

либо

$$\exists i \in P, \quad F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f_i(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) > -d^2(x, u)[\cdot] \rho_{i_i}, \quad (9)$$

Если (8) имеет место, то из условия (F, ρ_{i_i}) -псевдовыпуклости в (b) получим:

$$f_i(x)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(x) \geq f_i(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u), \quad \forall i \in P. \quad (10)$$

Так что (1) и (2) не могут выполняться, так как в (10) x должно было быть допустимым решением задачи (VP) и мы бы имели в результате

$$f_i(x) \geq f_i(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u), \quad \forall i \in P. \quad (11)$$

Если же имеет место (9), то из условия (F, p_{li}) – квазивыпуклости в (b), получим

$$\exists i \in P, f_i(x)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(x) > f_i(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u), \quad \forall i \in P, \quad (12)$$

которое означает, что (1) и (2) не могут выполняться одновременно.

Для условия (c) мы видим из вышеприведенных аргументов, что, условие строго (F, p_{lk}) -псевдовыпуклости и (8) дают в результате (12). То же самое с условием (F, p_{li}) - квазивыпуклости и (9). Значит, (1) и (2) в этом случае не могут выполняться.

Допустим теперь, что условие (d) справедливо. Снова, из (6) следует, что

$$F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) \geq -d^2(x, u)[\cdot] \rho_2 \quad (13)$$

Из условия (F, ρ_2) -псевдовыпуклости в (d), получим

$$a[\cdot] f(x)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(x) \geq a[\cdot] f(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u). \quad (14)$$

Из допустимости решения x для задачи (VP) , имеем

$$a[\cdot] f(x) \geq a[\cdot] f(u)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(u). \quad (15)$$

Последнее неравенство означает, что (1) и (2) не могут выполняться одновременно, так как $\alpha_i > 0$ для всех $i \in P$. Доказательство завершено.

В Теореме 2.1 мы пользуемся условием $\alpha_i > 0, \forall i \in P$. Конечно, без этого условия нам нужно будет предложить другое условие для получения нужных результатов, что приводит нас к следующей теореме.

Теорема 2.2. (Слабая дуальность). Допустим, что для любого допустимого решения x задачи (VP) и для любого допустимого решения (u, α, β) дуальной задачи (MPD) , выполняется одно из следующих условий:

(a) $\beta_{J_2}[\cdot] g_{J_2}(\cdot)$ является (h, φ, F, ρ) -квазивыпуклой в точке u и $f_i(\cdot)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}$ является строго $(h, \varphi, F, \rho_{li})$ -псевдовыпуклой в точке u и $i \in P$, и

$$\rho[+] \alpha[\cdot] \rho_1 \geq 0.$$

(b) $\beta_{J_2}[\bullet]g_{J_2}(\bullet)$ является (h, φ, F, ρ) -квазивыпуклой в точке u и $\alpha[\bullet]f(\bullet)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}$ является строго (h, φ, F, ρ_2) -псевдовыпуклой в точке u , и $\rho[+]\rho_2 \geq 0$.

(c) $\beta_{J_2}[\bullet]g_{J_2}(\bullet)$ является строго (h, φ, F, ρ) -псевдовыпуклой в точке u и $f_i(\bullet)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(\bullet)$ является $(h, \varphi, F, \rho_{i_i})$ -квазивыпуклой в точке u , $i \in P$ и $\rho[+]\alpha[\bullet]\rho_1 > 0$.

И для функции $d(\bullet, \bullet)$ справедливо следующее утверждение:

$$x, u \in C \text{ и } x \neq u \Rightarrow d(x, u) \neq 0, \quad (16)$$

(d) $\beta_{J_2}[\bullet]g_{J_2}(\bullet)$ является строго (h, φ, F, ρ) -псевдовыпуклой в точке u , $\alpha[\bullet]f(\bullet)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(\bullet)$ является $(h, \varphi, F, \rho_{i_i})$ -квазивыпуклой в точке u , $\rho[+]\rho_2 > 0$, а для функции $d(\bullet, \bullet)$ справедливо утверждение (16).

Тогда условия (1) и (2) не могут выполняться одновременно:

Доказательство: Для условия (a), объединяя (8) и (9), получим

$$F(x, u \otimes \nabla^* f_i(u) \oplus \beta_{J_1} \otimes \nabla^* g_{J_1}(u)) \geq -d^2(x, u)[\bullet]\rho_{i_i}, \quad i \in P \quad (17)$$

Что означает для $x \neq u$, используя условие (a),

$$f_i(x)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(x) > f_i(u)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(u), \quad i \in P \quad (18)$$

Для условия (b) имеем (13) и поэтому (14), но со строгим знаком неравенства. То есть

$$\alpha[\bullet]f(x)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(x) > \alpha[\bullet]f(u)[+]\beta_{J_1}[\bullet]g_{J_1}(u), \quad x \neq u \quad (19)$$

Для условия (c) мы сначала имеем (17) со строгим знаком неравенством для $x \neq u$, и поэтому (18).

Для условия (d) мы сначала имеем (13) со строгим знаком неравенства для $x \neq u$, и поэтому (19).

Оба из условий (18) и (19) означают, что (1) и (2) не могут выполняться одновременно, имея в виду, что x является допустимым решением задачи (VP). Доказательство теоремы завершено.

В доказательствах предыдущих двух теорем мы использовали неравенство $\beta_{J_2}[\bullet]g_{J_2}(u) \geq 0$ в условиях задачи (MDP). Если использовать это же условие со знаком равенства в задаче (MDP), можно будет доказать следующую теорему, форма которой раньше не встречалась в литературе.

Теорема 2.3. (Слабая дуальность) Допустим, что для любого допустимого решения x для задачи (VP) и для любого допустимого решения (u, α, β) для дуальной задачи (MDP) выполняется любое из следующих условий:

(а) $\alpha_i > 0$ для всех $i \in P$, $f_i(\cdot)[+] \beta_{J_1}[\cdot] g_{J_1}(\cdot)$ является (h, φ, F, ρ_i) -псевдовыпуклой и (h, φ, F, ρ_i) -квазивыпуклой в точке u , $i \in P$ и $\alpha[\cdot] \rho \geq 0$;

(б) $\alpha_i > 0$ для всех $i \in P$ и $\alpha[\cdot] f(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ является $(h, \varphi, F, 0)$ -псевдовыпуклой в u ;

(с) $f_i(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ является строго (h, φ, F, ρ_i) -псевдовыпуклой в точке u , $i \in P$ и $\alpha[\cdot] \rho \geq 0$;

(д) $\alpha[\cdot] f(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ является строго $(h, \varphi, F, 0)$ -псевдовыпуклой в точке u ;

(е) $f_i(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ является (h, φ, F, ρ_i) -квазивыпуклой в точке u , $i \in P$ и $\alpha[\cdot] \rho \geq 0$, а функция $d(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию (16);

(ф) $\alpha[\cdot] f(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ является (h, φ, F, ρ) -квазивыпуклой в точке u и $\rho > 0$, а функция $d(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию (16);

Тогда условия (1) и (2) не могут выполняться одновременно.

Доказательство: Используя $F(x, u, 0)$ в определении 1.1 и условие равенства градиентов в задаче (MDP) , получим

$$F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta \otimes \nabla^* g(u)) = 0. \quad (20)$$

Для условия (а) имеем

$$F(x, u, \alpha \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta \otimes \nabla^* g(u)) \geq \left[\sum_{i=1}^p \right] (\alpha_i[\cdot] d^2(x, u)[\cdot] \rho_i) \quad (21)$$

Аналогично строкам от (7) до (12) мы также получим (11) и (12), используя

$$\beta_{J_2}[\cdot] g_{J_2}(u) \geq 0, \beta[\cdot] g(x) \leq 0, \beta_{J_2}[\cdot] g_{J_2}(x) \leq 0, \forall x \in X. \quad (22)$$

Доказательство для условия (б) аналогично строкам от (13) до (14).

Для (с) доказательство аналогично строкам от (17) до (18), имея (18) в результате.

Для (д) из (20) и строго $(F, 0)$ -псевдовыпуклости функции $\alpha[\cdot] f(\cdot)[+] \beta[\cdot] g(\cdot)$ в u имеем:

$$\alpha[\bullet]f(x)[+]\beta[\bullet]g(x) > \alpha[\bullet]f(u)[+]\beta[\bullet]g(u), \quad x \neq u \quad (23)$$

Так что, тут тоже получится (19), используя (22).

Для (е) имеем (21) со строгим знаком неравенства для $x \neq u$, и из полинейности F имеем:

$$\exists i \in P, \quad F(x, u \nabla^* f_i(u) \oplus \beta \otimes \nabla^* g(u)) > 0, \quad (24)$$

Из условия квазивыпуклости функции $f_i(\bullet)[+]\beta[\bullet]g(\bullet)$ в точке u имеем:

$$\exists i \in P, \quad f_i(x)[+]\beta[\bullet]g(x) > f_i(u)[+]\beta[\bullet]g(u) \quad (25)$$

Так что, результат тоже верен, исходя из условий (22).

И наконец, для (f) из (20) имеем:

$$F(x, u, a \otimes \nabla^* f(u) \oplus \beta[\bullet] \nabla^* g(u)) > -d^2(x, u)[\bullet] \rho_i, \quad x \neq u \quad (26)$$

Аналогично имеем (23) и (19) Доказательство завершено.

Заметим, что (19) эквивалентно утверждению, что u является единственным оптимальным решением задачи:

$$(P)_{(u, \alpha, \beta)} \min \left[\sum_{i=1}^p \right] \left(\alpha_i[\bullet] \left(f_i(x)[+]\beta_{J_i}[\bullet] g_{J_i}(x) \right) \right)$$

То есть, результаты, полученные из условий (b) или (d) в теореме 2.2, или условий (d) или (f) в теореме 2.3, можно выразить через следующую лемму.

Лемма 2.2: Допустим, что (u, a, β) является допустимым решением для задачи (MDP) . Если u единственное решение задачи $(P)_{(u, \alpha, \beta)}$, то условия (1) и (2) не могут выполняться одновременно.

Теорема 2.4: (Сильная дуальность) Допустим, что x^0 - допустимое решение задачи (VP) , x^0 - оптимальное решение задачи (VP) и удовлетворяет условиям Кун-Такера для задачи (VP) . Тогда существуют такие α^0, β^0 , что (x^0, α^0, β^0) допустимое решение задачи (MDP) и $\beta^0[\bullet]g(x^0) = 0$. Далее, если условия слабой (VP) и (MDP) , то (x^0, α^0, β^0) -дуальности удовлетворяются (любая из Теорем 2.1, 2.2 and 2.3) между задачами является оптимальным решением задачи (MDP) .

Доказательство: Существование и допустимость решения (x^0, α^0, β^0) для задачи (MDP) $\beta^0[\bullet]g(x^0) = 0$ с (которая подразумевает $\beta_{J_i}^0[\bullet]g_{J_i}(x^0) = 0$) по-

лучаются аналогично Теореме 2.2 из [1]. Оптимальность решения (x^0, α^0, β^0) для задачи (MDP) получается аналогично Теореме 3 из [4].

Теорема 2.5. (Строго обратная дуальность). Пусть x^0 – допустимое решение задачи (VP) и пусть (u^0, α^0, β^0) – допустимое решение дуальной задачи (MDP) . Допустим, что u^0 является единственным оптимальным решением задачи $(P)_{(u^0, \alpha^0, \beta^0)}$ (или любое из условий (b) и (d) из теоремы 2.2, или (d) и (f) из теоремы 2.3), и

$$\alpha^0 [\cdot] f(x^0) = \alpha^0 [\cdot] (f(u^0)[+] \beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(u^0) e) \quad (27)$$

Тогда $u^0 = x^0$ и x^0 является оптимальным решением задачи (VP) .

Доказательство: Имеем $\beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(x^0) \leq 0$. Если $\beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(x^0) < 0$ то из (27)

$$\alpha^0 [\cdot] (f(x^0)[+] \beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(x^0) e) < \alpha^0 [\cdot] (f(u^0)[+] \beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(u^0) e). \quad (28)$$

что противоречит условию оптимальности u^0 для задачи $(P)_{(u^0, \alpha^0, \beta^0)}$. То есть мы имеем.

$$\beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(x^0) = 0 \quad (29)$$

И из (27) получим,

$$\alpha^0 [\cdot] f(x^0)[+] \beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(x^0) e = \alpha^0 [\cdot] (f(u^0)[+] \beta_{J_1}^0 [\cdot] g_{J_1}(u^0) e) \quad (30)$$

Так как u^0 является единственным оптимальным решением задачи $(P)_{(u^0, \alpha^0, \beta^0)}$,

Получим $u^0 = x^0$ из (30). Далее из леммы 2.2, (29) и из (1) и (2) не существует такой $x \in X$, чтобы $f_i(x) \leq f_i(u^0) = f_i(x^0)$ для всех $i \in P$ и $f_i(x) < f_i(x^0)$ хотя бы для одной $i \in P$; то есть x^0 оптимальна для задачи (VP) . Доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weir T., Mond B. Generalized convexity and duality in multiple objective programming, Bull. Austral. Math. Soc. 29 (1989). PP. 287–299.
2. Weir T. A duality theorem for multiple objective fractional optimization problem, Bull. Austral. Math. Soc. 34 (1986). PP. 415–425.

3. *Egudo R.R.* Efficiency and multiobjective duality in non-linear programming, *J. Inform. Optim. Sci.* 8 (1987). PP. 155–166.
4. *Egudo R.R.* Efficiency and generalized convex duality for multiobjective programs, *J. Math. Anal. Appl.* 138 (1989). PP. 84–94.
5. *Preda V.* On efficiency and duality for multiobjective programs, *J. Math. Anal. Appl.* 166 (1992). PP. 365–377.
6. *Hanson M.A., Mond B.* Further generalizations of convexity in mathematical programming, *J. Inform. Optim. Sci.* 3 (1982). PP. 22–35.
7. *Vial J.P.* Strong and weak convexity of sets and functions, *Math. Oper. Res.* 8 (1983). PP. 231–259.
8. *Mukherjee R.N.* Generalized convex duality for multiobjective fractional programs, *J. Math. Anal. Appl.* 162 (1991). PP. 309–316.
9. *Avriel M.* *Nonlinear programming: Analysis and Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1976.

MIXED DUALITY TYPE IN THE MULTIOBJECT OPTIMIZATION PROBLEMS USING GENERALIZED ALGEBRAIC OPERATIONS

K. Petrosyan

In this article we discuss the following multiobjective nonlinear problem of optimizations: $(VP) \min f(x), g(x) \leq 0, x \in C$ Where $f = (f_1, f_2, \dots, f_p): R^n \rightarrow R^p$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_m): R^n \rightarrow R^m$, f and $g(h, \varphi)$ -are differentiable functions, and minimum is meant to be taken in meaning of pareto. Some theorems of duality are obtained between solutions of this problem, and corresponding to it mixed-type dual problem, where are used concepts of generalized algebraic operations and (h, φ) -differentiability.

Keywords. Generalized algebraic operations of Ben-Tal, (h, φ) -sublinear functional, mixed-type dual problem, weak pareto solutions.

УДК 519.17

О ПАРАМЕТРАХ μ_{11} , μ_{12} И μ_{22} ПОЛНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

А.М. Хачатрян

Иджеванский филиал Ереванского Государственного Университета

Для любых натуральных чисел m и n найдены точные значения параметров μ_{11} , μ_{12} и μ_{22} полного двудольного графа $K_{m,n}$.

Ключевые слова: полный двудольный граф, реберная раскраска, интервальный спектр.

1. Введение. Обозначения, определения, цель работы

В работе рассматриваются неориентированные связные графы без кратных ребер и петель [1], содержащие хотя бы одно ребро. Множество вершин графа G обозначаем через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины x в графе G обозначаем через $d_G(x)$, наибольшую из степеней вершин графа G – через $\Delta(G)$.

Если D – непустое конечное подмножество множества N натуральных чисел, то через $l(D)$ и $L(D)$ обозначаем, соответственно, его наименьший и наибольший элемент. Непустое конечное подмножество D множества N назовем интервалом, если из $t \in N$, $l(D) \leq t \leq L(D)$ вытекает $t \in D$. Интервал D с $l(D) = q$, $|D| = h$ обозначаем через $\text{Int}(q, h)$.

Правильной реберной t -раскраской ($t \in N$) графа G назовем функцию $\varphi: E(G) \rightarrow \text{Int}(1, t)$, удовлетворяющую условиям:

1) для $\forall i$, $1 \leq i \leq t$, существует хотя бы одно ребро $e^{(i)} \in E(G)$ с $\varphi(e^{(i)}) = i$;

2) для любых двух смежных ребер $e' \in E(G)$, $e'' \in E(G)$ $\varphi(e') \neq \varphi(e'')$.

Наименьшее значение t , при котором существует правильная реберная t -раскраска графа G , обозначается через $\chi'(G)$.

Множество всех правильных реберных t -раскрасок графа G , где $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, обозначим через $\alpha(G, t)$.

Определим множество $\alpha(G)$ всех правильных реберных раскрасок графа G :

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G, t).$$

Если $\varphi \in \alpha(G)$ и $x \in V(G)$, то множество $\{\varphi(e) / e \in E(G), e \text{ смежно с } x\}$ назовем спектром вершины x графа G при раскраске φ и обозначим через $S_G(x, \varphi)$; если $S_G(x, \varphi)$ является интервалом, то скажем, что φ интервальна в x ; через $f_G(\varphi)$ обозначим число $|\{z \in V(G) / S_G(z, \varphi) \text{ является интервалом}\}|$.

$\varphi \in \alpha(G)$ назовем интервальной раскраской графа G , если $f_G(\varphi) = |V(G)|$.

Определение интервальной реберной раскраски графа было дано в [2].

Поскольку не для всех графов существует интервальная реберная раскраска (простейшим примером служит граф K_3), то возникает важная задача исследования для данного графа G поведения функции $f_G(\varphi)$ при $\varphi \in \alpha(G, t)$ и t , удовлетворяющем неравенству $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$. Изучение этой задачи было начато в [3].

Для графа G и натурального числа t , удовлетворяющего неравенству $\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|$, положим [3]:

$$\mu_1(G, t) \equiv \min_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi);$$

$$\mu_2(G, t) \equiv \max_{\varphi \in \alpha(G, t)} f_G(\varphi).$$

Для графа G положим [3]:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t);$$

$$\mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_1(G, t);$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t);$$

$$\mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G) \leq t \leq |E(G)|} \mu_2(G, t).$$

Очевидно, что параметры μ_{11} , μ_{12} , μ_{21} и μ_{22} корректно определены для любого графа. Их точные значения найдены для простых цепей, простых циклов, простых циклов с одной хордой, «лестниц Мебиуса» и для полных графов [3–5]. Точные значения параметров μ_{11} и μ_{22} для деревьев найдены в [6]. Точ-

ное значение параметра μ_{12} для деревьев найдено в [7].

Если G – граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, $\Delta(G) \leq t \leq |E(G)|$, $\xi \in \alpha(G, t)$, то для любого j , $1 \leq j \leq t$, обозначаем $E(G, \xi, j) \equiv \{e \in E(G) / \xi(e) = j\}$; ξ назовем гармонической t -раскраской графа G , если для $\forall i$, $1 \leq i \leq \Delta(G)$, подмножество

$\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq t \\ j \equiv i \pmod{\Delta(G)}}} E(G, \xi, j)$ ребер графа G является паросочетанием [1].

Пусть G – граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, $\Delta(G) \leq t \leq |E(G)|$, и ξ – его гармоническая t -раскраска. Определим последовательность $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{t-\chi'(G)}^*$ правильных реберных раскрасок графа G следующим образом:

- 1) если $t = \chi'(G)$, то $\xi_0^* \equiv \xi$,
- 2) если $t \geq \chi'(G) + 1$, то $\xi_0^* \equiv \xi$, а для $\forall j$, $1 \leq j \leq t - \chi'(G)$, и для $\forall e \in E(G)$

$$\xi_j^*(e) \equiv \begin{cases} \xi_{j-1}^*(e), & \text{если } \xi_{j-1}^*(e) \neq L(\{\xi_{j-1}^*(e) / e \in E(G)\}) \\ \xi_{j-1}^*(e) - \Delta(G), & \text{если } \xi_{j-1}^*(e) = L(\{\xi_{j-1}^*(e) / e \in E(G)\}). \end{cases}$$

Замечание 1. Пусть G – граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, $\Delta(G) \leq t \leq |E(G)|$, и ξ – его гармоническая t -раскраска. Все раскраски $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{t-\chi'(G)}^*$ определяются однозначно.

Замечание 2. Пусть G – граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, $\Delta(G) \leq t \leq |E(G)|$, и ξ – его гармоническая t -раскраска. Легко видеть, что для $\forall j$, $0 \leq j \leq t - \chi'(G)$, ξ_j^* является гармонической $(t - j)$ -раскраской графа G .

Замечание 3. Пусть G – граф с $\chi'(G) = \Delta(G)$, $\Delta(G) \leq t \leq |E(G)|$, и ξ – его гармоническая t -раскраска. Вершина $z_0 \in V(G)$ такова, что $d_G(z_0) = \Delta(G)$ и ξ интервальна в z_0 . Тогда для $\forall j$, $0 \leq j \leq t - \chi'(G)$, ξ_j^* интервальна в z_0 .

Целью работы является вычисление точных значений параметров μ_{11} , μ_{12} и μ_{22} полного двудольного графа $K_{m,n}$ при любых натуральных m и n . Для достижения цели использованы методы теории графов и теории комбинаторных алгоритмов.

Всюду в работе, при рассмотрении любого полного двудольного графа $K_{m,n}$, полагаем, что $m \geq n$, $V(K_{m,n}) = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$, $E(K_{m,n}) = \{(x_i, y_j) / 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Очевидно, при любых натуральных

$m, n \quad \chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) = m.$

2. Результаты

Утверждение 1. Для любых $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\mu_{11}(K_{m,n}) = \begin{cases} m+1, & \text{если } n=1 \\ 1, & \text{если } m=n=2 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство.

Случай 1. $n=1.$

Ясно, что $K_{m,n}$ – дерево, и поэтому в рассматриваемом случае доказываемое равенство вытекает из результатов работы [6].

Случай 2. $m=n=2.$

Ясно, что $K_{m,n} \cong C_4$, и поэтому в рассматриваемом случае доказываемое равенство вытекает из результатов работы [4].

Случай 3. $m \geq 3, n=2$ или $m \geq n \geq 3.$

Определим функцию $\varphi: E(K_{m,n}) \rightarrow \text{Int}(1, m+n-1)$. Для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, положим:

$$\varphi((x_i, y_j)) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=n, j=m \\ i+j-1, & \text{если } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1 \\ i+j, & \text{если } i=n, 1 \leq j \leq m-1 \text{ или } 1 \leq i \leq n-1, j=m. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi \in \alpha(K_{m,n}, m+n-1)$ и $f_{K_{m,n}}(\varphi) = 0$.

Утверждение 1 доказано.

Лемма. Для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \varphi \in \alpha(K_{n+1,n}, n+1)$ $f_{K_{n+1,n}}(\varphi) = n+2$.

Доказательство. Выберем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольную раскраску $\varphi \in \alpha(K_{n+1,n}, n+1)$. Ясно, что для $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $S_{K_{n+1,n}}(x_i, \varphi) = \text{Int}(1, n+1)$. Так как для $\forall \tau, 1 \leq \tau \leq n+1$, подмножество $E(K_{n+1,n}, \varphi, \tau)$ является паросочетанием мощности n в графе $K_{n+1,n}$, то для каждого из этих значений τ существует единственное $j(\varphi, \tau)$, где $1 \leq j(\varphi, \tau) \leq n+1$, для которого $\tau \notin S_{K_{n+1,n}}(y_{j(\varphi, \tau)}, \varphi)$. Отсюда, из соотношения $\varphi \in \alpha(K_{n+1,n}, n+1)$ и равенства $d_{K_{n+1,n}}(y_1) = d_{K_{n+1,n}}(y_2) = \dots = d_{K_{n+1,n}}(y_{n+1}) = n$ вытекает, что для любых τ_1, τ_2 , удовлетворяющих неравенству $1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq n+1$,

верно неравенство $j(\varphi, \tau_1) \neq j(\varphi, \tau_2)$. Отсюда следует, что $S_{K_{n+1,n}}(y_{j(\varphi,1)}, \varphi)$ и $S_{K_{n+1,n}}(y_{j(\varphi,n+1)}, \varphi)$ являются интервалами, а для $\forall \tau, 2 \leq \tau \leq n$, $S_{K_{n+1,n}}(y_{j(\varphi,\tau)}, \varphi)$ не является интервалом. Следовательно, $f_{K_{n+1,n}}(\varphi) = n + 2$.

Лемма доказана.

Утверждение 2. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\mu_{12}(K_{m,n}) = \begin{cases} m + n, & \text{если } n = 1 \text{ или } m = n \\ m + 1, & \text{если } n \neq 1 \text{ и } m - n = 1 \\ n, & \text{если } n \neq 1 \text{ и } m - n \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство.

Случай 1. $n = 1$.

В рассматриваемом случае $K_{m,n}$ – дерево, и поэтому доказываемое равенство вытекает из результатов работы [7].

Случай 2. $m = n$.

В рассматриваемом случае $K_{m,n}$ является регулярным графом, и поэтому доказываемое равенство вытекает из результатов работы [4].

Случай 3. $n \neq 1$ и $m - n = 1$.

Из леммы вытекает, что в рассматриваемом случае для $\forall \varphi \in \alpha(K_{m,n}, n+1)$ $f_{K_{m,n}}(\varphi) = n + 2$, откуда следует равенство $\mu_1(K_{m,n}, n+1) = n + 2$. Очевидно, для установления нужного равенства достаточно показать, что для $\forall t, m \leq t \leq mn$, имеет место неравенство $\mu_1(K_{m,n}, t) \leq n + 2$.

Определим функцию $\psi : E(K_{m,n}) \rightarrow \text{Int}(1, mn)$: для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq m$, положим $\psi((x_i, y_j)) \equiv (m-1)(i-1) + j$; для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $2 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq i-1$, положим $\psi((x_i, y_j)) \equiv (m-1)i + j + 1$.

Легко видеть, что ψ является гармонической mn -раскраской графа $K_{m,n}$ с $f_{K_{m,n}}(\psi) = n$.

Нетрудно убедиться, что для $\forall p, 0 \leq p \leq mn - m$, и для $\forall j, 1 \leq j \leq n-1$, $S_{K_{m,n}}(y_j, \psi_p^*)$ не является интервалом.

Следовательно, для $\forall p, 0 \leq p \leq mn - m$, $f_{K_{m,n}}(\psi_p^*) \leq n + 2$. Отсюда и из замечания 2 следует, что для $\forall t, m \leq t \leq mn$, верно неравенство $\mu_1(K_{m,n}, t) \leq n + 2$.

Случай 4. $n \neq 1$ и $m - n \geq 2$.

Очевидно, в рассматриваемом случае для $\forall \varphi \in \alpha(K_{m,n}, m)$ и $\forall i, 1 \leq i \leq n$, имеет место равенство $S_{K_{m,n}}(x_i, \varphi) = \text{Int}(1, m)$, и поэтому $f_{K_{m,n}}(\varphi) \geq n$, $\mu_1(K_{m,n}, m) \geq n$. Покажем, что $\mu_1(K_{m,n}, m) \leq n$. Очевидно, для установления последнего неравенства достаточно указать раскраску $\varphi_0 \in \alpha(K_{m,n}, m)$ с $f_{K_{m,n}}(\varphi_0) = n$.

Определим функцию $\varphi_0 : E(K_{m,n}) \rightarrow \text{Int}(1, m)$. Для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i \leq n-1, i \leq j \leq m$, положим $\varphi_0((x_i, y_j)) \equiv j-i+1$; для j , удовлетворяющих неравенству $n+1 \leq j \leq m$, положим $\varphi_0((x_n, y_j)) \equiv j-n$; для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq i-1$, положим $\varphi_0((x_i, y_j)) \equiv m-i+j+1$; для j , удовлетворяющих неравенству $1 \leq j \leq n$, положим $\varphi_0((x_n, y_j)) \equiv m-n+j$.

Легко убедиться, что $\varphi_0 \in \alpha(K_{m,n}, m)$, $f_{K_{m,n}}(\varphi_0) = n$.

Таким образом, $\mu_1(K_{m,n}, m) = n$.

Очевидно, для установления нужного равенства достаточно показать, что для $\forall t, m \leq t \leq mn$, имеет место неравенство $\mu_1(K_{m,n}, t) \leq n$.

Определим функцию $\theta : E(K_{m,n}) \rightarrow \text{Int}(1, mn)$: для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i \leq n-1, i \leq j \leq m$, положим $\theta((x_i, y_j)) \equiv (m-1)(i-1) + j$; для j , удовлетворяющих неравенству $n+1 \leq j \leq m$, положим $\theta((x_n, y_j)) \equiv m(n-1) + j - n$; для любых натуральных i, j , удовлетворяющих неравенствам $2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq i-1$, положим $\theta((x_i, y_j)) \equiv (m-1)i + j + 1$; для j , удовлетворяющих неравенству $1 \leq j \leq n$, положим $\theta((x_n, y_j)) \equiv mn - n + j$.

Легко видеть, что θ является гармонической mn -раскраской графа $K_{m,n}$, интервальной в x_i для $\forall i, 1 \leq i \leq n$. Нетрудно убедиться, что для $\forall p, 0 \leq p \leq mn - m$, и для $\forall j, 1 \leq j \leq m, S_{K_{m,n}}(y_j, \theta_p^*)$ не является интервалом. Отсюда и из замечания 3 вытекает, что для $\forall p, 0 \leq p \leq mn - m$, верно равенство $f_{K_{m,n}}(\theta_p^*) = n$. Отсюда и из замечания 2 следует, что для $\forall t, m \leq t \leq mn, \mu_1(K_{m,n}, t) \leq n$.

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Для любых $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\mu_{22}(K_{m,n}) = m + n$.

Доказательство вытекает из результатов работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
2. *Асратян А.С., Камалян Р.Р.* Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика, Вып. 5, ЕГУ, 1987. СС. 25–34.
3. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t -цветных раскрасок «лестниц Мебиуса» при варьировании t // Сборник научных статей Годичной научной конференции (5–10 декабря 2008г.) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер.: Изд-во РАУ, 2009. СС. 81–84.
4. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О свойствах числа вершин с интервальным спектром в правильных реберных раскрасках некоторых графов // Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, № 2, 2009. СС. 33–42.
5. *Хачатрян А.М.* О границах экстремумов числа вершин с интервальным спектром во множестве правильных реберных t -цветных раскрасок полных графов при варьировании t // Сборник научных статей Годичной научной конференции (6–10 декабря 2010г.) Российско-Армянского (Славянского) университета, в печати.
6. *Давтян Н.Н.* О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева // Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. Т. 32. Ер., 2009. СС. 107–111.
7. *Давтян Н.Н., Камалян Р.Р.* О параметре μ_{12} дерева // Сборник научных статей Годичной научной конференции (30 ноября – 4 декабря 2009г.) Российско-Армянского (Славянского) университета. Ер., Изд-во РАУ, 2010. СС. 149–151.
8. *Камалян Р.Р.* Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев // Препринт ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ. Ер., 1989. 11 с.

ON PARAMETERS μ_{11} , μ_{12} AND μ_{22} OF COMPLETE BIPARTITE GRAPHS

A.M. Khachatryan

For arbitrary positive integers m and n , the exact values of the parameters μ_{11} , μ_{12} , μ_{22} are found for the complete bipartite graph $K_{m,n}$.

ԼՐԻՎ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ μ_{11} , μ_{12} ԵՎ μ_{22}
ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.Մ. Խաչատրյան

Կամայական բնական m և n թվերի համար գտնված են $K_{m,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆի μ_{11} , μ_{12} , μ_{22} պարամետրերի ճշգրիտ արժեքները:

УДК 517.923, 519.85

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ГЕГЕНБАУЭРА

А.Б. Нерсесян, А.А. Гаспарян

*Институт математики НАН РА
Российско-Армянский (Славянский) университет*

В работе изучается задача ускорения сходимости разложений по ортогональным многочленам Гегенбауэра для случая, когда разлагаемая функция кусочно-непрерывна и известно только конечное число ее первых коэффициентов Фурье-Гегенбауэра и точки разрывов. Описана схема предлагаемого алгоритма и приводится соответствующий программный пакет в коде МАТНЕМАТИСА. Численные результаты характеризуют эффективность метода.

Ключевые слова: Ускорение сходимости, явление Гиббса, спектральные методы, ортогональные многочлены

1. Введение

В конце прошлого века были развиты различные методы, позволяющие «ускорять» сходимость некоторых разложений по ортогональным системам, представленным конечным числом их первых коэффициентов (см., например, [1]). В основном они касались «преодоления» явления Гиббса в случае классического ряда Фурье (или тригонометрической интерполяции), когда информация о разлагаемой кусочно-гладкой функции $f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ ограничивается заданием точек скачков и конечного числа ее коэффициентов Фурье $\{f_n\}$, $-N \leq n \leq N$, (или дискретных коэффициентов Фурье). Отметим здесь работы Д.Готтлиба с соавторами (см., например, [2]), использующие пересчет заданных коэффициентов разложений в терминах коэффициентов по системе ортогональных с весом $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $-1 \leq x \leq 1$, многочленов Гегенбауэра $C_n^\lambda(x)$, при $\lambda \approx N, N \gg 1$.

В настоящее время сформировались подходы, известные как «спектральные (псевдоспектральные) методы», позволяющие решать различные аналогичные задачи (см., например, [3]). В частности, в работе [4] был предложен «квазиполиномиальный» подход (QR-метод), основанный на

применении аппроксимации Паде к асимптотическому ряду коэффициентов Фурье, а в работе [5] КЭ-метод (см. следующий абзац) был обобщен на случай разложения гладкой функции по системе собственных функций самосопряженных граничных задач для ОДЕ с гладкими коэффициентами на конечном отрезке. В работе [6] QR -метод был распространен на разложения по собственным функциям более общих (необязательно самосопряженных) задач для ОДЕ с гладкими коэффициентами, с регулярными граничными условиями, для случая кусочно-гладких разлагаемых функций. В работе [7] «ускорялись» разложения по системе Фурье-Бесселя, соответствующей известной граничной задаче для уравнения с сингулярными коэффициентами.

Общеизвестна важная прикладная роль разложений по системам классических ортогональных полиномов, которые также порождаются граничными задачами для ОДЕ с сингулярными коэффициентами. Известно также, что в точках нарушения гладкости разлагаемой по этим полиномам кусочно-гладкой функции возникает аналог явления Гиббса (характерного в случае разложений в классический ряд Фурье) вследствие чего сходимость соответствующего разложения медленная¹. В результате, при нарушении гладкости у разлагаемой функции, для достижения требуемой точности, возникает необходимость использования большого количества коэффициентов разложений, что зачастую затрудняет практические применения. В работе [9] была исследована задача ускорения сходимости рядов по ортогональной системе полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$, $-1 \leq x \leq 1$, для кусочно-гладкой функции $f(x)$, с известными точками скачков. Здесь была применена идея ускорения сходимости классического ряда Фурье по системе $\{e^{imx}\}$, предложенная А.Крыловым (см. [10]) и развитая К. Экгофом [11] (КЭ – метод). При этом для ускорения сходимости были непосредственно использованы только скачки функции $f(x)$, хотя предварительно вычислялись и скачки первых производных (для повышения точности приближенных значений скачков самой разлагаемой функции).

В данной работе используется сходная идея для ускорения сходимости разложений по более общей, ортогональной системе полиномов Гегенбауэра. По сравнению с [9], здесь эффективно используются и скачки производных разлагаемой функции, вследствие чего достигается заметно более высокая скорость сходимости. Как следствие, требуемый в приложениях порядок ошибки достигается при заметно меньшем количестве коэффициентов Фурье-Гегенбауэра (и Лежандра, в частности).

Сначала приведем некоторые известные сведения, используемые нами в дальнейшем (см., например, [12]).

¹ Интересно отметить, что при этом «константа Гиббса» та же, что и в случае классического ряда Фурье (см. [8])

2. Полиномы Гегенбауэра

Классические ортогональные полиномы Гегенбауэра, обозначаемые $C_n^\lambda(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, где $n \geq 0$ а $\lambda > -1/2$, ортогональны в весовом пространстве $L_w^2[-1,1]$, где весовая функция w имеет вид $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

Полиномы $\{C_n^\lambda(x)\}$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}C_n^\lambda(x) \equiv (1-x^2)C_n^\lambda(x)'' - (2\lambda+1)x C_n^\lambda(x)' = -\lambda_n C_n^\lambda(x), \quad \lambda_n = n(n+2\lambda) \quad (1)$$

Справедливы следующие формулы ($|x| \leq 1$ и $\|\cdot\|_w^2$ - L_w^2 -норма, $[n/2]$ - целая часть n)

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(x) &= \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (\lambda)_{n-m} (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}, \\ (1-x^2)C_n^\lambda(x)' &= -nx C_n^\lambda(x) + (n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x) = \\ (n+2\lambda)x C_n^\lambda(x) - (n+1)C_{n+1}^\lambda(x) &= 2\lambda(1-x^2)C_{n-1}^{\lambda+1}(x), \\ 2(n+\lambda) \int C_n^\lambda(x) dx &= C_{n+1}^\lambda(x) - C_{n-1}^\lambda(x), \quad C_0^\lambda(x) = 1, \\ h_n^\lambda \equiv \|C_n^\lambda(x)\|_w^2 &= ((\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)) / ((n+\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda)^2))^{1/2}, \\ \int C_0^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx &= x {}_2F_1(1/2, 1/2 - \lambda; 3/2; x^2), \\ \int C_n^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx &= -(2\lambda(1-x^2)^{\lambda+1/2} C_{n-1}^{\lambda+1}(x)) / (n(n+2\lambda)) \quad (2) \end{aligned}$$

В последней формуле предполагается, что $n \neq -2\lambda$ и $n > 0$.

Обозначим через $S(f)_N^\lambda(x)$ частичную сумму разложения функции $f(x)$ в L_w^2 по полиномам Гегенбауэра.

$$S(f)_N^\lambda(x) = \sum_{n=0}^N (h_n^\lambda)^{-1} f_n^\lambda C_n^\lambda(x), \quad f_n^\lambda = (h_n^\lambda)^{-1} (f, C_n^\lambda(x)) \quad (3)$$

где (u, v) - скалярное произведение в весовом пространстве L_w^p .

Ряд по ортогональной системе полиномов Гегенбауэра сходится в весовом пространстве L_w^p при $\lambda > 0$, $(2\lambda+1)/(\lambda+1) < p < (2\lambda+1)/\lambda$ (см. [12]). Ниже исследуется случай, когда функция $f(x)$ и ее производная имеют лишь конечное количество точек разрывов $\{a_k\}$, $-1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < 1$, $m \geq 1$, а в остальных точках отрезка $[-1,1]$ $f(x)$, по меньшей мере, дважды дифференцируема.

3. Общая схема

3.1 Случай одной точки разрыва

Сначала предположим, что функция $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ имеет только одну точку разрыва a_1 , $-1 < a_1 < 1$ и $f(x) \in C^2[-1, a_1)$, $f(x) \in C^2(a_1, 1]$ и, кроме того $f(x)$ дважды дифференцируема в точке a_1 слева и справа. Обозначим скачок функции $f(x)$ в точке a_1 через A_0 ($A_0 = f(a_1 + 0) - f(a_1 - 0)$), а скачок ее первой производной – через A_1 ($A_1 = f'(a_1 + 0) - f'(a_1 - 0)$), где $|A_0|^2 + |A_1|^2 \neq 0$. Произведем интегрирование по частям в скалярном произведении (3), подставив в нем выражение $C_n^\lambda(x)$ из (1). В итоге получаем

$$\begin{aligned} n(n+2\lambda) \int_{-1}^1 f(x) C_n^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx = \\ A_0 (1-a_1^2)^{\lambda+1/2} C_n^\lambda(a_1)' - A_1 (1-a_1^2)^{\lambda+1/2} C_n^\lambda(a_1) - \\ \int_{-1}^{a_1} C_n^\lambda(x) ((2\lambda+1)(f(x)x(1-x^2)^{\lambda-1/2})' + (f(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2})'') dx - \\ \int_{a_1}^1 C_n^\lambda(x) ((2\lambda+1)(f(x)x(1-x^2)^{\lambda-1/2})' + (f(x)(1-x^2)^{\lambda+1/2})'') dx \quad (4) \end{aligned}$$

Отсюда следует ($n \neq 0$, $n \neq -2\lambda$), что

$$f_n^\lambda = (h_n^\lambda)^{-1} \int_{-1}^1 f(x) C_n^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx = \alpha_1(n, \lambda) + \alpha_2(n, \lambda) + \alpha_3(n, \lambda), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(n, \lambda) &= (h_n^\lambda)^{-1} n^{-1} (n+2\lambda)^{-1} A_0 (1-a_1^2)^{\lambda+1/2} C_n^\lambda(a_1)', \\ \alpha_2(n, \lambda) &= -(h_n^\lambda)^{-1} n^{-1} (n+2\lambda)^{-1} A_1 (1-a_1^2)^{\lambda+1/2} C_n^\lambda(a_1), \end{aligned}$$

а $\alpha_3(n, \lambda)$ соответствует интегралам в (4).

Определим теперь следующие две функции

$$\Psi^0(x, a_1) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ 1, & x \geq a_1 \end{cases}, \quad \Psi^1(x, a_1) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ x - a_1, & x \geq a_1 \end{cases} \quad (6)$$

Схема ускорения сходимости описывается следующими соотношениями

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^\lambda \tilde{C}_n^\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^\lambda \tilde{C}_n^\lambda(x) + A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^0 \tilde{C}_n^\lambda(x) - A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^0 \tilde{C}_n^\lambda(x) + \\ A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^1 \tilde{C}_n^\lambda(x) - A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^1 \tilde{C}_n^\lambda(x) &\cong \sum_{n=0}^N (f_n^\lambda - A_0 \psi_n^0 - A_1 \psi_n^1) \tilde{C}_n^\lambda(x) + \end{aligned}$$

$$A_1 \Psi^1(x, a_1) + A_0 \Psi^0(x, a_1), \quad (7)$$

где $\tilde{C}_n^\lambda(x) = (h_n^\lambda)^{-1} C_n^\lambda(x)$ ортонормализованный полином Гегенбауэра, а ψ_n^0 и ψ_n^1 соответственно коэффициенты Фурье-Гегенбауэра функций $\Psi^0(x, a_1)$ и $\Psi^1(x, a_1)$.

Идея данной схемы ускорения, восходящая, как было указано выше, к А. Крылову [10], заключается в том, что, для восстановления значений функции $f(x)$, вместо медленно сходящегося усеченного ряда Фурье (3) используется усеченный ряд для функции $z(x) = f(x) - A_0 \Psi^0(x, a_1) - A_1 \Psi^1(x, a_1)$, которая, по меньшей мере, дважды дифференцируема на $[-1, 1]$ и поэтому обладает более быстро сходящимся разложением. Нетрудно видеть, что эффект от такого подхода тем заметней, чем большее количество коэффициентов f_n^λ используется (т.е. $N \gg 1$).

Однако для того, чтобы мы могли использовать эту схему в случае, когда известны только точка скачка функции f и первые N ее коэффициентов f_n^λ , нам необходимо вычислить скачок A_0 функции $f(x)$ и скачок A_1 ее производной. Следуя К.Экгофу [11], скачки A_0 и A_1 вычислим приближенно, отбросив в формуле (5) величину более высокого порядка (при достаточно больших $n \approx N$) $\alpha_3(n, \lambda)$ и приравняв полученное к нулю при двух значениях $n = n_1, n_2$, $n_1 \neq n_2$. Задача, таким образом, сводится к решению линейной системы $F = M_{a_1}^\lambda A$, где

$$M_{a_1}^\lambda = \begin{pmatrix} 2\lambda C_{n_1-1}^{\lambda+1}(a_1) & -C_{n_1}^\lambda(a_1) \\ 2\lambda C_{n_2-1}^{\lambda+1}(a_1) & -C_{n_2}^\lambda(a_1) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} h_{n_1}^\lambda n_1(n_1 + 2\lambda)/(1 - a_1^2)^{\lambda+1/2} f_{n_1}^\lambda \\ h_{n_2}^\lambda n_2(n_2 + 2\lambda)/(1 - a_1^2)^{\lambda+1/2} f_{n_2}^\lambda \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Явный вид коэффициентов функции $\Psi^0(x, a_1)$ в схеме (7) получается с использованием последних двух формул в (2), но для коэффициентов функции $\Psi^1(x, a_1)$ мы пока не имеем явных формул, поэтому коэффициенты получаются путем численного интегрирования явного вида многочленов. Итак, имея первые N коэффициентов Фурье-Гегенбауэра и координату a_1 точки разрыва $f(x)$, можно эффективно ускорить сходимость разложения функции $f(x)$ по ортонормализованной системе Гегенбауэра.

3.2 Случай нескольких точек разрыва

Предположим теперь, что кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет m точек разрыва $-1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_m < 1, m \geq 1$. Тогда схема метода ускорения разложений по системе Гегенбауэра будет следующей.

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^N (f_n^\lambda - \sum_{k=1}^m (\psi_n^{0k} (\sum_{i=1}^k A_{0i}) + \psi_n^{1k} (\sum_{j=1}^k A_{1j}))) \tilde{C}_n^\lambda(x) + \sum_{k=1}^m (\Psi^{0k}(x) (\sum_{i=1}^k A_{0i}) + \Psi^{1k}(x) (\sum_{j=1}^k A_{1j})) \quad (9)$$

Где, A_{0i}, A_{1i} соответственно скачки функции и ее производной в точках разрывов $\{a_i\}$,

$$A_{0i} = f(a_i + 0) - f(a_i - 0), A_{1i} = f'(a_i + 0) - f'(a_i - 0), i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\Psi^{01}(x) = \begin{cases} 1, & a_1 < x < a_2 \\ 0, & \text{в ост. случ.} \end{cases}, \dots, \Psi^{0i}(x) = \begin{cases} 1, & a_i < x < a_{i+1} \\ 0, & \text{в ост. случ.} \end{cases}, \Psi^{0m}(x) = \begin{cases} 1, & a_m < x < 1 \\ 0, & \text{в ост. случ.} \end{cases},$$

$$\Psi^{11}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_1 \\ x - a_1, & a_1 < x < a_2 \\ a_2 - a_1, & \text{в ост. случ.} \end{cases}, \Psi^{12}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_2 \\ x - a_2, & a_2 < x < a_3, \dots \\ a_3 - a_2, & \text{в ост. случ.} \end{cases},$$

$$\Psi^{1i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_i \\ x - a_i, & a_i < x < a_{i+1}, \dots \\ a_{i+1} - a_i, & \text{в ост. случ.} \end{cases}, \Psi^{1m}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_m \\ x - a_m, & a_m < x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

В (10) $i = 1, 2, \dots, m - 1$. В схеме (9) величины ψ_n^{0i} и ψ_n^{1i} $i = 1, \dots, m - 1, n \geq 0$ являются коэффициентами Фурье-Гегенбауэра функций $\Psi^{0i}(x)$ и $\Psi^{1i}(x)$ соответственно. Необходимые приближенные значения величин A_{0i} и A_{1i} $i = 1, 2, \dots, m$ являются решениями уравнения $MA = F$, где

$$M = \begin{pmatrix} P_{n_1}^\lambda(a_1) & Q_{n_1}^\lambda(a_1) & \dots & P_{n_1}^\lambda(a_m) & Q_{n_1}^\lambda(a_m) \\ P_{n_2}^\lambda(a_1) & Q_{n_2}^\lambda(a_1) & \dots & P_{n_2}^\lambda(a_m) & Q_{n_2}^\lambda(a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n_{2m-1}}^\lambda(a_1) & Q_{n_{2m-1}}^\lambda(a_1) & \dots & P_{n_{2m-1}}^\lambda(a_m) & Q_{n_{2m-1}}^\lambda(a_m) \\ P_{n_{2m}}^\lambda(a_1) & Q_{n_{2m}}^\lambda(a_1) & \dots & P_{n_{2m}}^\lambda(a_m) & Q_{n_{2m}}^\lambda(a_m) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_{01} \\ A_{11} \\ \dots \\ A_{0m} \\ A_{1m} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} n_1(n_1 + 2\lambda) f_{n_1}^\lambda h_{n_1}^\lambda \\ n_2(n_2 + 2\lambda) f_{n_2}^\lambda h_{n_2}^\lambda \\ \dots \\ n_{2m-1}(n_{2m-1} + 2\lambda) f_{n_{2m-1}}^\lambda h_{n_{2m-1}}^\lambda \\ n_{2m}(n_{2m} + 2\lambda) f_{n_{2m}}^\lambda h_{n_{2m}}^\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} Q_n^\lambda(a) = -(1-a^2)^{\lambda+1/2} C_n^\lambda(a) \\ P_n^\lambda(a) = 2\lambda(1-a^2)^{\lambda+1/2} C_{n-1}^{\lambda+1}(a) \end{matrix}. \quad (11)$$

Замечание 1. Чтобы данная задача была однозначно и устойчиво разрешима, необходимо, чтобы не только было $DetM \neq 0$, но и чтобы число обусловленности матрицы M было не слишком велико. Теоретически мы пока не располагаем такой информацией, однако, как показывают проведенные нами (см. например, ниже пп. 4 и 5) многочисленные численные эксперименты, выбор $n_1 = N$, $n_2 = N - 1$, ..., $n_{2m} = N - 2m + 1$ вполне эффективен.

Замечание 2. В схеме, описанной, выше используются только величины скачков A_{0i} и A_{1i} , однако нетрудно убедиться, что ее можно обобщить, используя и скачки производных высоких порядков $A_{ji} = f^{(j)}(a_i + 0) - f^{(j)}(a_i - 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j \geq 3$. Соответственно, порядок матрицы M будет равен mj .

4. Численные результаты

В этом разделе приведятся результаты численных экспериментов для кусочно-гладких функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Функция $f_1(x)$ имеет одну точку разрыва $a_1 = -\pi/5$ а функция $f_2(x)$ – две точки разрыва, соответственно $a_1 = -1/5, a_2 = 1/3$.

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 < x < -\pi/5, & e^{-2x} \tan(x+3) \\ -\pi/5 \leq x < 1, & 2 \log(\sin(x)+3) \cos(3x) \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1 < x < -1/5, & 3x^2 \\ -1/5 \leq x < 1/3, & e^{2x} \\ 1/3 \leq x < 1, & \sin(x/2) \end{cases}. \quad (12)$$

Обозначим через GegA0A1 алгоритм, который работает по указанной в разделе 3 схеме (используются скачки A0 и A1). Соответственно обозначим через GegA0 алгоритм, который работает по схеме, описанной в работе [9], в применении к случаю полиномов Гегенбауэра (вычисляются скачки A0 и A1, но используется только скачок A0). Ниже приводятся таблицы разложений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для 3-х различных значений параметра Гегенбауэра λ ,

($\lambda = -1/3, 1/2, 25/3$). В каждой таблице приводятся L_w^2 ошибки и L_∞ ошибки при вычислении приближенных значений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, с использованием первых N коэффициентов Фурье-Гегенбауэра, в случаях обычного (“неускоренного”) разложения (алгоритм Classic) и с использованием алгоритмов GegA0 и GegA0A1.

Таблицы ошибок L_w^2 и L_∞ при восстановлении функции $f_1(x)$.

Таблица 1. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = -1/3$

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$3.5 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$
N = 50	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$1.7 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$13 \cdot 10^{-1}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
N = 200	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = 1/2$ (полиномы Лежандра)

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$2.8 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$
N = 50	$2 \cdot 10^{-1}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$13.5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
N = 200	$1 \cdot 10^{-1}$	$6.9 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$12.1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = 25/3$

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$14.5 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$
N = 50	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$8.5 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-1}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
N = 200	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-6}$	$13.3 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-4}$

Ниже приводятся таблицы для функции $f_2(x)$, при тех же значениях параметра λ .

Таблицы ошибок L_w^2 и L_∞ при восстановлении функции $f_2(x)$.

Таблица 4. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = -1/3$

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-1}$	$5. \cdot 10^{-2}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$
N = 50	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$4. \cdot 10^{-3}$	$2. \cdot 10^{-4}$	$8.2 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$1. \cdot 10^{-1}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$8. \cdot 10^{-1}$	$1. \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$
N = 200	$7.6 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-6}$	$8. \cdot 10^{-1}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$8. \cdot 10^{-5}$

Таблица 5. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = 1/2$ (полиномы Лежандра)

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$2. \cdot 10^{-1}$	$1. \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$9. \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$
N = 50	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-1}$	$2. \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$2. \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-1}$	$1. \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
N = 200	$7.2 \cdot 10^{-2}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$8. \cdot 10^{-1}$	$4. \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-5}$

Таблица 6. Для значения параметра Гегенбауэра $\lambda = 25/3$

кол. коэфф.-ов	L_w^2 ошибки			L_∞ ошибки		
	Classic	GegA0	GegA0A1	Classic	GegA0	GegA0A1
N = 25	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$8.32 \cdot 10^{-1}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$8. \cdot 10^{-3}$
N = 50	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$8.15 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
N = 100	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-5}$	$8.01 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$
N = 200	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$1. \cdot 10^{-5}$	$8. \cdot 10^{-1}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$

Из результатов таблиц, а также из результатов других численных экспериментов следует, что алгоритм GegA0 как минимум на один порядок уступает алгоритму GegA0A1 (при большом количестве коэффициентов – на 2,3 порядка).

Замечание 3. Значение \tilde{N} (количество коэффициентов), при котором начинают «портиться» результаты (происходит накопление ошибок) зависит от точности вычисления, чем выше порядок точности, тем больше значение \tilde{N} . В наших примерах значение \tilde{N} удовлетворяет оценке $\tilde{N} > 200$, коэффициенты вычислены с точностью WorkingPrecision $\rightarrow 250$.

5. Алгоритм ускорения

Алгоритм ускорения *GegA0A1* для случая одной точки разрыва у $f(x)$ приведен ниже в коде *MATHEMATICA 7* (см. [13]) и готов к использованию. При нескольких точках разрыва, как это следует из п. 3, существенных проблем не возникает, но соответствующая программа принимает более громоздкий вид.

```
BeginPackage["NumericalMath`GegA0A1"];
```

```
Begin["`Private`"];
```

(* В основном модуле используется вспомогательный модуль

JumpsGTwo[F_n , F_m , n , λ , a_1], который имеет 5 аргументов. Первые 2 аргумента – это коэффициенты Фурье-Гегенбауэра F_n , F_m , следующий аргумент – индекс n младшего коэффициента F_n , 4 -й аргумент - параметр Гегенбауэра λ и, наконец, последний аргумент – это точка разрыва a_1 . Функция возвращает 2-х мерный список, где первый элемент списка – это скачок A_0 функции, а второй элемент списка – скачок A_1 производной функции. Аналитические выражения скачков A_0 и A_1 были найдены решением уравнения (8). *)

```
JumpsGTwo[ $F_n$ ,  $F_m$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $a_1$ ] := Module[{ $d$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ },
```

```
 $d = C_n^\lambda(a_1)C_n^{\lambda+1}(a_1) - C_{n-1}^{\lambda+1}(a_1)C_{n+1}^\lambda(a_1);$ 
```

```
 $c = (\pi/2)^{1/2}(1 - a_1^2)^{\lambda-1/2};$ 
```

```
 $c_1 = (4^{-\lambda} \Gamma(n + 2\lambda + 1))^{1/2} / ((n + \lambda + 1)\Gamma(n + 2)\Gamma(\lambda)^2)^{1/2};$ 
```

```
 $c_2 = (4^{-\lambda} \Gamma(n + 2\lambda))^{1/2} / ((n + \lambda)\Gamma(n + 1)\Gamma(\lambda)^2)^{1/2};$ 
```

```
 $c\{(Fm(1 + n)(1 + n + 2\lambda)c_1 C_n^\lambda(a_1) - Fn(n + 2\lambda)nc_2 C_{n+1}^\lambda(a_1)) / (\lambda d),$ 
```

```
 $2((Fm(1 + n)(1 + n + 2\lambda)c_1 C_{n-1}^{\lambda+1}(a_1) - Fn(n + 2\lambda)nc_2 C_n^{\lambda+1}(a_1)) / d\}$ 
```

(* Модуль *GegA0A1*[cf , jp , λ , x] принимает в качестве аргументов список коэффициентов Фурье cf , точку разрыва функции jp , параметр Гегенбауэра λ , а также независимую переменную x , которая используется в итоговой функции, возвращаемой модулем. В алгоритме модуля предварительно находятся скачки A_0 и A_1 . *)

```
GegA0A1[ $cf$ ,  $jp$ ,  $\lambda$ ,  $x$ ] := Module[{Func,  $n$ ,  $jps$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $pcf$ ,  $fcf$ ,  $fcf0$ ,  $y$ ,  $C$ ,  $N$ ,  $L$ },
```

```
If[!ListQ[ $cf$ ] || Length[ $cf$ ] < 10,
```

```
Message[GegA0A1 :: `notlist`,  $cf$ ];
```

```
Return[]; (* проверка списка коэффициентов *)
```

```
];
```

```

If[λ ≤ -1/2 || λ | < 10-9,
Message[GegA0A1::`lambda`, λ];
Return[]; (* проверка параметра Гегенбауэра: λ *)
];
If[!(-1 < jp < 1),
Message[GegA0A1::`jumpoint`, jp];
Return[]; (* проверка точки разрыва *)
];
C[N_, L_] := ((L + N)Γ(L)2Γ(N + 1))1/2 / (π21-2LΓ(2L + N))1/2;
n = Length[cf]; (* вычисление количества коэффициентов *)
jps = JumpsGTwo[Part[cf, n - 1],
Part[cf, n], n - 2, λ, jp]; (* вычисление скачков A0 и A1 *)
A0 = Part[jps, 1]; (* нужный скачок A0 *)
A1 = Part[jps, 2]; (* нужный скачок A1 *)
fcf0 = {C[0, λ](√πΓ(λ + 1/2)/(2Γ(λ + 1)) - jp 2F1(1/2, 1/2 - λ; 3/2; jp2)};
fcf = Table[2λ(1 - jp2)λ+1/2 C[i, λ]Ci-1λ+1(jp)/(i(i + 2λ)), {i, 1, n - 1}];
fcf = Join[fcf0, fcf]; (* коэффициенты функции Ψ0 *)
pcf = Table[C[i, λ]Integrate[yCiλ(y)(1 - y2)λ-1/2, {y, jp, 1}] -
jpPart[fcf, i + 1], {i, 0, n - 1}]; (* коэффициенты функции Ψ1 *)
Func = Simplify[∑j=0n-1 C[j, λ](Part[cf, j + 1] - A0Part[fcf, j + 1] -
A1Part[pcf, j + 1])Cjλ(y)] + A0If[y < jp, 0, 1] +
A1If[y < jp, 0, y - jp];
Func /. y → x (* Возвращаемая функция от переменной x *)
]

End[];
EndPackage[];

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelb Anne. A Hybrid Approach to Spectral Reconstruction of Piecewise Smooth Functions, Journal of Scientific Computing. Vol. 15, №. 3, 2000. PP. 293–322.
2. Gottlieb D., Shu C.-W. On the Gibbs Phenomenon and its resolution, SIAM Rev., 1997. Vol. 39, №. 4. PP. 643–668.

3. Jae-Hun Jung , Sigal Gottlieb , Saeja Oh Kim , Chris L. Bresten , Daniel Higgs. Recovery of High Order Accuracy in Radial Basis Function Approximations of Discontinuous Problems, J Sci Comput, 2010, 45. PP. 359–381.
4. Нерсесян А.Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций, Доклады НАН Армении, 2004. Т. 104, № 4. СС. 186–191.
5. Show J.K., Jonson L.W., Riess R.D. Accelerating convergence of eigenfunction expansions, Math. Comp., 30, 1976. PP. 469–477.
6. Нерсесян А.Б. Ускорение сходимости разложений по собственным функциям, Доклады НАН Армении, 2007. Т. 107, № 2. PP. 124–131.
7. Нерсесян А.Б. Ускорение сходимости рядов Фурье-Бесселя для кусочно-гладких функций, Доклады НАН Армении, 2005. Т. 105, № 2. PP. 28–35.
8. Faya T.H., Hendrik Kloppers P. The Gibbs phenomenon for series of orthogonal polynomials, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Volume 37, Issue 8, 2006, PP. 973–989.
9. Нерсесян А.Б., Гаспарян А.А. Ускорение сходимости рядов по полиномам Лежандра, Доклады НАН Армении, 2011. Т. 111, № 4.
10. Крылов А. О приближенных вычислениях. Лекции, читанные в 1906г., Типография Биркенфельда. СПб., 1907.
11. Eckhoff K.S. Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions. Math. Comp. 64, № 210, 1995. PP. 671–690.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. СМБ. М.: Наука, 1971.
13. Wolfram S. The Mathematica Book, Fourth edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1999.

**ԳԵԳԵՆԲԱՈՒԵՐԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՐԱԳԱՅՈՒՄ**

Ա.Բ. Ներսեսյան, Ա.Հ. Գասպարյան

Աշխատանքում քննարկվում է Գեգենբաուների օրթոգոնալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման խնդիրը այն դեպքում, երբ վերլուծվող ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ է և հայտնի են միայն նրա Ֆուրիե-Գեգենբաուեր գործակիցները և թռիչքի կետերը: Նկարագրված է առաջարկվող ալգորիթմի սխեման եվ բերված է համապատասխան ծրագրային փաթեթը, ծրագրավորված MATHEMATICA լեզվով: Թվային արդյունքները բնութագրում են մեթոդի էֆեկտիվությունը:

Բանալի բառեր՝ Չուգամիտության արագացում, Գիբսի երևույթ, սպեկտրալ մեթոդներ, օրթոգոնալ բազմանդամներ:

CONVERGENCE ACCELERATION FOR EXPANSIONS BY GEGENBAUER POLYNOMIALS

A. Nersessian, A. Gasparyan

The problem of decomposition of convergence acceleration for series by Gegenbauer's orthogonal polynomials is being discussed when the function is piecewise continuous and only Fourier-Gegenbauer coefficients and discontinuity points are known. The scheme of the proposed algorithm is described and the appropriate software package in MATHEMATICA code is given. Numerical results characterize the effectiveness of the method.

Keywords: Convergence acceleration, Gibbs phenomenon, spectral methods, orthogonal polynomials.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

В.С. Атабекян. Строго равномерная неаменабельность свободных периодических групп.	3
П.А. Петросян. Об интервальных реберных раскрасках мультиграфов	12
К. Петросян. Достаточное условие оптимальности в (h, φ) - дифференцируемых задачах.....	22
M. Khalili, D. Asatryan. A Novel Threshold-based Image Watermarking Algorithm Using DWT2.....	33
Р.Р. Камалян. О структуре интервальных раскрасок полных двудольных графов	47
Н.Н. Давтян, Р.Р. Камалян. Об алгоритме вычисления точного значения параметра μ_{12} произвольного дерева	57
К. Петросян. Смешанный тип дуальности в многообъектных задачах оптимизации с применением обобщенных алгебраических операций.....	64
А.М. Хачатрян. О параметрах μ_{11} , μ_{12} и μ_{22} полных двудольных графов.....	76
А.Б. Нерсисян, А.А. Гаспарян. Ускорение сходимости рядов по полиномам Гегенбауэра.....	84

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила для авторов журнала «Вестник РАУ, Физико-математические и естественные науки»

Журнал печатает оригинальные статьи по различным направлениям физико-математических и естественных наук.

- К рассмотрению принимаются статьи на русском или английском языках.

- Статьи должны быть представлены в жесткой и электронной форме.

- К материалам статьи прилагается Договор с издательством РАУ, подписанный одним (ответственным) автором (оформляется в одном экземпляре).

- Статья должна иметь направление от учреждения, в котором выполнена работа. Рукопись подписывается автором (соавторами) с указанием фамилии, имени, отчества, домашнего адреса, места работы, номеров телефонов и e-mail. Необходимо указать, с кем вести переговоры и переписку. Авторы могут предложить возможных рецензентов. Отклоненные статьи не возвращаются.

- В редакцию направляются два экземпляра статьи, набранные шрифтом 12 пунктов через *два* интервала на одной стороне листа (приблизительно 30 строк на странице, 60 символов в строке). Поля с левой стороны должны быть не менее 4 см. Рукописные вставки не допускаются. Все страницы должны быть пронумерованы.

Перед текстом статьи указываются:

- название статьи;

- инициалы и фамилии авторов (для иностранных авторов на языке оригинала или на английском языке);

- название учреждения (без сокращений и аббревиатур), которое направляет статью, его адрес (город, страна);

- e-mail авторов.

Далее помещается аннотация объемом не более 0.5 машинописной страницы, которая не должна дублировать вводный или заключительный разделы. Аннотация не должна содержать литературных ссылок и аббревиатур. В конце аннотации указываются ключевые слова (keywords). Требуется также аннотация на английском языке.

- **Изложение материала** должно быть ясным и кратким, без формул и выкладок промежуточного характера и громоздких математических выражений.

- **Рисунки** представляются в двух экземплярах. Все надписи на рисунке следует давать на английском языке.

- **Формулы** следует набирать крупно, свободно и четко.

Нумерация формул должна быть сквозной по всей статье (не по разделам).

- Химические формулы, математические символы, сокращения (в том числе в индексах), единицы измерения набираются прямым шрифтом.
 - Жирным шрифтом набираются *только* векторные величины (стрелка сверху не нужна).
 - Греческие, готические и «рукописные» буквы должны легко распознаваться.
 - Все остальные символы набираются курсивом.
 - **Таблицы** должны быть напечатаны на отдельных листах, включенных в общую нумерацию текста. Обязательно наличие заголовков и единиц измерения величин. Все столбцы таблицы должны быть озаглавлены.
 - **Список литературы** должен быть набран на английском языке и оформлен следующим образом:
 - для книг – инициалы и фамилии *всех* авторов, название книги, издательство, место издания, год издания в круглых скобках, том;
 - для периодических изданий – инициалы и фамилии *всех* авторов, название журнала, том, – номера первой и последней страниц статьи, год издания в круглых скобках.
- Нумерация ссылок должна соответствовать порядку их упоминания в тексте.

