РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ
(СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ЧУБАРЯН

ЛЕКЦИИ ПО ПРЕДМЕТУ

“МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА”

Учебное пособие

Ереван-2025


HOMO RES SACRA

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ) ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա.Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

«ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ» ԹԵՄԱՅՈՎ ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Երևան–2025

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ЧУБАРЯН

ЛЕКЦИИ ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ереван–2025

УДК 510.6(042.4)
ББК 22.12я7
Ч 811

Ч 811 Чубарян А.А. Лекции по предмету «Математическая логика»: Учебное пособие / А. Чубарян. – Ер.: РАУ, 2025. – 120 с.

В пособии представлены тематические основы формальной математической логики, сопровождаемые неформальными разъяснениями основных понятий и комплектами тематических упражнений. Пособие предусмотрено для студентов, обучающихся на факультетах с математичесской направленностью

УДК 510.6(042.4)
ББК 22.12я7

ISBN 978-9939-67-378-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие представляет собой расширенное воспроизведение записей полугодового курса лекций по математической логике, читаемого автором за более-чем пятьдесят лет, студентам, обучающимся на начальных курсах университетов (ЕГУ и РАУ) по специальности «Информатика и прикладная математика». Пособие содержит сжатое изложение основ классической математической логики, приведённых в учебниках из списка цитируемой литературы, а также **Комментариев**, появившихся как разъяснения на задаваемые студентами, на первый взгляд, странными вопросами. Пособие содержит также тематические подборки задач и упражнений, которые могут быть использованы как для практических занятий, так и на письменных и устных экзаменах.

Предполагается, что пользователи данного пособия знакомы с основами теории булевых функций, теории множеств, а также теории алгоритмов.

Записи читаемых лекций предоставлены студентами разных лет обучения указанных вузов (в частности, на русском языке студентами А.Айрапетяном и А.Арамян были сделаны подробные записи и неформальные комментарии на основе видеоуроков), за что я искренне благодарю.

Выражаю также глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Юрию Мовсисяну, а также доцентам Лилит Даштоян и Анне Овакимян за полезные замечания и советы.

Анаит Чубарян

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Согласно одному из самых распространенных определений, логика есть анализ методов правильных рассуждений. Если в рамках рассуждений применяется определенный математический аппарат, то речь идет о математической логике. Мы можем сузить область математической логики, если скажем, что ее главная цель – дать точное определение понятия «математическое доказательство». Самые безупречные определения имеют малую ценность для понимания изучаемого предмета. Полноценное представление о предмете можно получить лишь начав изучать его.

Известно, что логика является основой всех остальных наук, однако самоочевидность разработанных еще Аристотелем[1] основных правил логических рассуждений не располагала к более углубленному их изучению вплоть до второй половины XXI века, когда в разных областях науки начали появляться парадоксы, то есть рассуждения, приводящие к противоречиям (с наиболее интересными из парадоксов можно ознакомиться во введениях учебников, указанных в списке литературы настоящего пособия). Начались разрабатываться пути разрешения этих парадоксов, что привело к более углубленному изучению особенностей логических умозаключений, которое и

[1] *Аристотель* – один из ярчайших представителей греческой классической философии, учитель Александра Македонского.

придало логике вид строгой математической теории, формируя предмет «математическая логика», который, в свою очередь, стал применяться к основам других математических дисциплин, делая выкладки в них более строгими, а также выявляя ряд их свойств. Таким образом, в словосочетании «математическая логика» прилагательное *математическая* имеет два смысла: во-первых, логика представлена в виде строгой математической дисциплины, во-вторых, применение ее строгих логических правил к другим математическим теориям.

В полезности и небходимости знания предмета «Математическая логика» можно убедиться рассмотрением следующих двух примеров: одного бытового и другого математического.

Знаменитый испанский писатель **Мигель де Сервантес** в своем прославленном романе «Хитроумный идальго Дон Кихот Ламанчский» описывает такую ситуацию, когда Дон Кихот и его верный ординарец Санчо Панса оказались в руках верных своему слову разбойников-людоедов, которые, прежде чем убить свои жертвы, решили развлечься. Обратившись к пленникам, сказали: мы уже решили, как мы убъем вас и предлагаем вам угадать, каким из двух способов мы это сделаем и

если угадаете, то мы вас повесим,

если не угадаете, то сожжем на костре.

Один из ответов спасает пленников, так как разбойники не в состоянии выполнить данное ими слово. Который и почему?

Не глубокое, а лишь поверхностное знание некоторых логических правил может привести к неверным умозаключениям. Например, рассмотрим выражение следующего вида $\forall x A(x) \supset A(t)$, где значениями x и t являются натуральные числа, а $A(x)$ – некоторое утверждение о натуральных числа. Кажется, что значение указанного выражения всегда верно. Действительно, если для любого натурального числа x утверждение $A(x)$ верно, то при подстановке вместо x некоторого числа t оно останется верным, если же не для всех натуральных чисел $A(x)$ верно, то в силу определения импликации выражение $\forall x A(x) \supset A(t)$ опять же будет верным. Таким образом, приведенные умозаключения, кажется, действительно обосновывают верность указанного выражения. Однако, если в качестве $A(x)$ взять выражение $\exists y(x < y)$, где значение y также натуральное число, знак $<$ общепринятое «меньше», а в качестве t взять $y + 1$, то получим выражение $\forall x \exists y(x < y) \supset \exists y(y + 1 < y)$, которое неверно. Почему такая подстановка не допустима?

Изучение предмета «Математическая логика» позволит дать ответы на вопросы приведенных примеров на основе уточнения особенностей применения ряда логических умозаключений.

Изучение математической логики стало особенно актуальным за последние два-три десятилетия в связи с задачами по созданию искусственного интеллекта, так как сначала нужно научить его думать, рассуждать и более того правильно рассуждать.

Составляющими частями изложенной в данном пособии теории являются: исчисление высказываний, исчисление предикатов и формальная арифметика, которая завершается доказанной в 1931 году знаменитой теоремой Гёделя о неполноте арифметики, которая со времени ее доказательства по настоящее время считается наилучшим математическим результатом.

В силу ограниченного времени одного семестра для некоторых теорем приводятся лишь идеи доказательств и даются ссылки на полное доказательство.

Пособие завершается рядом тематических групп упражнений, а также примерным списком экзаменационных вопросов.

ГЛАВА 1.

СИСТЕМА Σ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Превращение логики в строгий математический предмет начнем с самой простой составляющей – логики высказываний. ***Высказыванием*** называется простое утверждение, относительно содержания которого можно однозначно сказать верно оно или нет. Например,

Ереван – столица Республики Армения.
Сегодня – 30-е февраля.

А, например, выражение $x < 0$ не является высказыванием, так как его верность или неверность зависит от значения x–а.

Из простых высказываний более сложные можно получить применением логических связок: конъюнкции (и), дизъюнкции (или), импликации (если, то), отрицания (не) и других. На основе известных таблиц истинности можно определить значения более сложного выражения и выяснить является ли оно ***тавтологией*** (всегда истинно, независимо от значений своих простых составляющих), ***противоречием*** (всегда ложно, независимо от значений своих простых составляющих) или ни то, ни другое. Ту же задачу можно решить иным, так называемым аксиоматическим методом, построением соответствующей формальной системы, аксиоматической теории.

Формальная (аксиоматическая) теория T считается определенной, если:

1. Задан ее ***язык*** – алфавит, состоящий из счетного множества символов и специального множества слов в этом алфавите, называемых формулами.
2. Выделено некоторое множество формул теории T, называемых ее ***аксиомами***.
3. Имеется конечное число отношений между формулами теории T, называемых ее ***правилами вывода***.

Основные понятия

Компоненты исчисления высказываний $\sum$ следующие:

I. Язык

1. Алфавит

a. p_i с целыми положительными индексами (логические переменные).

b. $\supset$ (импликация) и $\urcorner$(отрицание).

c. () пара скобок.

2. *Формулы*

a. Любая логическая переменная p_i – формула.

b. Если A и B – формулы, то $(A \supset B)$ – тоже формула.

c. Если A формула, то $(\urcorner A)$ тоже будет формулой.

d. Других формул нет.

II. Аксиомы

Для любых формул A, B и C исчисления высказываний формулы следующих трех видов являются аксиомами:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3. $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

III. Правило вывода modus ponens (сокращённо m. p.)

$$\frac{A, \ \ A \supset B}{B}$$

Правило выражает непосредственное следствие формулы B из формул A и $A \supset B$.

Определение. Конечная последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется ***выводом*** в системе Σ, если для $\forall i \; (1 \le i \le n)$ A_i либо аксиома, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens.

Определение. Формула A называется ***выводимой*** в системе Σ, если существует хотя бы один вывод, последней формулой которого является A. Будем обозначать это утверждение через $\vdash_\Sigma A$.

Пример.

Вывод формулы $A \supset A$:

1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ акс. 1.
2) $(A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$ акс. 2.

3) $A \supset (A \supset A)$ акс. 1.

4) $\left(A \supset \left((A \supset A) \supset A\right)\right) \supset (A \supset A)$ m.p. (3,2).

5) $A \supset A$ m.p. (1, 4).

Комментарии

➢ Логические переменные p_i принимают значения «истина» или «ложь».

➢ Система логических функций $\{\supset, \urcorner\}$ функционально полна, значит, нам достаточны эти две функции для получения других известных нам функций – дизъюнкции, конъюнкции, функции Шеффера, стрелки Пирса и т.д.

➢ В определении системы Σ имеем дело именно с парой скобок (от английского слова parentheses), они нужны для приоритизации действий, для понимания, какое из действий за каким следует.

➢ Важно отметить, что формулой является не $A \supset B$, а именно $(A \supset B)$. То есть очень важно называть и писать формулу вместе с открывающимися и закрывающимися скобками, так как это часть формального алфавита языка, с помощью которого определяются слова (формулы). Еще раз, читать это нужно так: открывающаяся скобка, A влечет B, закрывающаяся скобка. Аналогично и $(\urcorner A)$. Отметим, что в формулах $(A \supset B)$ и $(\urcorner A)$ знаки $\supset$ и $\urcorner$ являются внешними знаками.

➢ Существует много разных систем аксиом, которые можно выбрать для определения нашей теории, однако, этот набор был выбран из книги Мендельсона [1]. Кстати, у читателя мог бы возникнуть вопрос: «Почему это в аксиомах внешних скобок нет?». Дело в том, что скобки были заданы именно для определения порядка операций, и в случаях, когда порядок точно известен, некоторые скобки можно опустить.

- На первый взгляд, кажется, что аксиомы – это какие-то непонятные «каракатицы», и возникают вопросы: «А что с ними делать? Как это все запомнить? Что они означают?». Но все эти вопросы быстро уходят при изменении подхода. Вместо того, чтобы все это запоминать, достаточно понимать смысловую нагрузку каждой из аксиом.

Аксиома 1: Если A верно, то оно следует из чего угодно, причем не важно посылка B перед утверждением A сама верна или нет.

Аксиома 2: На время опустим второе вхождение A и рассмотрим формулу

$$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$$

На языке булевых функций $x \wedge y \to z$ равнозначно $x \to (y \to z)$. В этом можно легко убедиться, построив таблицы истинности для обоих выражений. Тогда мы имеем: из $(A \supset B)$ и $(B \supset C)$ влечет $(A \supset C)$, а это, как легко заметить, иллюстрирует свойство транзитивности импликации. Отметим, что опущенное A несет чисто технический характер и будет использовано в будущем для облегчения доказательства одной теоремы.

Аксиома 3: Пусть теперь

$$x: (\urcorner A \supset B),$$

$$y: (\urcorner A \supset \urcorner B),\ \ z : A\text{, тогда}$$

$$x \to (y \to z): (\urcorner A \supset B) \supset ((\urcorner A \supset \urcorner B) \supset A)$$

То есть из $(\urcorner A \supset B)$ и $(\urcorner A \supset \urcorner B)$ влечет A.

Это не что иное, как иллюстрация правила доказательства от противного. Действительно, мы хотим доказать некоторое утверждение A. Если из отрицания A можем вывести некоторое утверждение B и его отрицание $(\urcorner B)$, то есть из $(\urcorner A)$ вывести противоречие, получим, что A верно.

- Отметим также, что A, B, C – это любые формулы, значит, у нас даны схемы аксиом, а не конкретные аксиомы. Например, в геометрии аксиома о том, что любые две параллельные прямые не пересекаются – не одна аксиома, а группа аксиом, ведь там не утверждается, какие именно две прямые и для любой пары своя аксиома. Так и тут: у нас не 3 аксиомы, а бесконечно много. Кстати, легко проверить, что на языке булевых функций аксиомы 1–3 будут тавтологиями.
- Правило modus ponens (m.p.) говорит о том, что если выведено A и $A \supset B$, то выведено и B.

Вывод тавтологии $A \supset A$ указывает на нетривиальность поиска вывода в нашей системе: как догадаться какие аксиомы и в каком порядке их нужно выбирать. Чтобы облегчить поиск вывода, далее мы введем дополнительные правила выводов. Указываемые справа от формул пояснения в заданном выводе называются анализом выводов. Он обязателен для облегчения понимания возникновения той или иной формулы в выводе.

Дополнительные правила вывода

Определение. Пусть $\Gamma = \{C_1, C_2, \dots, C_n\} -$ множество формул. ***Выводом из посылок*** *(сокращенно п.)* Г в системе Σ называется такая последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, что для $\forall i, (1 \leq i \leq n)$ либо A_i – аксиома, либо $A_i \in \Gamma$, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens.

Теорема (дедукции). Если из множества формул Γ и формулы A выводится формула B, то из Γ выводится $A \supset B$.

$$\frac{\Gamma, A \vdash_\Sigma B}{\Gamma \vdash_\Sigma A \supset B}$$

Доказательство: $\Gamma, A \vdash_\Sigma B$, значит

$$\begin{array}{ll} \Gamma, A & \vdash_\Sigma B_1 \\ \dots & \vdash_\Sigma B_2 \\ \dots & \\ \dots & \vdash_\Sigma B_n \end{array}$$

где B_i либо аксиома, либо $B_i \in \Gamma$, либо B_i есть A, либо получается из предыдущих по правилу modus ponens. Более того, $B_n = B$. Возьмем последовательность формул вывода B и добавим к каждой формуле $A \supset$ слева.

$$\begin{array}{c} A \supset B_1 \\ A \supset B_2 \\ \dots \\ A \supset B_n \end{array}$$

Полученная последовательность формул уже может и не быть выводом. Попытаемся дополнить ее формулами так, чтобы каждый член новой последовательности был выводим из посылок Γ.

Возможны три варианта:

1. Если B_i – аксиома, либо посылка из Γ, то перед $(A \supset B_i)$ добавив B_i и . $B_i \supset (A \supset B_i)$, получаем:

$\vdash_\Sigma B_i$ либо посылка, либо акс

$\vdash_\Sigma B_i \supset (A \supset B_i)$ акс. 1

$\vdash_\Sigma (A \supset B_i)$ m.p.

2. Если B_i – это A, тогда имеем $A \supset A$, а это мы уже умеем выводить с помощью добавления четырех формул до неё.

3. Если B_iполучается из предыдущих по правилу m.p. Тогда в первоначальном выводе B_i будут формулы B_j $(j < i)$ и $B_j \supset B_i$ из которых и выводится B_i, а значит формулы $(A \supset B_j)$ и $A \supset (B_j \supset B_i)$ уже будут выведены по предыдущим пунктам. Тогда получаем следующий вывод:

$\vdash_\Sigma A \supset B_j$ где $j < i$ по предыдущим пунктам

$\vdash_\Sigma A \supset (B_j \supset B_i)$ по предыдущим пунктам

$\vdash_\Sigma (A \supset B_j) \supset ((A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i))$ акс. 2

$\vdash_\Sigma (A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i)$ m.p

$\vdash_\Sigma A \supset B_i$ m.p.

Таким образом, мы покрыли всевозможные случаи.

Комментарии

- Если $\Gamma, A \vdash_\Sigma B$ за n шагов, тогда из Γ формула $A \supset B$ будет выводиться не более, чем за $2(n-1)+4+n = 3n+2$ шагов.
- При доказательстве теоремы дедукции важную роль играет второе вхождение формулы A во вторую аксиому.
- Теорема дедукции полезна при выводах формул вида $A \supset B$: достаточно A взять в качестве посылки и выводить B.
- Теорему дедукции нельзя применять для вывода формулы вида $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$, так как доказательство теоремы дедукции основано на выводе формул $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$. В частности, для формулы

$$(A \supset (\rceil B \supset C)) \supset (A \supset (\rceil B \supset C))$$

недопустим следующий вывод:

$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A \quad \vdash_\Sigma (\rceil B \supset C)$$
$$\underline{\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \rceil B \vdash_\Sigma C}$$

$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \rceil B \vdash_\Sigma A \text{ п.}$$
$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \neg B \vdash_\Sigma \big(A \supset (\rceil B \supset C)\big) \text{ п.}$$
$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \rceil B \quad \vdash_\Sigma \rceil B \supset C \;\; m.p.$$
$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \rceil B \;\; \vdash_\Sigma \rceil B \;\; \text{п.}$$
$$\big(A \supset (\rceil B \supset C)\big), A, \rceil B \vdash_\Sigma C \;\; m.p.$$

Два дополнительных правила – силлогизмы (сокращенно силл.)

Теорема (силлогизм 1).

$$\frac{A \supset B, B \supset C}{A \supset C}$$

Если из A следует B, и из B следует C, то из A следует C.

Доказательство. Используя теорему дедукции, достаточно доказать, что

$$A \supset B, B \supset C, A \vdash_{\Sigma} C$$

$$A \supset B, B \supset C, A \vdash_{\Sigma} A \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} A \supset B \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} B\ m.p.$$
$$\vdash_{\Sigma} B \supset C \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} C\ m.p.$$

Теорема (силлогизм 2).

$$\frac{B, A \supset (B \supset C)}{A \supset C}$$

Если имеем B и имеем из A влечкт (B влечет C), тогда из A влечет C.

Доказательство. Используя теорему дедукции, достаточно доказать, что

$$B, A \supset (B \supset C), A \vdash_{\Sigma} C:$$
$$B, A \supset (B \supset C), A \vdash_{\Sigma} A \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} A \supset (B \supset C) \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} B \supset C\ m.p.$$
$$\vdash \Sigma\ B \text{ п.}$$
$$\vdash_{\Sigma} C\ m.p.$$

«Замечательные» формулы

Утверждение. Для произвольных формул A, B следующие «замечательные» формулы (сокращенно з.ф.) выводятся в системе Σ.

(**a**) $\urcorner\urcorner B \supset B$;

(**b**) $B \supset \urcorner\urcorner B$;

(**c**) $\urcorner A \supset (A \supset B)$;

(**c**) * $A \supset (\urcorner A \supset B)$;

(**d**) $(\urcorner B \supset \urcorner A) \supset (A \supset B)$;

(**e**) $(A \supset B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner A)$;

(**f**) $A \supset (\urcorner B \supset \urcorner(A \supset B))$;

(**g**) $(A \supset B) \supset ((\urcorner A \supset B) \supset B)$.

Доказательство.

(**a**) $\vdash_\Sigma \urcorner\urcorner B \supset B$.

----

1. $(\urcorner B \supset \urcorner B) \supset ((\urcorner B \supset \urcorner\urcorner B) \supset B)$ акс. 3
2. $\urcorner B \supset \urcorner B$ выведенная формула (в.ф.)
3. $(\urcorner B \supset \urcorner\urcorner B) \supset B$ m.p.
4. $\urcorner\urcorner B \supset (\urcorner B \supset \urcorner\urcorner B)$ акс. 1
5. $\urcorner\urcorner B \supset B$ силл. 1

(**b**) $\vdash_\Sigma B \supset \urcorner\urcorner B$

----

1. $(\urcorner\urcorner\urcorner B \supset B) \supset ((\urcorner\urcorner\urcorner B \supset \urcorner B) \supset \urcorner\urcorner B)$ акс. 3
2. $\urcorner\urcorner\urcorner B \supset \urcorner B$ з.ф. (a)

3. $(\neg\neg\neg B \supset B) \supset \neg\neg B$ силл. 2
4. $B \supset (\neg\neg\neg B \supset B)$ акс. 1
5. $B \supset \neg\neg B$ силл.1

(**c**) $\vdash_\Sigma \neg A \supset (A \supset B)$

----

1. $\neg A$ п.
2. A п.
3. $A \supset (\neg B \supset A)$ акс. 1
4. $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ акс. 1
5. $\neg B \supset A$ m.p.
6. $\neg B \supset \neg A$ m.p.
7. $(\neg B \supset A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B)$ акс. 3
8. $(\neg B \supset A) \supset B$ m.p.
9. B m.p.

Остается дважды применить теорему дедукции.
Очевидно, что вывод (**c**)* аналогичен.

(**d**) $\vdash_\Sigma (\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

----

1. $\neg B \supset \neg A$ п.
2. A п.
3. $(\neg B \supset A) \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset B$ акс. 3
4. $A \supset (\neg B \supset A)$ акс. 1
5. $\neg B \supset A$ m.p.
6. $(\neg B \supset \neg A) \supset B$ m.p.
7. B m.p.

Остается дважды применить теорему дедукции.

(**e**) $\vdash_{\Sigma} (A \supset B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner A)$

----

1. $A \supset B$	п.
2. $\urcorner\urcorner A \supset A$	з.ф. (a)
3. $\urcorner\urcorner A \supset B$	силл. 1
4. $B \supset \urcorner\urcorner B$	з.ф. (**B**)
5. $\urcorner\urcorner A \supset \urcorner\urcorner B$	силл. 1
6. $(\urcorner\urcorner A \supset \urcorner\urcorner B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner A)$	з.ф. (**d**)
7. $(\urcorner B \supset \urcorner A)$	m.p.

Остается применить теорему дедукции.

(**g**) $\vdash_{\Sigma} (A \supset B) \supset ((\urcorner A \supset B) \supset B)$.

----

1. $A \supset B$	п.
2. $\urcorner A \supset B$	п.
3. $(A \supset B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner A)$	з.ф. (**e**)
4. $\urcorner B \supset \urcorner A$	m.p.
5. $(\urcorner A \supset B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner\urcorner A)$	з.ф. (e)
6. $\urcorner B \supset \urcorner\urcorner A$	m.p.
7. $(\urcorner B \supset \urcorner A) \supset ((\urcorner B \supset \urcorner\urcorner A) \supset B)$	акс. 3
8. $(\urcorner B \supset \urcorner\urcorner A) \supset B$	m.p.
9. B	m.p.

Остается дважды применить теорему дедукции.

Комментарии

➢ Отметим, что каждая из з.ф. играет важную роль в дальнейших рассмотрениях.

➢ Отметим также, что каждая из этих формул имеет смысловую нагрузку:

– Формулы $\urcorner\urcorner A \supset A$ и $A \supset \urcorner\urcorner A$ указывают на «нейтрализацию» двойного отрицания в классической логике.

– Формулы $\urcorner A \supset (A \supset B)$ и $A \supset (\urcorner A \supset B)$ указывают на «никчемность» теории, в которой можно вывести некоторую формулу A и ее отрицание, так как в этом случае из указанных формул можно вывести произвольную формулу B, которая может быть любой бессмыслицей.

– Формулы $(A \supset B) \supset (\urcorner B \supset \urcorner A)$ и $(\urcorner B \supset \urcorner A) \supset (A \supset B)$ указывают на взаимосвязь между импликацией и отрицанием.

– Формула $A \supset (\urcorner B \supset \urcorner(A \supset B))$ указывает на случай ложности импликации.

– Формула $(A \supset B) \supset ((\urcorner A \supset B) \supset B)$ утверждает, что если B следует и из A и из $\urcorner A$, то на самом деле B не зависит от этих посылок.

Теорема о полноте и непротиворечивости исчисления высказываний

Как гласит подзаголовок мы докажем два важных свойства исчисления высказываний и увидим в будущем как они меняются для более сложных систем. Но для начала докажем одну важную лемму.

Лемма (Кальмара[2]). Пусть формула $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ содержит логические переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, , \ldots, \sigma_n)$ – некоторый набор истинностных значений этих переменных из n-мерного единичного куба $\mathbf{E^n}$, тогда из посылок $p_1{}^{\sigma_1}, p_2{}^{\sigma_2}, \ldots, p_n{}^{\sigma_n}$ выводится $A^{A(\sigma_1, \sigma_2, , \ldots, \sigma_n)}$, т.е.

$$p_1{}^{\sigma_1}, p_2{}^{\sigma_2}, \ldots, p_n{}^{\sigma_n} \vdash_\Sigma A^{A(\sigma_1, \sigma_2, , \ldots, \sigma_n)}$$

где

$$p_i{}^{\sigma_i} = \begin{cases} p_i, & \sigma_i = 1 \\ \neg p_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}$$

Доказательство. Доказывать будем индукцией по количеству логических операций в формуле A, то есть по количеству вхождений импликаций и отрицаний в формуле A. Обозначим это количество через k.

Базис индукции. Пусть $k = 0$. Тогда, если в формуле нет ни одной логической операции, то она будет сама переменная $A = p_i$. Если $\sigma_i = 0$, то $\neg p_i \vdash_\Sigma \neg p_i$. При $\sigma_i = 1$ имеем $p_i \vdash_\Sigma p_i$:

Допущение индукции. Допустим утверждение леммы верно для всех формул, в которых количество логических операций не превышает k.

[2] *Ласло Кальмар* – венгерский математик, член Венгерской АН. Основные исследования относятся к кибернетике, теории математических машин, математической логике, основаниям математики, математическим проблемам кибернетики. Работы в области машинных языков и теории программирования.

Шаг индукции. Докажем для формул, в которых количество логических операций равно $k+1$. Возможны следующие случаи:

а) $A = \neg A_1$, тогда A_1 содержит k логических операций, следовательно, по допущению индукции лемма для нее верна. Возьмем произвольный набор $(\sigma_1, \dots \sigma_n)$.

$$A(\sigma_1, \dots \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow A_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0 \quad (i) \\ 0 & \Rightarrow A_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1 \quad (ii) \end{cases}:$$

В случае (i) по допущению индукции

$$p_1{}^{\sigma_1}, p_2{}^{\sigma_2}, \dots, p_n{}^{\sigma_n} \vdash_\Sigma \neg A_1$$

но $\neg A_1$ и есть A.

В случае (ii) по допущению индукции

$p_1{}^{\sigma_1}, p_2{}^{\sigma_2}, \dots, p_n{}^{\sigma_n} \vdash_\Sigma A_1$, тогда:

$$\vdots$$

$$\vdash_\Sigma A_1 \supset \neg\neg A_1 \quad \text{з.ф. (B)}$$

$$\vdash_\Sigma \neg\neg A_1, \quad \text{m.p.}$$

но $\neg\neg A_1$ и есть $\neg A$.

б) $A = A_1 \supset A_2$, где и в A_1 и в A_2 количество логических операций не превышает k, следовательно, по допущению индукции лемма для них верна. Возьмем набор $\sigma = (\sigma_1, \dots \sigma_n)$. Возможны следующие три подслучая:

(i) $A_1(\sigma) = 0$ $\qquad A(\sigma) = 1$

(ii) $A_1(\sigma) = 1, A_2(\sigma) = 0$ $\qquad A(\sigma) = 0$

(iii) $A_2(\sigma) = 1$ $\qquad A(\sigma) = 1$

В случае (i) по допущению индукции

$$p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_\Sigma \neg A_1$$

$$\vdots$$

$$\vdash_\Sigma \neg A_1 \supset (A_1 \supset A_2) \quad \text{з.ф. (c)}$$

$$\vdash_\Sigma A_1 \supset A_2 \quad \text{m.p.},$$

но $A_1 \supset A_2$ и есть A.

В случае (ii) по допущению индукции

$$
\begin{aligned}
p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \quad & \vdash_\Sigma A_1 \\
& \vdash_\Sigma \neg A_2 \\
& \vdots \\
& \vdash_\Sigma A_1 \supset (\neg A_2 \supset \neg(A_1 \supset A_2)) && \text{з.ф. (f)} \\
& \vdash_\Sigma \neg A_2 \supset \neg(A_1 \supset A_2) && \text{m.p.} \\
& \vdash_\Sigma \neg(A_1 \supset A_2) && \text{m.p.}
\end{aligned}
$$

но $\neg(A_1 \supset A_2)$ и есть $\neg A$.

В случае (iii) по допущению индукции

$$
\begin{aligned}
p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \quad & \vdash_\Sigma A_2 \\
& \vdash_\Sigma A_2 \supset (A_1 \supset A_2) && \text{акс. 1.} \\
& \vdash_\Sigma A_1 \supset A_2 && \text{m.p.}
\end{aligned}
$$

но $A_1 \supset A_2$ и есть A.

Лемма доказана.

Теорема основная

1) Любая формула, выводимая в системе Σ, является тавтологией.

2) Любая тавтология выводима в Σ.

Докажем пункт 1). Пусть A выводимая формула, значит существует ее вывод. Каждая формула вывода либо аксиома, либо получается из предыдущих по правилу m.p., но ведь каждая аксиома – тавтология, а результат применения правила m.p. к тавтологиям является тавтологией.

Докажем пункт 2). Так как $A(p_1, \dots p_n) \equiv 1$, то, согласно лемме Кальмара, для любого набора $\sigma = (\sigma_1, \dots \sigma_n)$ имеем $p_1^{\sigma_1}, \dots, p_n^{\sigma_n} \vdash_\Sigma A$.

Продемонстрируем доказательство теоремы для $n = 3$, т.е. имеем $A(p_1, p_2, p_3) \equiv 1$:

$$
\begin{array}{ccccl}
p_1 & p_2 & p_3 & & \\
 & & & & \\
0 & 0 & 0 & \multirow{2}{*}{} \begin{cases} \neg p_1 \quad \neg p_2 \quad \neg p_3 \vdash_{\Sigma} A \\ \neg p_1 \quad \neg p_2 \quad p_3 \vdash_{\Sigma} A \end{cases} & \\
0 & 0 & 1 & & \\
0 & 1 & 0 & \begin{cases} \neg p_1 \quad p_2 \quad \neg p_3 \vdash_{\Sigma} A \\ \neg p_1 \quad p_2 \quad p_3 \vdash_{\Sigma} A \end{cases} & \\
0 & 1 & 1 & & \\
1 & 0 & 0 & \begin{cases} p_1 \quad \neg p_2 \quad \neg p_3 \vdash_{\Sigma} A \\ p_1 \quad \neg p_2 \quad p_3 \vdash_{\Sigma} A \end{cases} & \\
1 & 0 & 1 & & \\
1 & 1 & 0 & \begin{cases} p_1 \quad p_2 \quad \neg p_3 \vdash_{\Sigma} A \\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \vdash_{\Sigma} A \end{cases} & \\
1 & 1 & 1 & &
\end{array}
$$

Цель – освободиться от посылок.

Все наборы посылок разбиты на пары, в которых первые две посылки совпадают. К наборам первой пары применим теорему дедукции:

$\neg p_1, \neg p_2 \ \vdash_{\Sigma} \neg p_3 \supset A$ т.д.

$\neg p_1, \neg p_2 \ \vdash_{\Sigma} p_3 \supset A$ т.д.

$\vdots$

$\vdash_{\Sigma} (p_3 \supset A) \supset ((\neg p_3 \supset A) \supset A)$ з.ф. (g)

$\vdash_{\Sigma} (\neg p_3 \supset \mathrm{A}) \supset \mathrm{A}$ m.p.

$\vdash_{\Sigma} \mathrm{A}$ m.p.

Следовательно, $\neg p_1, \neg p_2 \vdash_{\Sigma} A$, т.е удалось освободиться от третьей посылки. Поступая аналогично с тремя остальными парами, получим:

$$
\begin{cases} \neg p_1, \neg p_2 \ \vdash_{\Sigma} A \\ \neg p_1, p_2 \ \vdash_{\Sigma} A \end{cases}
\qquad
\begin{cases} p_1, \neg p_2 \ \vdash_{\Sigma} A \\ p_1, p_2 \ \vdash_{\Sigma} A \end{cases}
$$

Продолжая процесс освобождения от посылок, приходим к конечному виду без посылок $\vdash_{\Sigma} A$.

Очевидно, что описанный процесс освобождения от посылок можно проделать для любого значения n, следовательно пункт 2) теоремы доказан, а значит, и вся теорема доказана.

Определение. Формальная теория называется ***непротиворечивой*** (просто непротиворечивой), если в ней ни для какой формулы A нельзя вывести A и $\neg A$.

Определение. Формальная теория называется ***полной*,** если любое верное утверждение (тавтология для исчисления высказываний) в ней выводимо.

Определение. Формальная теория называется ***разрешимой***, если существует алгоритм с помощью которого для любой формулы можно проверить выводима она в ней или нет.

Следствие (из основной теоремы). Система Σ непротиворечива, полна и разрешима.

Доказательство. Непротиворечивость следует из пункта 1), а полнота – из пункта 2) основной теоремы. Разрешимость также очевидна, так как, согласно обоим пунктам теоремы, достаточно проверить является формула тавтологией или нет.

Правила введения и удаления логических операций

Учитывая, что в нашей обиходной речи мы используем связки «и» и «или», обогатим нашу систему–введением логических связок & (конъюнкция) и $\vee$ (дизъюнкция) следующим способом:

$$A \,\&\, B \;\equiv\; \urcorner(A \;\supset \urcorner B), \qquad A \vee B \;\equiv\; \urcorner A \supset B.$$

В нижеприведенной таблице в столбце «введение» указывается способ выведения формулы с указанным внешним символом, а в столбце «удаление» указывается на возможность выведения из формул с указанным внешним символом.

Логические знаки	Введение	Удаление
$\supset$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \supset B}$ Теорема дедукции	$\Gamma, A, A \supset B \vdash_{\Sigma} B$ modus ponens
&	1. $\dfrac{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \text{ и } \Gamma \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \,\&\, B}$	2. $\Gamma, A \,\&\, B \vdash_{\Sigma} A$ $\Gamma, A \,\&\, B \vdash_{\Sigma} B$
$\vee$	3. $\dfrac{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \text{ или } \Gamma \vdash_{\Sigma} B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A \vee B}$	4. $\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} C \text{ и } \Gamma, B \vdash_{\Sigma} C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{\Sigma} C}$
$\urcorner$	5. $\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\Sigma} B \text{ и } \Gamma, A \vdash_{\Sigma} \urcorner B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} \urcorner A}$	6. $\dfrac{\Gamma, \urcorner A \vdash_{\Sigma} B \text{ и } \Gamma, \urcorner A \vdash_{\Sigma} \urcorner B}{\Gamma \vdash_{\Sigma} A}$ по аксиоме 3.

Для обоснования допустимости применения этих правил достаточно показать, что

1. $\vdash_{\Sigma}$ A ⊃ (B ⊃ A & B то есть $\vdash_{\Sigma}$ $\mathbf{A} \supset (\mathbf{B} \supset \urcorner(\mathbf{A} \supset \urcorner\mathbf{B}))$
2. $\vdash_{\Sigma}$ A & B ⊃ A то есть $\vdash_{\Sigma}$ $\urcorner(\mathbf{A} \supset \urcorner\mathbf{B}) \supset \mathbf{A}$
   $\vdash_{\Sigma}$ A & B ⊃ B то есть $\vdash_{\Sigma}$ $\urcorner(\mathbf{A} \supset \urcorner\mathbf{B}) \supset \mathbf{B}$
3. $\vdash_{\Sigma}$ A ⊃ A ∨ B то есть $\vdash_{\Sigma}$ $A \supset (\urcorner A \supset B)$ з.ф. (с)*
   $\vdash_{\Sigma}$ B ⊃ A ∨ B то есть $\vdash_{\Sigma}$ $B \supset (\urcorner A \supset B)$ акс. 1
4. $\vdash_{\Sigma}$ $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$ то есть
   $\vdash_{\Sigma}$ $(\mathbf{A} \supset \mathbf{C}) \supset ((\mathbf{B} \supset \mathbf{C}) \supset ((\urcorner\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset \mathbf{C}))$
5. $\vdash_{\Sigma}$ $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \supset ((\mathbf{A} \supset \urcorner\mathbf{B}) \supset \urcorner\mathbf{A})$

Таким образом, достаточно вывести (самостоятельно) отмеченные Bold-ом пять формул, а затем применить теорему дедукции и правило m.p. один или два раза.

Независимость схем аксиом исчисления высказываний

Определение. Подмножество М множества всех аксиом данной теории называется ***независимым,*** если какая-нибудь формула из М не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в М.

Теорема. Каждая из схем аксиом исчисления высказываний Σ независима.

Доказательство. Так как у нас три схемы аксиом, то у нас три непересекающихся подмножества всевозможных аксиом. Очевидно, что перебором всевозможных выводов не решить задачу независимости этих подмножеств. Воспользуемся другим методом, а именно, для каждой из схем аксиом опишем некое «отличительное свойство», которым обладают все формулы двух других схем применение правила $m.p.$ сохраняет это свойство и не каждая формула первоначально выбранной схемы аксиом этим свойством обладает, а значит она не может быть выведена из формул двух других схем аксиом. Но тогда будет доказано, что из множества аксиом этих двух схем аксиом, множество аксиом выбранной изначально схем аксиом не зависима.

а) Начнем со схемы аксиом 3, так как только в ней присутствует внешнее отрицание. Для произвольной формулы A исчисления высказываний обозначим через $h(A)$ формулу, которая получается стиранием всех отрицаний в формуле A. Назовем тавтологию A *«хорошей»*, если $h(A)$ также тавтология. Нетрудно убедиться, что отображение $h(A)$ обладает следующими свойствами.

- $h(A \supset B) = h(A) \supset h(B)$,
- $h(\urcorner A) = h(A)$,
- применение правила $m.p.$ сохраняет свойство «хорошая»,
- если A – произвольная аксиома первой схемы аксиом, то $h(\text{A})$ – тавтология,
- если A – произвольная аксиома второй схемы аксиом, то $h(\text{A})$ – тавтология.

Однако среди аксиом третьей схемы есть и не «хорошие», например, если рассмотреть аксиому A: $(\urcorner p_1 \supset$

$p_1) \supset ((\urcorner p_1 \supset \urcorner p_1) \supset \urcorner p_1)$, то $h(A)$ есть формула $(p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \supset p_1) \supset p_1)$, которая принимает значение 0 при $p_1 = 0$, а значит не все формулы множества аксиом третьей схемы являются хорошими, следовательно, **третья схема аксиом независима от первых двух.**

Для доказательства независимости первой и второй схем аксиом определим «отличительные свойства», основываясь на трёхзначную логику.

б) Для доказательства независимости первой схемы аксиом рассмотрим следующие таблицы для отрицания и импликации в трёхзначной логике для произвольных формул A и B:

A	$\urcorner A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \supset B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Очевидно, что при любом распределении значений $0, 1, 2$ переменных, входящих в формулу, эти таблицы позволяют найти соответствующее значение формулы. Формулу назовём «*хорошей*», если она всегда принимает значение 0. Нетрудно убедиться, что всякая аксиома, получаемая по второй или третьей схеме является «хорошей», а также применение правила $m.p.$ сохраняет свойство «хорошая», следовательно, «хорошей» должна быть любая формула, выводимая из аксиом второй или третьей схем. Однако, формула $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$, являющаяся частным случаем первой схемы аксиом не «хорошая», так как принимает значение 2 при $p_1 = 1$ и $p_2 = 2$.

в) Для доказательства независимости второй схемы аксиом рассмотрим другие таблицы для отрицания и импликации в трёхзначной логике для произвольных формул A и B:

A	$\urcorner A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \supset B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

Формулу назовем *«хорошей»,* если согласно этим таблицам она всегда принимает значение 0. Нетрудно убедиться, что всякая аксиома, получаемая по первой или третьей схеме является *«хорошей»*, а также применение правила $m.p.$ сохраняет свойство *«хорошая»*, следовательно, хорошей должна быть любая формула, выводимая из аксиом первой или третьей схем. Однако формула $(p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset (p_1 \supset p_3))$, являющаяся частным случаем второй схемы аксиом не «хорошая», так как принимает значение 2 при $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ и $p_3 = 1$.

Теорема полностью доказана.

На этом мы завершаем изучение исчисления высказываний. Очень важно хорошо понимать и представлять эту формальную теорию так как дальше мы будем строить более сложные теории оприраясь на эту теорию.

Дополнения

Хотя система аксиом Σ и весьма проста, существует много других также хорошо работающих систем. Вместо $\urcorner$ и $\supset$ можно использовать любые другие функционально полные системы логических связок (смотри русское издание [1] стр. 48–51) .

Например,

$\boldsymbol{L_1}$: Логические связки $\vee$ и $\urcorner$, а $A \supset B$ служит записью для $\urcorner A \vee B$.

Четыре схемы аксиом:

1. $A \vee A \supset A$
2. $A \supset A \vee B$
3. $A \vee B \supset B \vee A$
4. $(B \supset C) \supset (A \vee B \supset A \vee C)$

Единственное правило вывода – modus ponens.

$\boldsymbol{L_2}$: Логические связки & и $\urcorner$: $A \supset B$ служит записью для $\urcorner(A \& \urcorner B)$.

Три схемы аксиом:

1. $A \supset (A \& A)$;
2. $(A \& B) \supset A$;
3. $(A \supset B) \supset (\urcorner(B \& C) \supset \urcorner(C \& A))$

Единственное правило вывода – modus ponens.

$\boldsymbol{L_3}$: Эта система очень похожа на систему Σ. Разница состоит в том, вместо трех схем аксиом здесь присутствуют три конкретные аксиомы:

1. $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$;
2. $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$;
3. $(\urcorner p_2 \supset \urcorner p_1) \supset ((\urcorner p_2 \supset p_1) \supset p_2)$,

Но кроме $m.p.$ имеется еще одно правило вывода – правило **подстановки**, которое позволяет подстановку любой формулы вместо всех вхождений некоторой переменной данной формулы.

$\boldsymbol{L_4}$: Логические связки $\supset, \&, \vee$ и $\urcorner$÷ . Единственное правило вывода – modus ponens. Схемы аксиом следующие:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset B) \supset (A \supset C))$;
3. $A \,\&\, B \supset A$;
4. $A \,\&\, B \supset B$;
5. $A \supset \big(B \supset (A \& B)\big)$;
6. $A \supset (A \vee B)$;
7. $B \supset (A \vee B)$;
8. $(A \supset \mathrm{C}) \supset \Big((B \supset \mathrm{C}) \supset \big((A \vee B) \supset \mathrm{C}\big)\Big)$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \rceil B) \supset \urcorner A)$;
10. $\urcorner\urcorner A \supset A$

$A \equiv B$ означает $((A \supset B) \& (B \supset A)$:

Упражнения

1. Доказать, что

$(a) A \supset B \vdash_{L_1} C \vee A \supset C \vee B$;

(b)$\vdash_{L_1} (A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$;

(c)$C \supset A, A \supset B \vdash_{L_1} C \supset B$;

(d)$\vdash_{L_1} \boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{A}$ **(**т. е. $\vdash_{\boldsymbol{L_1}} \urcorner A \vee A$)

(e)$\vdash_{L_1} A \vee \urcorner A$;

(f)$\vdash_{L_1} A \supset \urcorner\urcorner A$;

(g)$\vdash_{L_1} \urcorner B \supset (B \supset C)$;

(h)$\vdash_{L_1} A \vee (B \vee C) \supset ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$;

(i)$\vdash_{L_1} (B \vee (A \vee C)) \vee A \supset B \vee (A \vee C)$;

(j)$\vdash_{L_1} A \vee (B \vee C) \supset B \vee (A \vee C)$;

(k)$\vdash_{L_1} (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$;

(l)$\vdash_{L_1} (C \supset A) \supset ((A \supset B) \supset (C \supset B))$;

(m)$A \supset (B \supset C), A \supset B \vdash_{L_1} A \supset (A \supset C)$;

(n)$A \supset (B \supset C), A \supset B \vdash_{L_1} A \supset C$;

(o)если $\Gamma, A \vdash_{L_1} B$, то $\Gamma \vdash_{L_1} A \supset B$ (теорема дедукции);

(p)$B \supset A, \urcorner B \supset A \vdash_{L_1} A$;

(q)$\vdash_{L_1} A$ тогда и только тогда, когда A есть тавтология.

2. Доказать, что

(a)$A \supset B, B \supset C \vdash_{L_2} \urcorner(\urcorner C \& A)$;

(b)$\vdash_{L_2} \urcorner(A \& A)$;

(c)$\vdash_{L_2} \urcorner\urcorner A \supset A$;

(d)$\vdash_{L_2} \urcorner(A \& B) \supset (B \supset \urcorner A)$;

(e)$\vdash_{L_2} A \supset \urcorner\urcorner A$;

(f)$\vdash_{L_2}(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A)$;

(g)$\neg A\supset\neg B\vdash_{L_2} B\supset A$;

(h)$A\supset B\vdash_{L_2} C\&A\supset B\&D$;

(i)$A \supset B, B \supset C, C \supset D \vdash_{L_2} A \supset D$;

(j)$\vdash_{L_2} A\supset A$;

(k)$\vdash_{L_2} A\&B\supset B\&A$;

(l)$A\supset B, B\supset C\vdash_{L_2} A\supset C$;

(m)$A\supset B, C\supset D\vdash_{L_2} A\&C\supset B\&D$;

(n) $B\supset C\vdash_{L_2} A\& B\supset A\&C$;

(o) $\vdash_{L_2}(A\supset(B\supset C))\supset((A\&B)\supset C)$;

(p) $\vdash_{L_2}((A\&B)\supset C)\supset(A\supset(B\supset C))$;

(q)$A\supset B, A\supset(B\supset C)\vdash_{L_2} A\supset C$;

(r) $\vdash_{L_2} A\supset(B\supset A\&B)$;

(s) $\vdash_{L_2} A\supset(B\supset A)$;

(t) если $\Gamma, A\vdash_{L_2} B$, то $\Gamma\vdash_{L_2} A\supset B$ (теорема дедукции);

(u) $\vdash_{L_2}(\neg A\supset A)\supset A$;

(v)$A\supset B, \neg A\supset B\vdash_{L_2} B$;

(w) $\vdash_{L_2} A$ тогда и только тогда, когда A есть тавтология.

3. Доказать, что

(a) $\vdash_{L_4} A\supset A$;

(b) если $\Gamma, A\vdash_{L_4} B$, то $\Gamma\vdash_{L_4} A\supset B$ (теорема дедукции);

(c)$A \supset B, B \supset C \vdash_{L_4} A \supset C$;

(d) $\vdash_{L_4}(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$;

(e) $B, \neg B \vdash_{L_4} C$;

(f) $\vdash_{L_4} B \supset \neg\neg B$;

(g) $\vdash_{L_4} \neg B \supset (B \supset C)$;

(h) $\vdash_{L_4} B \supset (\urcorner C \supset \urcorner(B \supset C))$;
(i) $\vdash_{L_4} \urcorner B \supset (\urcorner C \supset \urcorner(B \vee C))$;
(j) $\vdash_{L_4} (\urcorner B \supset A) \supset ((B \supset A) \supset A)$;
(k) $\vdash_{L_4}$А тогда и только тогда, когда A есть тавтология.

Для исчисления высказываний могут быть построены системы с одной схемой аксиом.

Например, если взять связки $\urcorner$ и $\supset$, то с одним правилом вывода $m.p.$ – достаточно схемы (Мередит)

$$[((A \supset B) \supset (\urcorner C \supset \urcorner D)) \supset E] \supset [(E \supset A) \supset (D \supset A)]$$

Другим таким примером является система Никода, где единственной связкой является штрих Шеффера (дизъюнкция отрицаний). Схема аксиомы

$$(A|(B|C))|\{[D|(B|D)]\,|[(E|B)|((A|E)|(A|E))]\}$$

И единственное правило вывода: C выводится из A и $A|(B|C)$.

ГЛАВА 2.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ Р

Убедимся, что существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках исчисления высказываний. Пусть, например, имеем следующие три простых высказывания:

1. Армен является братом Ануш.
2. Сурен является братом Ануш.
3. Армен и Сурен – братья.

Очевидно, что из истинности первых двух следует истинность третьего. Если мы попытаемся записать это умозаключение в виде формулы исчисления высказываний $p_1 \& p_2 \supset p_3$, то она не является тавтологией, поскольку каждая пропозициональная переменная принимает значения вне зависимости от значений остальных, но здесь мы имели высказывания относительно повторяющихся субъектов и, следовательно, значения переменных должны быть взаимосвязаны. Тут имеем дело в двумя отношениями, т.е. предикатами: $P_1(x, y)$ «x является братом y» *и* $P_2(x, y)$ « x и y братья».

Тогда для любых x, y, z выражение

$P_1(x, y) \,\&\, P_1(z, y) \supset P_2(x, z)$ будет истинным.

Далее в математике (да и не только) мы часто используем выражение «для любого натурального числа», т.е. «для 1» и «для 2» и «для 3» и т.д., но в формулах не может быть бесконечного числа знака &, а значит нам понадобиться новый знак $\forall$ – квантор всеобщности. Аналогично, мы часто используем выражение «существует натуральное число», т.е. «для 1» или «для 2» или «для 3» и т.д., но в формулах не может быть бесконечного числа знака ∨, а значит нам понадобится новый знак ∃ – квантор существования. Следует отметить, что знак ∀ – перевернутая буква A (начальная буква слова Any или All) и ∃ – перевернутая буква E (начальная буква слова Exist).

Таким образом, наша первая формальная система – исчисление высказываний нуждается в существенном обогащении.

Определение исчисления предикатов *P*

I. Язык

1. **Алфавит**

a. $\supset, \urcorner, \forall$, ( )

b. $a_i,\ 1 \leq\ i$ – предметные константы, множество которых может быть пустым, конечным или бесконечным.

c. $x_i,\ 1 \leq i$ – предметные переменные, множество которых всегда бесконечное.

d. $f_i^{l_i}, 1 \leq i$ – функциональные переменные, где нижний индекс является номером функции, а верхний – размерность функции (количество переменных). Данное множество может быть пустым, конечным или бесконечным. Если множество функциональных переменных пустое, то такая теория называется ***чистым исчислением*** предикатов.

e. $P_i^{k_i}, 1 \leq i$ – предикатные переменные, где нижний индекс является номером предиката, а верхний – размерность предиката (количество переменных). Данное множество не может быть пустым.

2. **Терм**

f. Каждая предметная константа a_i есть терм.

g. Каждая предметная переменная x_i есть терм.

h. Если $f_i^{l_i}$ – функциональная переменная и $t_1, t_2, \ldots t_{l_i}$ термы, то $f_i^{l_i}(t_1, t_2, \ldots t_{l_i})$ тоже терм.

i. Иных термов нет.

3. **Элементарная формула**

Если $P_i^{k_i}$ – предикатная переменная, а $t_1, t_2, \ldots t_{k_i}$ – термы, то $P_i^{k_i}(t_1, t_2, \ldots t_{k_i})$ является элементарной формулой.

4. **Формулы**

a. Элементарная формула является формулой.

b. Если A и B – формулы, то $(A \supset B)$ является формулой.

c. Если A – формула, то $(\urcorner A)$ является формулой.

d. Если A – формула и x_i – предметная переменная, то $(\forall x_i A)$ – формула (при этом, фомула A является областью действия квантора).

e. Иных формул нет.

Комментарий

Частица ***мета*** (греческое **μετά)** сложных слов имеет много значений, в частности, понимается как переход в иное состояние, видоизменение. В нашей дисциплине, кроме понятий «переменная», «терм», «формула», «теорема формальных теорий», мы будем пользоваться теми же понятиями вне формальных теорий и будем называть их, соответственно, *мета*-переменная, *мета*-терм, *мета*-формула, *мета*-теорема. Чтобы каждый раз не оговаривать эту ситуацию, переменные формальной теории будем писать с наклоном, а мета-переменные – прямым шрифтом. Соответственно, термы, формулы, теоремы формальных теорий будем писать с наклоном. Напомним, что теоремами формальной теории являются выводимые в ней формулы (выражаемые ими утверждения), а утверждения о каких-то свойствах самих формальных теорий, доказываемые вне теорий (например, об их полноте, непротиворечивости, разрешимости и прочих свойствах) являются метатеоремами.

Для лучшего представления понятий «терма» и «элементарная формула» рассмотрим известную алгебраическую формулу $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Проставим все скобки в правой части: $\left(x^2 + \left(\left(2(xy)\right) + y^2\right)\right)$, и у нас будет равенство двух термов. Давайте рассмотрим какие функциональные и предикатные переменные тут использовались.

$$f_1^2(x,y)\colon x+y,\quad f_2^2(x,y)\colon x\cdot y,\qquad f_3^1(x)\colon x^2,$$
$$P_1^2(t_1,t_2)\colon t_1 = t_2$$

Тогда наша элементарная формула формально будет иметь вид:

$$P_1^2(f_3^1(f_1^2(x_1,x_2)),f_1^2\left(f_3^1(x_1),f_2^2(2,f_2^2(x_1,x_2)),f_3^1(x_2)\right))$$

Прежде, чем введем аксиомы рассмотрим несколько новых понятий.

Определение. ***Вхождение*** переменной x_i в формулу A называется ***связанным***, если эта переменная стоит непосредственно после квантора или находится в области действия квантора по данной переменной.

Определение. ***Вхождение*** переменной называется ***свободным***, если оно не связанное.

Определение. ***Переменная*** называется ***свободной*** в формуле A, если имеет хотя бы одно свободное вхождение.

Определение. Формула называется ***замкнутой***, если в ней нет свободных переменных, т.е. если все их вхождения связанные.

Определение. Терм t называется ***свободным для подстановки*** в формулу $A(x)$ вместо переменной x , если x свободна в формуле $A(x)$ и терм *t* не содержит ни одной переменной в области квантора, по которой находится свободное вхождение переменной x.

Отметим, что если в $A(x)$ нет кванторов, то любой терм свободен для подстановки в нее.

Например, в формуле

$$\forall x_3(\forall x_1(P_1^2(x_1, x_2) \supset \neg P_1^2(x_3, x_2))) \supset \forall x_2 \, P_1^2(x_1, x_2)$$

- первое и второе вхождения x_1 связанные, а третье – свободное;
- первое и второе вхождения x_2 свободные, а третье и четвертое – связанные;
- оба вхождения x_3 связанные.

Таким образом, переменные x_1 и x_2 свободные в указанной формуле, а x_3 – не свободная.

Терм $t = x_1 + 1$ свободен для подстановки только вместо x_1, а терм $t = x_1 + x_2$ не свободен для подстановки ни для какой переменной.

Интерпретация формулы

Формулы имеют смысл только тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в них символов.

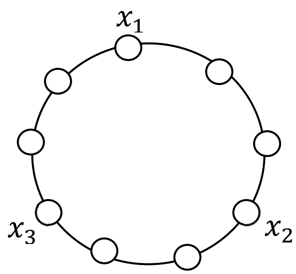
Примеры

а) $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$

- Если здесь значениями переменных являются числа, точка понимается как умножение, а знак $=$ как равенство, то значением этой формулы всегда будет «истина».
- Если здесь значениями переменных являются матрицы, точка понимается как умножение, а знак = как равенство, то значением этой формулы не всегда будет «истина».

б) $x_1 < x_2 \supset (x_2 < x_3 \ \supset x_1 < x_3)$ и $x_1 < x_2 \supset (x_2 < x_3 \ \supset \ x_3 < x_1)$

- Если здесь значениями переменных являются числа, а знак $<$ понимается как «меньше», то значением первой формулы всегда будет «истина», а значение второй может быть «ложью».
- Если значениями переменных будут точки на окружности нижеприведённого рисунка, а знак $<$ между точками понимается следующим образом: вторая находится от первой на расстоянии одной трети окружности по часовой стрелке, то верной становится уже вторая формула.



Определение. Пусть *M* множество формул исчисления предикатов. Задать ***интерпретацию*** данного множества означает:

- Выбрать предметную область.
- Если в этих формулах есть предметные константы, то указываем какие предметы из данной области соответствуют этим константам.

- Если в этих формулах есть функциональные переменные, то указываем какие функции на данной предметной области им соответствуют.
- Для каждой предикатной переменной нужно указать какое отношение ей соответствует.

Определение. Формула называется ***выполнимой*** при данной интерпретации, если существует такой набор значений ее свободных переменных, на котором эта формула принимает значение «истина».

Определение. Формула называется ***тавтологией*** в данной интерпретации, если для любого набора значений свободных переменных эта формула принимает значение «истина».

Определение. Формула называется ***противоречием*** в данной интерпретации, если для любого набора значений свободных переменных эта формула принимает значение «ложь».

Пример.

Пусть множество M состоит из одной формулы

$$P_1^2(f_1^2(x_1, f_2^2(x_2, x_3)), f_2^2(f_2^2\ (f_1^2\ (x_1, x_2), f_1^2\ (x_1, x_3)), a_1))$$

Зададим три разные интерпретации:

Первая интерпретация

1. В качестве предметной области возьмем множество всех неотрицательных чисел N;

2. Единственная предметная константа a_1 есть 0;

3. Функциональным переменным f_1^2 и f_2^2 сопоставим соответственно функции $x \cdot y$ и $x + y$;

4. Предикатной переменной P_1^2 сопоставим отношение равенства $t_1 = t_2$. Тогда получаем тавтологию

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 0$$

Вторая интерпретация

1. В качестве предметной области возьмем множество всех неотрицательных чисел N;

2. Единственная предметная константа a_1 есть 0;

3. Функциональным переменным f_1^2 и f_2^2 сопоставим соответственно $x + y$ и $x \cdot y$;

4. Предикатной переменной P_1^2 сопоставим отношение равенства $t_1 = t_2$.

Тогда получаем выполнимую формулу

$$x_1 + x_2 \cdot x_3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \cdot 0$$

Третья интерпретация

1. В качестве предметной области возьмём множество всех неотрицательных чисел N;

2. Единственная предметная константа a_1 есть 0;

3. Функциональным переменным f_1^2 и f_2^2 сопоставим соответственно функции $x \cdot y$ и $x + y$;

4. Предикатной переменной P_1^2 сопоставим отношение неравенства $t_1 > t_2$.

Тогда получаем противоречие

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) > x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 0.$$

Определение. Формула называется ***логически общезначимой*** или ***универсальной тавтологией***, если она является тавтологией при любой интерпретации.

Пример.

1. $A \supset A$
2. $A \supset (B \supset A)$
3. Любая формула, имеющая вид тавтологии в исчислении высказываний.

Очевидно, что аксиомами теории должны быть универсальные тавтологии.

II. **Аксиомы**

Для любых формул A, B и C исчисления предикатов формулы следующих видов являются **логическими** аксиомами:

1. $A \supset (B \supset A)$.
2. $(A \supset B) \supset \Big(\big(A \supset (B \supset C)\big) \supset (A \supset C)\Big)$.
3. $(\neg A \supset B) \supset \big((\neg A \supset \neg B) \supset A\big)$.
4. $\forall x A(x) \supset A(t) *$ (если терм t свободен для подстановки вместо x в A).
5. $\forall x (A \supset B) \supset (A \supset \forall x B) **$ (если переменная x не свободна в A).

III. **Правила вывода**

1. modus ponens $\frac{A,\ A \supset B}{B}$
2. Generalization (Gen) $\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$

Замечание. Обратим внимание на то, что первые три схемы аксиом выдают универсальные тавтологии, в то время, как третья и четвертая схемы обеспечивают тавтологичность лишь при указанных ограничениях. Вспомним приведенный во Введении пример, в котором не выполнено ограничение * на 4-ую схему, в силу чего выражение стало ложным.

Понятия вывода, выводимости формулы, вывода из посылок в данной системе аналогичны тем же понятиям, определённым в исчислении высказываний.

Построенная система служит логической основой любых математических (и не только) теорий, но каждая из далее построенных теорий будет пополнена также своими собственными аксиомами.

Теорема дедукции для исчисления предикатов

Теорема. Пусть Г множество формул и А – формула, тогда если из Г и А выводится В и в этом выводе не используется правило Gen, по какой-либо свободной переменной формулы А, тогда из Г выводится А ⊃ В. Формально:

$$\frac{\Gamma, \mathrm{A} \vdash_P B}{\Gamma \vdash_P \mathrm{A} \supset B}$$

Доказательство. $\Gamma, \mathrm{A} \vdash_P B$, значит

$$\Gamma, A \vdash_P B_1$$
$$\vdash_P B_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\vdash_P B_n,$$

где B_i либо аксиома, либо $B_i \in \Gamma$, либо совпадает с A, либо получается из предыдущих по правилам $m.p.$ или Gen, и B_n *есть* B. Добавим к каждой формуле $A \supset$ слева.

$$A \supset B_1$$
$$A \supset B_2$$
$$\ldots$$
$$A \supset B_n.$$

Полученная последовательность формул может и не быть выводом. Попытаемся дополнить так, чтобы каждый член новой последовательности был выводим. Возможны следующие четыре подслучая:

1. Если B_i аксиома или одна из формул Г, тогда перед $(A \supset B_i)$ добавив B_i и $B_i \supset (A \supset B_i)$, получаем

$\vdash_P B_i$ посылка из Г либо акс.

$\vdash_P B_i \supset (A \supset B_i)$ акс. 1.

$\vdash_P (A \supset B_i)$ $m.p.$

2. Если B_i – это A, тогда имеем $A \supset A$, а это мы уже умеем выводить с помощью добавления четырех формул до неё в исчислении высказываний. Для исчисления предикатов доказательство аналогично, так как используемые там первая и вторая схемы аксиом присутствуют и в исчислении предикатов.

3. Если B_i получается из предыдущих по правилу $m.p.$, тогда в первоначальном выводе подвывод B_i будет иметь такой вид

$\vdash_P B_j \quad j < i$
$\vdash_P B_j \supset B_i$
$\vdash_P B_i$ $m.p.$

Если добавить $A \supset$ слева этих формул, то $A \supset B_j$ и $A \supset (B_j \supset B_i)$ уже будут выведены по предыдущим пунктам. Тогда получаем следующий подвывод.

$\vdash_P (A \supset B_i)$, где $j < i$ по предыдущим пунктам.
$\vdash_P A \supset (B_j \supset B_i)$, по предыдущим пунктам.
$\vdash_P (A \supset B_j) \supset ((A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i))$ акс. 2
$\vdash_P (A \supset (B_j \supset B_i)) \supset (A \supset B_i)$ $m.p.$
$\vdash_P (A \supset B_i)$ $m.p.$

4. Если B_i получается из предыдущих по правилу Gen. Это значит, что имеем некую формулу $B_k,\ k < i,$ а $B_i \equiv \forall x B_k$. По пунктам 1, 2 и 3 имеем, что $A \supset B_k$ выводится. Тогда перед $A \supset B_i$ добавим.

$\vdash_P \forall x(A \supset B_k)$ $Gen.$
$\vdash_P \forall x(A \supset B_k) \supset (A \supset \forall x B_k)$ $**$ акс.5
$\vdash_P A \supset \forall x B_k$ $m.p.$

но по ограничению ** имеем, что переменная x не должна быть свободной в формуле A, откуда и условное ограничение в формулировке теоремы.

Таким образом, мы покрыли всевозможные случаи.

Замечание. В различных литературных источниках можно встретить и более слабое ограничение. Но для дальнейшего понимания курса данного ограничения будет достаточно. Более того, с этим ограничением, мы имеем полный аналог теоремы дедукции для исчисления высказываний, так как там не было правила $Gen.$, а значит, все, что там было доказано, здесь «наследуется», в частности, дополнительные правила силлогизма, правила введения и удаления логических символов.

Правила введения и удаления кванторов

Здесь в алфавите был введен лишь квантор всеобщности $\forall$, а квантор существования $\exists$ вводится следующим естественным образом $\exists\, x\, A(x) \equiv \urcorner\forall x \urcorner A(x)$

Квантор	Введение	Удаление
$\forall$	$\dfrac{A(x)}{\forall x A(x)}$ Правило Gen	1. $\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}\ *$
$\exists$	2. $\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}\ *$	3. $\dfrac{\exists x A(x)}{A(x)}\ **$

Обоснуем правила 1.-3., учитывая указанные ограничения.

1. $\forall x A(x) \vdash_P A(t)$

$\vdash_P \forall x A(x)$ посылка

$\vdash_P \forall x A(x) \supset A(t)\ *$ акс. 4.

$\vdash_P A(t)$ $m.p.$

2. $A(t) \vdash_P \urcorner\forall x \urcorner A(x)$

Учитывая правило введения отрицания:

$$A(t), \forall x \neg A(x) \vdash_P \forall x \neg A(x) \qquad \text{посылка}$$

$$\vdash_P \neg A(t) * \qquad \text{удаление } \forall$$

$$\vdash_P A(t) \qquad \text{посылка}$$

$$A(t) \vdash_P \neg \forall x \neg A(x) \qquad \text{введение } \neg$$

3. $\neg \forall x \neg A(x) \vdash_P A(x)$

$$\neg \forall x \neg A(x), \neg A(x) \vdash_P \neg A(x) \qquad \text{посылка}$$

$$\vdash_P \forall x \neg A(x) \qquad \text{Gen по переменной } x$$

$$\vdash_P \neg \forall x \neg A(x) \qquad \text{посылка}$$

$$\neg \forall x \neg A(x) \vdash_P A(x) \qquad \text{удаление } \neg,$$

для чего применяется теорема дедукции, откуда и возникает ограничение **, указанное в правиле.

Дополнительное правило вывода Choice (C)

В математических доказательствах часто используются умозаключения следующего типа. Если доказано утверждение вида $\exists\, x\, A(x)$ и b – объект, для которого верно утверждение $A(b)$, то продолжаем выкладки, используя $A(b)$, т.е. сделав выбор /Choice/, приходим к конечному утверждению, которое не содержит выбранное b, а значит от него не зависит. Переход в выводе от формулы $\exists x\, A(x)$ к формуле $A(b)$ называется правилом выбора или **С-правилом.** Нетрудно убедиться, что при наличии некоторых естественных ограничений на вывод с применением С-правила его можно преобразовать в вывод той же конечной формулы уже без применения С-правила (см.[1]).

Продемонстрируем на примерах вывод одной и той же формулы и с применением С-правила и без его применения. Пусть нужно доказать, что

$$\exists x\big(B(x) \supset C(x)\big), \forall x B(x) \vdash \exists x C(x)$$

С применением С-правила:

1. $\exists x(B(x) \supset C(x))$ посылка
2. $B(b) \supset C(b)$ С-правило
3. $\forall x B(x)$ посылка
4. $B(b)$ удаление $\forall$ *
5. $C(b)$ $m.p.$
6. $\exists x C(x)$ введение $\exists$ **

Без применения С-правила:

Чтобы вывести $\exists x C(x)$, т.е. $\urcorner\forall x \urcorner C(x)$, достаточно без отрицания перевести в посылку и вывести противоречие.

1. $\forall x B(x)$ посылка
2. $\forall x \urcorner C(x)$ посылка
3. $B(x)$ удаление $\forall$ *
4. $\urcorner C(x)$ удаление $\forall$ *
5. $B \supset (\urcorner C \supset \urcorner(B \supset C))$ з.ф. (f)
6. $\urcorner C \supset \urcorner(B \supset C)$ $m.p.$
7. $\urcorner(B \supset C)$ $m.p.$
8. $\forall x \urcorner(B(x) \supset C(x))$ введение $\forall$, т.е. мы получили
   $\forall x B(x), \forall x \urcorner C(x) \ \vdash_P \forall x \urcorner(B(x) \supset C(x))$
9. $\forall x B(x) \vdash_P \forall x \urcorner C(x) \supset \forall x \urcorner(B(x) \supset C(x))$

теорема дедукции

$\vdash_P (\forall x \urcorner C(x) \supset \forall x \urcorner\big(B(x) \supset C(x)\big)) \supset$

$(\urcorner\forall x \urcorner(B(x) \supset C(x)) \supset \urcorner\forall x \urcorner C(x))$ з.ф. (e)

$\forall x B(x) \vdash_P \neg\forall x \neg\big(B(x) \supset C(x)\big) \supset \neg\forall x \neg C(x)$ $\quad$ $m.p.$

$\forall x B(x) \vdash_P \exists x(B(x) \supset C(x)) \supset \exists x C(x)$

краткая запись той же формулы

$\vdash_P \exists x(B(x) \supset C(x))$ первоначальная посылка

$\vdash_P \exists x C(x)$ $m.p.$

Получили $\exists x\big(B(x) \supset C(x)\big), \forall x B(x) \vdash_P \exists x C(x)$

Рассмотренные примеры показывают, что применение дополнительного С-правила, как и любого дополнительного правила вывода, может существенно сократить количество шагов выводов.

Предваренная нормальная форма

Для дальнейшего изучения ряда свойств исчисления предикатов введём некоторые понятия.

Определение. Для разных переменных x_i и x_j формулы $A(x_i)$ и $A(x_j)$ называются ***подобными***, если $A(x_i)$ имеет свободные вхождения переменной x_i точно в тех местах, где находятся свободные вхождения переменной x_j в формуле $A(x_j)$**.**

Утверждение (о переименовании связной переменной (**псп.)**) Если формулы $A(x_i)$ –и $A(x_j)$ подобны и $\vdash_P \forall x_i\, \mathrm{A}(x_i)$, то $\vdash_P \forall x_j\, \mathrm{A}(x_j)$,**:**

Доказательство

$\vdash_P \forall x_i \mathrm{A}(x_i)$

$\vdash_P \forall x_i \mathrm{A}(x_i) \supset \mathrm{A}(x_j)$ акс. 4.

(ограничение * имеет место)

$\vdash_P \mathrm{A}(x_j)\; m.p.$

$\vdash_P \forall x_j \mathrm{A}(x_j)\; Gen.$

Определение. Формула A называется формулой в **предваренной нормальной форме,** если она имеет вид $Rx_{i_1}Rx_{i_2}\cdots Rx_{i_k}B$, где $R \in \{\forall, \exists\}, k \geq 0,\; x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ отличные друг от друга переменные и формула B не содержит кванторов.

Утверждение. Для каждой формулы A исчисления предикатов существует такая формула A' в предваренной нормальной форме, что $\vdash_P \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}'$.

Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что в исчислении предикатов выводятся следующие формулы, где переменная y не является свободной ни в $A(x)$, ни в B:

1. $\forall x A(x) \supset \mathrm{B} \equiv \exists y(\mathrm{A}(y) \supset \mathrm{B})$,
2. $\mathrm{B} \supset \forall x A(x) \equiv \forall y\big(B \supset \mathrm{A}(y)\big)$,
3. $\exists x A(x) \supset \mathrm{B} \equiv \forall y(\mathrm{A}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{B})$,
4. $B \supset \exists x A(x) \equiv \exists y(B \supset A(y)$,
5. $\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
6. $\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

Например, выведем: $(\forall x A(x) \supset B) \supset \exists y(A(y) \supset B)$
или учитывая представление квантора $\exists$

$$\forall x A(x) \supset B \ \vdash_P \ \neg\forall y \neg(A(y) \supset B).$$

По правилу введения отрицания достаточно из посылок $\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B)$ вывести две формулы, одна из которых является отрицанием другой.

$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall y \neg(A(y) \supset B)$ посылка
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \neg(A(y) \supset B)$
удаление $\forall$ *
… выведем универсальную тавтологию
$\neg(A \supset B) \supset A \& \neg B$
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \neg(A(y) \supset B) \supset$
$\supset A(y) \& \neg B$
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \quad \vdash_P \ A(y) \& \neg B$ $m.p.$
$\forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \neg B$ удаление &
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P A(y)$ удаление
&$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall y A(y)$ Gen
....
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall x A(x)$ псп.
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P \forall x A(x) \supset B$
посылка
$\forall x A(x) \supset B, \forall y \neg(A(y) \supset B) \vdash_P B$ $m.p.$

Остальные формулы вывести самостоятельно, правильно подбирая необходимые универсальные тавтологии.

В дополнение к формулам 1.-6. Приведем также соответствующие формулы для & и $\vee$.

1. $\forall x A(x) \& B \equiv \forall y(A(y) \& B)$,
2. $\forall x A(x) \vee B \equiv \forall y(A(y) \vee B)$,
3. $\exists x A(x) \& B \equiv \exists y(A(y) \& B)$,
4. $\exists x A(x) \vee B \equiv \exists y(A(y) \vee B)$,

где переменная y не является свободной ни в $A(x)$, ни в B.

Основные свойства системы *P*

Теорема. Исчисление предикатов ***P*** непротиворечиво.

Доказательство. Доказывать будем, погружением формул исчисления предикатов в множество формул исчисления высказываний следующим образом. Для каждой формулы A исчисления предикатов определим $h(A)$ на основе следующих шагов.

a. В A стираем все кванторы, вместе с идущими за ними переменными и связанными с ними скобками.
b. Стираем из формулы все термы вместе с сопутствующими запятыми и скобками.
c. Каждую букву P_i^j заменяем на p_i.

Пример.

$$h\big(\neg\forall x_1 P_1^3(x_2, a_1, x_1) \supset P_2^1(x_2)\big) = (\neg p_1 \supset p_2)$$

Нетрудно убедиться, что отображение $h(A)$ обладает следующими свойствами:

1. $h(\neg A) = \neg h(A)$
2. $h(A \supset B) = h(A) \supset h(B)$
3. $h(\forall x A) = h(A)$

Назовем формулу A исчисления предикатов «*хорошей*» в рамках нашего доказательства, если ее образ $h(A)$ является тавтологией в исчислении высказываний. Теперь докажем, что все формулы, выводимые в исчислении предикатов, являются «*хорошими*». Во-первых, заметим, что h образы аксиом 1–3 являются тавтологиями.

Для примера рассмотрим аксиому 3.

$$h\Big((\neg A \supset B) \supset \big((\neg A \supset \neg B) \supset A\big)\Big)$$
$$= \Big((\neg h(A) \supset h(B))$$
$$\supset \big((\neg h(A) \supset \neg h(B)) \supset h(A)\big)\Big)$$

Аксиомы 4 и 5 преобразуются в следующие тавтологии:

$$h(\forall x A(x) \supset A(t)) = h(A) \supset h(A)$$
$$h(\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)) = (h(A) \supset h(B))$$
$$\supset (h(A) \supset h(B))$$

Применим образ h к формулам правил вывода.

Правило $m.p.$: если $h(A)$ и $h(A \supset B) = h(A) \supset h(B)$ являются тавтологиями, то $h(B)$ тоже тавтология.

Правило $Gen.$: если $h(A(x)) = h(A)$ тавтология, следовательно, $h(\forall x A(x)) = h(A)$ тавтология.

Таким образом, если A есть теорема в P, то $h(A)$ есть тавтология. Если бы существовала формула B такая, что $\vdash_P B$ и $\vdash_P \neg B$, то образы $h(B)$ и $h(\neg B)$ были бы тавтологиями, что невозможно.

Применением приведения к предварённой нормальной форме, правил удаления кванторов, некоторых интересных свойств интерпретаций, доказываются следующие утверждения:

Теорема Гёделя[3] о полноте исчисления предикатов. Формула выводится в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда является универсальной тавтологией (без доказательства).

Известно много доказательств этой теоремы (например, см. русский перевод [1], стр. 78, где указаны ссылки и на другие доказательства).

Теорема. Исчисление предикатов не разрешимо (без доказательства).

[3] *Курт Фридрих Гёдель* (нем. Kurt Friedrich Gödel; 1906–1978) – австрийский логик, математик и философ математики. Наиболее известен сформулированными и доказанными им теоремами о неполноте, которые оказали огромное влияние на представление об основаниях математики. Считается одним из наиболее выдающихся мыслителей XX века.

ГЛАВА 3.

ФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА S

Арифметика является наиболее интуитивной областью математики, поэтому вполне естественно начать попытку формализации и строгого обоснования именно с арифметики.

Основные понятия

I. Язык

1. Алфавит

a. $\supset\ \urcorner\ \forall\ ,\ ()$

b. a_1 – единственная предметная константа 0.

c. x_i, $1 \leq i$ – предметные переменные, каждый из которых принимает значения из N.

d. f_1^1, f_2^2, f_3^2 – функциональные переменные соответствующие следующим функциям: x+1 (коротко x'), $x + y$, $x \cdot y$

e. P_1^2 – единственная предикатная переменная, соответствующая предикату $t_1 = t_2$.

2. Терм определяется по аналогии с предыдущим определением, используя a_1, x_i, f_1^1, f_2^2, f_3^2.
3. Элементарная формула определяется по аналогии с предыдущим определением, используя P_1^2.

4. Формула определяется по аналогии с предыдущим определением:

a. Элементарная формула является формулой.

b. Если A и B формулы, то $(A \supset B)$ будет формулой.

c. Если A формула, то $(\urcorner A)$ будет формулой.

d. Если A формула и x_i предметная переменная, то $(\forall x_i A)$ формула.

e. Иных формул нет.

II. Аксиомы

Для любых формул *A, B* и *C формальной арифметики* формулы следующих видов являются **логическими** аксиомами:

1. $A \supset (B \supset A)$
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3. $(\urcorner A \supset B) \supset ((A \supset \urcorner B) \supset A)$
4. $\forall x A(x) \supset A(t)$ *
5. $\forall x\, (A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$ **

III. Собственные аксиомы *(с.акс.) арифметики:*

1. $x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3)$
2. $x_1 = x_2 \supset x_1' = x_2'$
3. $x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2$
4. $0 \neq x_1'$
5. $x_1 + 0 = x_1$
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$
7. $x_1 \cdot 0 = 0$
8. $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$

9. Аксиома индукции (схема) $A(0) \supset (\forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x))$

IV. Правила вывода

1. modus ponens $\frac{A,\ \ A \supset B}{B}$
2. Generalization (Gen) $\frac{A(x)}{\forall\, x\, A(x)}$

Комментарии

➢ Заметим, что в данном случае, собственные аксиомы 1–8 являются не схемами аксиом, а конкретными аксиомами. Кроме того, тут мы не дали формальную запись. Чтобы понять что имеется ввиду, заметим следующее:

Формальная запись	Условная запись	Интерпретация
$f_1^1(x_1)$	x_1'	$\mathrm{x}_1 + 1$
$f_2^2(x_1, x_2)$	$x_1 + x_2$	$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$
$f_3^2(x_1, x_2)$	$x_1 \cdot x_2$	$\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{x}_2$
$P_1^2(x_1, x_2)$	$x_1 = x_2$	$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$

Так, например, дадим формальнуя запись с.акс. 4:

$$0 \neq x_1' : \neg P_1^2(a_1, f_1^1(x_1))$$

Условная запись с.акс. 6.:

$$x_1 + x_2' = (\ x_1 + x_2)'$$

Ее же формальная запись:

$$P_1^2(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1(f_2^2(x_1,x_2)))$$

Очевидно, что запись в формальном виде трудно понимаемая и естественно, трудно запоминаема.

- Собственные аксиомы легко запоминаются благодаря смысловой нагрузке:

1. означает один из вариантов транзитивности равенства,

2. и 3. отмечают, что для двух равных чисел и следующие и предыдущие также равны,

4. отмечет, что 0 не следует ни одному числу,

5. и 6. определют действие сложения операцией примитивной рекурсии,

7. и 8. определют действие произведения операцией примитивной рекурсии,

9. описывает метод доказательства по индукции.

Определение. Термальным представлением (т.п.) собственных аксиом 1–8 будем называть результат подстановки любых термов, вместо переменных x_1,x_2,x_3 в собственых аксиомах 1–8.

Утверждение. *Термальное представление каждой из собственных аксиом 1-8 выводится в формальной арифметике.*

Доказательство будет **продемонстрировано** лишь для 3-й аксиомы как пример.

$\vdash_S x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2$, с.акс. 3

$\vdash_S \forall x_1(x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2)$, Gen

$\vdash_S t' = x'_2 \supset t = x_2$, уд.$\forall$

$\vdash_S \forall x_2(t' = x'_2 \supset t = x_2)$, Gen

$\vdash_S t' = r' \supset t = r$, уд.$\forall$

Схема доказательства аналогична для всех аксиом.

Дополнительные правила вывода

1. Введение штриха

$$\frac{t = r}{t' = r'}$$

Доказательство.

$\vdash_S t = r \supset t' = r'$ с.акс. 2 т.п.

$\vdash_S t = r$, посылка

$\vdash_S t' = r'$, m.p.

2. Удаление штриха

$$\frac{t' = r'}{t = r}$$

Доказательство.

$\vdash_S t' = r' \supset t = r$ с.акс. 3 т.п.

$\vdash_S t' = r'$ посылка.

$\vdash_S t = r$ m.p.

3. Коммутативность равенства

$$\frac{t = r}{r = t}$$

Доказательство. для начало выведем $t = t$

$\vdash_S t + 0 = t \supset (t + 0 = t \supset t = t)$ с.акс. 1 т.п.

$\vdash_S t + 0 = t$ с.акс. 5 т.п.

$\vdash_S t + 0 = t \supset t = t$ m.p.

$\vdash_S t = t$ m.p.

Теперь обоснуем указанное правило

1. $t=r \vdash_S t=r \supset (t=t \supset r=t)$ с.акс.1. т.п.
2. $\vdash_S t=r$ посылка
3. $\vdash_S t=t \supset r=t$ m.p. 2,1
4. $\vdash_S t=t$ *выведенная формула*
5. $\vdash_S r=t$ m.p. 4,3

4. Правила транзитивности равенства

$$\frac{t = r \quad r = s}{t = s} \qquad \frac{t = r \quad t = s}{r = s} \qquad \frac{t = r \quad s = r}{t = s} \qquad \frac{t = r \quad s = t}{r = s}$$

5. Дополнительное правило индукции

$$\frac{\vdash A(0) \text{ Ʇ } A(x) \ \vdash A(x')}{\vdash \forall\, x\, \mathrm{A}(x),\ \text{а также} \vdash \ \mathrm{A(t)} *}$$

Доказательство.

$\vdash_S A(0)$ посылка

$A(x) \vdash_S A(x')$ посылка

$\vdash_S A(x) \supset A(x')$ теорема дедукции

$\vdash_S A(0) \supset (\forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x))$ с.ак. 9

$\vdash_S \forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x)$ m.p.

$\vdash_S \forall x(A(x) \supset A(x'))$ Gen.

$\vdash_S \forall x A(x)$ m.p.

$\vdash_S A(t)^*$ уд.$\forall$

Дополнительные формулы

Предлагается самостоятельно вывести следующие формулы для любых термов t, r и s:

1. $t = r \supset t + s = r + s$
2. $t = 0 + t$
3. $t' + r = (t + r)'$
4. $t + r = r + t$
5. $t = r \supset s + t = s + r$
6. $(t + r) + s = t + (r + s)$
7. $t \cdot (r + s) = t \cdot r + t \cdot s$
8. $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$
9. $t + s = r + s \supset t = r$
10. $t = r \supset t \cdot s = r \cdot s$
11. $0 = 0 \cdot t$
12. $t' \cdot r = t \cdot r + r$
13. $t \cdot r = r \cdot t$
14. $t = r \supset s \cdot t = s \cdot r$
15. $(t \cdot r) \cdot s = t \cdot (r \cdot s)$

Для простоты написания введем следующее обозначение:

$$\bar{n} = \underbrace{(\ldots((0)')' \ldots)'}_{n \text{ штук}}$$

Таким образом мы получили представление натурального числа.

Предлагается самостоятельно вывести следующие формулы для любых термов t, r и s:

1. $\mathrm{t} + \bar{1} = \mathrm{t}'$

2. $t \cdot \bar{1} = t$ 2'. $t \cdot \bar{2} = t + t$

3. $t + s = 0 \supset t = 0 \& s = 0$

4. $t \neq 0 \supset (s \cdot t = 0 \supset s = 0)$

5. $t + s = \bar{1} \supset (t = 0 \& s = \bar{1} \lor t = \bar{1} \& s = 0)$

6. $t \cdot s = \bar{1} \supset t = \bar{1} \& s = \bar{1}$

7. $t \neq 0 \supset \exists x (t = x')$

8. $s \neq 0 \supset (t \cdot s = r \cdot s \supset t = r)$

9. $t \neq 0 \supset (t \neq \bar{1} \supset \exists x (t = (x')'))$

В качестве примеров выведем ряд формул из вышеприведённых.

1. $t = r \supset t + s = r + s$

Для вывода применим правило индукции, но индукцию нельзя применять по термам, поэтому перейдём к прообразу с переменными $x_1 = x_2 \supset (x_1 + x_3 = x_2 + x_3)$ обозначим через $A(x_3)$, отмечая, что индукция будет проводиться по x_3.

Напомним дополнительное правило индукции:

$$\frac{\vdash A(0), \quad A(x) \vdash A(x')}{\vdash \forall x A(x)}$$

а) $\vdash A(0)$

$\vdash x_1 = x_2 \supset (x_1 + 0 = x_2 + 0)$

$x_1 = x_2 \vdash \quad x_1 + 0 = x_2 + 0$

$\vdash \quad x_1 + 0 = x_1$ с.акс.5

$\vdash \quad \boldsymbol{x_2 + 0 = x_2}$ **т.п. с.акс.5**

$\vdash \quad x_1 = x_2$ посылка

$\vdash \quad x_1 + 0 = x_2$ транз.

$\vdash \quad x_1 + 0 = x_2 + 0$ транз.

И теорема дедукции:

$$\vdash x_1 = x_2 \supset (x_1 + 0 = x_2 + 0)$$

б) $A(x_3) \vdash A((x_3)')$

$$x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \ \vdash x_1 = x_2 \supset x_1 + (x_3)' = $$
$$= x_2 + (x_3)'$$

_ _

$$x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3, x_1 = x_2 \ \vdash x_1 + (x_3)' = $$
$$= x_2 + (x_3)'$$

_ _

$\mathrm{A}(x_3), x_1 = x_2 \ \vdash \ \boldsymbol{x_1 + (x_3)' = (x_1 + x_3)'}$ **т.п. с.акс.6**

$\vdash \boldsymbol{x_2 + (x_3)' = (x_2 + x_3)'}$ **т.п. с.акс. 6**

$\vdash x_1 = x_2 \supset x_1 + x_3 = x_2 + x_3$ посылка

$\vdash x_1 = x_2$ посылка

$\vdash x_1 + x_3 = x_2 + x_3$ m.p.

$\vdash (x_1 + x_3)' = (x_2 + x_3)'$ введ. $'$

$\vdash \ x_1 + (x_3)' = (x_2 + x_3)'$ транз.

$\vdash \ x_1 + (x_3)' = x_2 + (x_3)'$ транз.

$\vdash A((x_3)')$ теор. дедукции

$\vdash A(x_3) \supset A((x_3)')$ теор. дедукции

$\vdash \forall x_3 \mathrm{A}(x_3)$ доп. правило индукции

$\vdash$A(s) удал. $\forall$ $*$

Затем дважды применяем правило Gen по x_1 и по x_2 и далее, удаляя дважды кванторы всеобщности, подставляем соответственно t и r. Отметим, что ограничение* выполнено, так как формула $A(x_3)$ не содержит кванторов.

Важное замечание: часть приведенных выше выводов некорректна, так как все отмеченные **Bold-**ом формулы являются термальными представлениями собственных аксиом, для выводов которых применяется правило Gen по переменным x_1, x_2 или x_3, а значит после этого нельзя применять дедукцию к посылкам, содержащих эти переменные. Для исправления указанного достаточно брать для выводимых формул прообразы с другими переменными, например, x_4, x_5 и x_6, однако для простоты обозначений и далее будем применять переменные x_1, x_2 и x_3.

2. t+s=0 ⊃ t=0 & s=0

$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \& \, x_2 = 0) \quad A(x_2)$

$x_1 + 0 = 0 \supset (x_1 = 0 \& \; 0 = 0) \quad A(0)$

а) $\vdash x_1 + 0 = 0 \supset (x_1 = 0 \& \; 0 = 0)$

_ _

$x_1 + 0 = 0 \;\; \vdash \;\; x_1 = 0 \;\&\; 0 = 0$

_ _

$x_1 + 0 = 0 \;\; \vdash \;\; 0 = 0$	выведенная формула
$\vdash x_1 + 0 = 0$	посылка
$\vdash x_1 + 0 = x_1$	с. акс.5
$\vdash x_1$=0	транз.
$\vdash x_1$=0& 0=0	введ. &

_ _

$\vdash x_1 + 0 = 0 \supset \;\; (x_1 = 0 \& \; 0 = 0)$ дедукция

б) $A(x_2) \;\; \vdash A((x_2)')$

$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \;\& x_2 = 0) \;\; \vdash \;\; x_1 + (x_2)' =$
$= 0 \supset (x_1 = 0 \;\&(x_2)' = 0)$

_ _

$$x_1 + x_2 = 0 \supset (x_1 = 0 \,\& x_2 = 0), x_1 + (x_2)' =$$
$$= 0 \ \vdash \ \boldsymbol{x_1 = 0 \& \ (x_2)' = 0}$$

Отметим, что требуется вывести глупость, а значит попробуем из посылок вывести противоречие.

$A(x_2), x_1 + (x_2)' = 0 \vdash \ x_1 + (x_2)' = 0$ посылка
$\vdash x_1 + (x_2)' = (x_1 + x_2)'$ с.акс.6
$\vdash (x_1 + x_2)' = 0$ транз. =
$\vdash 0 = (x_1 + x_2)'$ коммут. =
$\vdash \neg\, (0 = (x_1 + x_2)')$ т.п. с.акскс.4

Получили противоречие, а значит, применив здесь вывод замечательной формулы **A⊃(¬A⊃B)**, можем вывести любое **B**. В нашем случае $\boldsymbol{x_1 = 0 \& \ (x_2)' = 0}$.

Здесь очень важно заметить также, что **посылка A(x_2) не понадобилась** при выводе A((x_2)'), то есть при доказательстве по индукции предположение индукции о верности утверждения для n может не понадобится при доказательстве утверждения для n+ 1.

3. $t+s=\overline{1} \supset (t=0 \& \ s=\overline{1} \vee t=\overline{1} \ \& \ s=0)$
$x_1 + x_2 = \overline{1} \supset (x_1 = 0 \& \ x_2 = \overline{1} \vee \ x_1 = \overline{1} \ \& \ x_2 = 0)$
A(x_2)
а) $\vdash x_1 + 0 = \overline{1} \supset (x_1 = 0 \ \& 0 = \overline{1} \vee \ x_1 = \overline{1} \ \& 0 = 0)$
A(0)

$$x_1 + 0 = \overline{1} \vdash \left(\boldsymbol{x_1 = 0 \& \ 0 = \overline{1}} \vee \ x_1 = \overline{1} \ \& 0 = 0\right)$$

Выделенное **Bold-**ом – глупость, а поэтому нужно:

$x_1 + 0 = \overline{1} \vdash x_1 = \overline{1} \& \ 0=0$

$\overline{\phantom{x_1 + 0 = \overline{1} \vdash x_1 = \overline{1} \& \ 0=0 \quad}}$

$x_1 + 0 = \overline{1} \vdash x_1 + 0 = \overline{1}$ посылка

$\vdash x_1 + 0 = x_1$ с.акс.5

$\vdash x_1 = \overline{1}$ транз.=

$\vdash 0=0$ выведенная формула

$\vdash x_1 = \overline{1} \ \& \ 0=0$ введ.&

$\vdash x_1 = 0 \ \& \ 0=\overline{1} \vee x_1 = \overline{1} \& \ 0=0$ введ. ∨

$\vdash A(0)$ теор. дедукции

б) $A(x_2) \vdash A((x_2)')$

$A(x_2) \vdash x_1 + (x_2)' = \overline{1} \supset (x_1 = 0 \& (x_2)' = \overline{1} \vee x_1 = \overline{1} \& (x_2)' = 0)$

$A(x_2), x_1 + (x_2)' = \overline{1} \vdash (x_1 = 0 \& (x_2)' = \overline{1} \vee \boldsymbol{x_1 = \overline{1} \& (x_2)' = 0})$

Выделенное **Bold-**ом – глупость, а поэтому нужно:

$A(x_2), x_1 + (x_2)' = \overline{1} \vdash x_1 = 0 \& (x_2)' = \overline{1}$

$\overline{\phantom{A(x_2), x_1 + (x_2)' = \overline{1} \vdash x_1 = 0 \& (x_2)' = \overline{1} \quad\quad\quad\quad\quad\quad}}$

$A(x_2), x_1 + (x_2)' = \overline{1} \vdash x_1 + (x_2)' = \overline{1}$ посылка

$\vdash x_1 + (x_2)' = (x_1 + x_2)'$ с.акс.6

$\vdash (x_1 + x_2)' = \overline{1}$ транз.

Отметим, что $\overline{1} = 0'$

$\vdash x_1 + x_2 = 0$ удаление ′

$\vdash x_1 + x_2 = 0 \supset x_1 = 0 \& x_2 = 0$

выведенная формула

$\vdash x_1 = 0 \& x_2 = 0$ m.p.

$\vdash x_1$=0 удаление &

$\vdash x_2$=0 удаление &

$\vdash (x_2)'$=0′ введение ′

$\vdash x_1$=0 & $(x_2)'=\overline{1}$ введение &

$\vdash x_1 = 0\& (x_2)' = \overline{1} \lor x_1$=0 & $(x_2)'=\overline{1}$

введение ∨

и по теореме дедукции

$\vdash x_1+(x_2)'=\overline{1} \supset x_1 = 0\& (x_2)' = \overline{1} \lor x_1$=0 & $(x_2)'=\overline{1}$

Здесь опять следует заметить, что посылка **A(x_2) не понадобилась при выводе** A((x_2)').

4. ⌉(t=0)⊃∃x(t=x')*

⌉(x_1=0)⊃∃x_2(x_1=(x_2)′) A(x_1)

а) ⊢ ⌉(0=0)⊃∃ x_2(0=(x_2)′) A(0)

_ _

⌉**(0=0)** ⊢ ∃ x_2(0=(x_2)′)

Отметим, что в посылке имеем глупость, а из глупости следует всё что угодно, действительно:

⌉(0=0) ⊢0=0 выведенная формула

⌉(0=0) ⊢ ⌉(0=0) посылка

Получили противоречие, а значит, применив как и выше вывод замечательной формулы **A⊃(¬A⊃B)**, можем вывести любое **B**. В нашем случае ∃ x_2(0=(x_2)′).

б) A(x_1) ⊢ $A((x_1)')$

$⌉(x_1 = 0) \supset \exists x_2(x_1 = (x_2)') \vdash \neg((x_1)' =$

$= 0) \supset \exists x_2((x_1)' = (x_2)')$

A(x_1),$⌉((x_1)' = 0) \vdash \exists x_2((x_1)' = (x_2)')$

— —

$A(x_1), \rceil((x_1)' = 0) \vdash (x_1)' = (x_1)'$ выведенная формула

$A(x_1), \rceil((x_1)' = 0) \vdash \exists x_2((x_1)' = (x_2)')$* введение $\exists$

$\frac{B(t)}{\exists x B(x)}$ *

Вспомним правило введения ∃: из B(t) выводится ∃ x B(x), если терм t свободен для подстановки вместо x в B(x); отметим, что терм x_1 свободен для подстановки вместо x_2 в B(x_2): $(x_1)'=(x_2)'$. Отметим, что **ни одна из посылок не понадобились**. Также важно отметить, что ограничение * необходимо т.к. далее, подставляя терм t вместо x_1 нужно учесть, чтобы он был свободен для подстановки: например, нельзя подставлять $((x_2)')'$

Метатеорема

Напомним, что частичка «мета» тут означает вне теории о теории.

Теорема. *Для произвольных натуральных чисел* m и n.

1. Если m≠n, то $\vdash_s \overline{m} \neq \overline{n}$,
2. $\vdash_s \overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$ и $\vdash_s \overline{m \cdot n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$

Доказательство.

1. m≠n ⇒ m>n или m<n: Пусть для определенности рассмотрим $m < n$: Нужно вывести $\rceil(\overline{m} = \overline{n})$: :

Будем доказывать от противного, т.е. переведём формулу без отрицания в посылку.

$$\bar{m} = \bar{n} \vdash_S \underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{m} = \underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{n}$$ посылка

$$\vdash_S \underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{m-1} = \underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{n-1}$$ уд.$'$

$$\ldots$$

$$\vdash_S 0 = \underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{n-m}$$ уд.$'$

$$\vdash_S 0 \neq (\underbrace{(\ldots(0)'\ldots)'}_{n-m-1})'$$ с.акс. 4 т.п.

Таким образом, пришли к противоречию. При m>n доказательство аналогично.

a. Докажем с помощью индукции по m (вне формальной арифметики).

а) m=0. Нужно доказать, что

$\vdash_s \overline{0+n} = \bar{0}+\bar{n}$ т.е.

$\vdash_s \bar{n} = 0 + \bar{n}$

$\vdash_s x_1 + 0 = x_1$ с.акс.5.

$\vdash_s x_1 + 0 = 0 + x_1$ выведенная формула

$\vdash_s x_1 = 0 + x_1$ транз

$\vdash_s \forall x_1(x_1 = 0 + x_1)$ Gen

$\vdash_s \bar{n} = 0 + \bar{n}$ удалени $\forall$

б) допустим $\vdash_s \overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$, докажем, что

$\vdash_s \overline{m+1+n} = \overline{m+1} + \bar{n}$ т.е.

$\vdash_s \overline{(m+n)'} = \overline{m'} + \bar{n}$

$\vdash_s \overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$ посылка

$\vdash_s ((\overline{m+n}))' = (\bar{m} + \bar{n})'$ введение $'$ т .е.

$\vdash_s \overline{(m+n)'} = (\bar{m} + \bar{n})'$

$\vdash_s (\overline{m})' + \overline{n} = (\overline{m} + \overline{n})'$ выведенная формула

$\vdash_s \overline{(m+n)'} = (\overline{m})' + \overline{n}$ транз.

По аналогии доказать, что $\vdash_s \overline{m \cdot n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$

Теорема доказана.

Учитывая коммутативмость отношения «=», будем далее считать утверждениями метатеоремы также, что $\vdash_s \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$ и $\vdash_s \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}$.

Оказывается, что эта теорема может сильно облегчить выводы. Давайте на примерах посмотрим ее применение.

1. $\vdash (t + \overline{2}) + \overline{5} = t + \overline{7}$

$\vdash (t + \overline{2}) + \overline{5} = t + (\overline{2} + \overline{5})$ выведенная формула

$\vdash \overline{2} + \overline{5} = \overline{2+5}$ метатеорема

или иная запись $\overline{2} + \overline{5} = \overline{7}$

$\vdash \overline{2} + \overline{5} = \overline{7} \supset t + (\overline{2} + \overline{5}) = t + \overline{7}$ выведенная формула

$\vdash t + (\overline{2} + \overline{5}) = t + \overline{7}$ m.p.

$\vdash (t + \overline{2}) + \overline{5} = t + \overline{7}$ транз.

2. $\vdash \overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{6}$

$\vdash \overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{2} \cdot \overline{3}$ выведенная формула

$\vdash \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2 \cdot 3}$ метатеорема

или иная запись $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6}$

$\vdash \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} \supset \overline{2}t + \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}t + \overline{6}$ выведенная формула

$\vdash 2t + \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}t + \overline{6}$ m.p.

$\vdash \overline{2}(t + \overline{3}) = \overline{2}t + \overline{6}$ транз.

Введение новых отношений

Разновидности неравенств

Для начала посмотрим каким образом неравентства могут быть представлены в формальной арифметике. Введём следующие обозначения:

$t < s : \exists x(x \neq 0 \,\&\, t + x = s)$

$t \leq s : t = s \vee t < s$

$t > s : s < t$

$t \geq s : s \leq t$

Предлагается самостоятельно вывести в **S** следующие формулы:

1. $\neg(t < t)$
2. $t < s \supset (s < r \supset t < r)$
3. $t < s \supset t + r < s + r$
4. $t \leq t$
5. $0 \leq t$
6. $0 < t'$
7. $t < r \supset t' \leq r$
8. $t \leq r \supset t < r'$
9. $t < t'$
10. $t = r \vee t < r \vee t > r$

Предикат делимости t/s : t делится на s.

Введем краткое обозначение $t/s : \exists x(t = s \cdot x)$

Предлагается самостоятельно вывести в **S** следующие формулы:

1. t/t
2. t/$\overline{1}$
3. 0/t
4. t/s & s/r ⊃t/r
5. t/s & s/t ⊃t=s
6. t/s ⊃ (r·t)/s
7. t/s & r/s ⊃(t+r)/s

В качестве примеров выведем следующие две формулы:

1.$t < t'$

$\vdash \exists x(x \neq 0 \& t + x = t')$

$\vdash t + \overline{1} = t'$ выведенная формула

$\vdash \overline{1} \neq 0$ выведенная формула

$\vdash \overline{1} \neq 0 \& t + \overline{1} = t'$ введение &

$\vdash \exists x(x \neq 0 \& t + x = t')$ введение ∃

2. *t/s & s/r ⊃ t/r*

----

t/s & s/r ⊢ *t/r*

----

t/s & s/r ⊢ t/s & s/r посылка

$\vdash \exists x_1(t = sx_1)$ удаление &

$\vdash \exists x_2(s = rx_2)$ удаление &

$\vdash t = s\mathrm{a}_1$ Choice

$\vdash s = r\mathrm{a}_2$ Choice

$\vdash s = r\mathrm{a}_2 \supset s\mathrm{a}_1 \quad = (r\mathrm{a}_2)\mathrm{a}_1$ выведенная формула

$\vdash s\mathrm{a}_1 \quad = (r\mathrm{a}_2)\mathrm{a}_1$ m.p.

$\vdash (r\mathrm{a}_2)\mathrm{a}_1 \quad = r(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_1)$ выведенная формула

$\vdash s\mathrm{a}_1 \quad = r(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_1)$ транз.

$\vdash t = r(\mathrm{a}_2\mathrm{a}_1)$ транз.

$\vdash \exists x_3(t = rx_3)$ введение $\exists$

Единственность частного и остатка при делении

Введем следующее обозначение

$\exists_1 xA(x)$: $\exists xA(x) \& \forall x \forall y(A(x) \& A(y) \supset x=y)$:

В формальной арифметике можно вывести единственность частного и остатка, а именно,

$\vdash_s y \neq \mathbf{0} \supset \exists_1 u \exists_1 v(x = y \cdot u + v \ \& \ v < y)$

Сначала покажем, что

$\vdash_s y \neq 0 \supset \exists u \exists v(x = y \cdot u + v \ \& \ v < y) \equiv A(x)$

Приведём схематическое доказательство по дополнительному правилу индукции.

$$\vdash_s A(0)$$

$$y \neq 0 \vdash_s 0 = y \cdot 0 + 0 \& 0 < y$$

Допустим, что выведено $x = y \cdot u + v \& v < y$, докажем, что выводится

$$x' = y \cdot u_1 + v_1 \& v_1 < y:$$

К формуле $x = y \cdot u + v$ применим введение $'$-а:

$x' = (y \cdot u + v)' = y \cdot u + v'$, если $v < y \Rightarrow v' < y \lor v' = y$:

Если $v'<y$, то в качестве u_1 возьмём u , а как v_1` v' .

Если $v'=y$, то получим $x'=y\cdot(u+\overline{1})$, следовательно, как u_1 возьмём $u+\overline{1}$,а как v_1` 0:

Докажем единственность. Допустим

$$x=y\cdot u_1 + v_1 \text{ и } \quad x=y\cdot u_2 + v_2 \qquad (*)$$

В вышеприведенном перечне выводимых формул присутствует формула

$$u_1 = u_2 \vee u_1 < u_2 \vee u_1 > u_2.$$

Если $u_1 < u_2$*, то для некоторого w имеем*

$$u_1 + w = u_2 \;\&\; (w \neq 0)$$

$$y\cdot(u_1 + w) = y \cdot u_2$$

$$y\cdot u_1 + y \cdot w = y \cdot u_2$$

$$y\cdot u_1 + y \cdot w + (v_1 + v_2) = y \cdot u_2 + (v_1 + v_2)$$

и учитывая (*)*, получим*

$$x + y \cdot w + v_2 = x + v_1$$

$$y\cdot w + v_2 = v_1:$$

Получилось, что у$<v_1$, чего не может быть. Аналогично приходим к противоречию при $u_1 > u_2$, следовательно $u_1 = u_2$, тогда у$\cdot u_1 = y \cdot u_2$ и из (*) получим $v_1 = v_2$:

Можно продолжить введение новых функций и отношений в этой системе, но, согласно нижеприведенным утверждениям, будет дана единая возможность введения довольно широкого класса функций и отношений.

Представление функцций и предикатов в S

Определение. Скажем, что предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ **выразим** в арифметике, если существует такая формул $\boldsymbol{A_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ от n свободных переменных, что для любых натуральных чисел $k_1,k_2,...,k_n$ выполнено следующее:

(a) Если $P(k_1,k_2,...,k_n)$ = И, то $\vdash_S \boldsymbol{A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2},\ldots, \overline{k_n})}$:

(b) Если $P(k_1,k_2,...,k_n)$ = Л, то $\vdash_S \neg\, \boldsymbol{A_P(\overline{k_1}, \overline{k_2},\ldots, \overline{k_n})}$:

Определение. Скажем, что арифметическая функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ **представима** в арифметике, если существует такая формула $\boldsymbol{A_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})}$ от n+1-ой свободной переменной, что для любых чисел $k_1,k_2...,k_n$, l выполнено следующее:

(a) Если $f(k_1,k_2,...,k_n) = l$, то $\vdash_S \boldsymbol{A_f(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, \overline{l})}$

(b) $\vdash \exists_1 \boldsymbol{x_{n+1} A_f(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_n}, x_{n+1})}$

Тут важно заметить – предикат *выражается* с помощью формулы, зависящей от такого же колличества переменных, а функция *представляется* с помощью формулы, зависящей от колличества переменных на единицу больше. Фактически, во втором пункте второго определения мы заменяем функцию функциональным отношением. Более того, мы можем заменить ее на более сильное утверждение, а именно

Определение. Скажем, что арифметическая функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ сильно представима в арифметике, если существует такая формула от n+1-ой свободной переменной $\boldsymbol{A_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})}$, что для любых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, l имеют место следующие условия:

(a) Если $f(k_1, k_2, \ldots, k_n) = l$, то $\vdash_S \boldsymbol{A_f(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, \overline{l})}$

(b) $\vdash_S \exists_1 \boldsymbol{x_{n+1} A_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})}$

Если функция сильно представима, то она представима. Действительно, можно из второго пункта третьего определения вывести второй пункт второго определения при поочерёдном использовании правила *Gen* для x_i и правила удаления квантора.

Примеры:

1. $O(x) = 0$
2. $S(x) = x + 1$
3. $\overline{S}(x) = x \dot{-} 1$
4. $\mathbf{I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m,\ 1 \leq m \leq n}$ (эту функцию называют проектирующей)

Нетрудно убедиться, что эти функции представимы в формальной арифметике соответственно следующими формулами:

1. $\boldsymbol{A_0(x_1, x_2) :\ x_1 = x_1 \& x_2 = 0}$

2. $\boldsymbol{A_S(x_1, x_2) : x_2 = x_1{}'}$

3. $\boldsymbol{A_{\bar{s}}(x_1, x_2) : x_1 = 0 \& x_2 = 0 \vee x_1 \neq 0 \& x_2{}' = x_1}$

4. $\boldsymbol{A_{I^n_m}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = x_m \& x_1 =}$

$\boldsymbol{= x_1 \& \ldots \& x_n = x_n}$

Отметим, что наличие всех свободных переменных обязательно в формулах и поэтому для фиктивных переменных введены формулы, которые легко выводятся.

Фактически нами доказана

Лемма 1. *Базисные функции представимы в арифметике.*

Теорема (очень важная). *Каждая общерекурсивная функция представима в S и каждый общерекурсивный предикат выразим в S.*

Доказательство этой теоремы основано на ряде дополнительных утверждений. В частности, мы воспользуемся Китайской теоремой об остатках (доказательство см. в русском переводе [1], стр. 151).

Теорема (китайская). Для *произвольной последовательности натуральных чсел* $x_1,x_2,...,x_n$ *и попарно взаимно простых чисел* $y_1,y_2,...,y_n$, $\exists z$ *такое*, что $rm(z,y_i) = rm(x_i,y_i) 1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим на первый взгляд очень странную функцию, которую ввел Гёдель:

$$\beta(x_1, x_2,x_3) = rm(x_1,1 + (1 + x_3) \cdot x_2)$$

Интересный факт, что как и свою нумерацию *n*-ок, так и эту функцию Гёдель обозначил через β – вторую букву греческого алфавита. Дело в том, что Гёдель свои важные функции обозначал через β, подчеркивая этим, что он не занимает первое место среди математиков. О нем сказано, что тем самым, он не выдвигал свою личность как первостепенную, хотя мы в конце познакомимся с его теоремами, первая из которых «повернула представление о науке, а вторая вообще убила всё».

Теорема (о свойстве функции Гёделя β**)**. *Для любых чисел* $k_0,k_1,...,k_n$ *можно найти такие числа* b и c, *что для любого* $0 \leq i \leq n$ $\beta(b,c,i) = k_i$.

Гениальность и полезность этой теоремы о функции Гёделя заключается в том, что, оказывается, нам не нужно хранить всю последовательноть: достаточно лишь найти числа b и c, с помощью которых мы однозначно восстанавливаем (порождаем) первоначальную последовательность.

Доказательство. Обозначим $m = \max\{n, k_0, k_1, \ldots, k_n\}$. В качестве **c** возьмем m!. Составим $u_i = 1 + (1 + i) \cdot c$ $0 \leq i \leq n$ и докажем, что все они взаимно простые числа.

Пойдем от обратного. Пусть $\exists i,j$; такие, что u_i и u_j, имеют общий простой делитель p. Для определённости предположим, *что $j > i$.*

Очевидно, что $u_j - u_i = (j - i) \cdot c$ также делится на p. Тогда имеем 2 возможных случая:

a) пусть c | p(читать как c делится на p), но и $u_i = 1+(1+i)\cdot c \mid p$, тогда и 1 |p, чего не может быть,
b) пусть $(j - i) \mid p$, тогда для $\forall\, i,j \leq n$ имеем $j - i \leq n$, значит, $j - i$ точно находится среди сомножителей n!, но ведь $m \geq n$, значит, и среди m!=c.

Применим китайскую теорему. Возьмем $\{x_n\} = \{k_n\}$ и $\{y_n\} = \{u_n\}$, тогда $\exists b\ rm(b,u_i) = rm(k_i,u_i)$, но ведь $k_i < u_i$, значит, $rm(k_i,u_i) = k_i \Rightarrow k_i = rm(b, 1 + (1 + i) \cdot c) = \beta(b,c,i)$.

Нетрудно убедиться, что ф*ункция* Гёде*ля представима с помощью формулы*

$\mathbf{Bt}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4})$:

$$\exists u(x_1 = (\bar{1} + (\bar{1} + x_3) \cdot x_2) \cdot u + x_4 \& x_4 < \bar{1} + (\bar{1} + x_3) \cdot x_2),$$

которая выводима в S в силу вышеприведённого замечания об частном и остатке.

Лемма 2. Результат применения каждой из основных операций (введения фиктивных переменных, подстановки, примитивной рекурсии, минимизации) к функциям, представимым в арифметике, также является функцией, представимой в арифметике.

Доказательство приведем по единой схеме: для каждой из применяемых операций предполагается, что каждая заданная функция представима некоторой заданной формулой, на основе которой (которых) строится формула для функции – результата операции.

1) **Введение фиктивных переменных**

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $A_f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_{n+1}})$

$h(x_1, x_2,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)= f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$A_h (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, y_1, \ldots, y_k, \boldsymbol{x_{n+1}})$:

$A_f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_{n+1}})$ $\& y_1=y_1 \& \ldots \& y_k=y_k$

Отметим, что первое условие для формулы, представляющей результат применения операции, здесь и далее для других операций, доказывается тривиально.

2) **Подстановка**

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $A_f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_{n+1}})$

$g\ (y_1,\ldots,y_k)$ $A\ g\ (y_1,y_2,\ldots,y_k,y_{k+1})$

$h(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}, y_1,\ldots,y_k, x_{i+1},\ldots,x_n) =f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1}, g(y_1,\ldots,y_k), x_{i+1},\ldots,x_n)$

$\forall k_1,k_2,\ldots,k_{i-1}, m_1,m_2,\ldots,m_k, k_{i+1},\ldots,k_n, l$

если $h(k_1,k_2,\ldots,k_{i-1}, m_1,m_2,\ldots,m_k , k_{i+1},\ldots,k_n)=l$, то

$\exists\ l_1$ такое, что $g\ (m_1,m_2,\ldots,m_k)=l_1$ и $f(k_1,k_2,\ldots,k_{i-1}, l_1, k_{i+1},\ldots,k_n)=l$, следовательно, в качестве формулы

$A_h(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_{i-1}}, \quad y_1, \ldots, y_k, \quad \boldsymbol{x_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{x_{n+1}})$ можно рассматривать

$$\exists z(A_g(y_1, y_2, \ldots, y_k, z) \mathbin{\&} A_f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_{i-1}}, z, \boldsymbol{x_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{x_{n+1}}))$$

Интересна также **каноническая подстановка**

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\qquad A_f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_{n+1}})$

$g_i (y_1, \ldots, y_k)$ $\quad i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad A_i(y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1})$

$h (y_1, \ldots, y_k) = f(g_1 (y_1, \ldots, y_k), g_2 (y_1, \ldots, y_k), \ldots, g_n (y_1, \ldots, y_k))$

$\forall m_1, m_2, \ldots, m_k, l$ если $h(m_1, m_2, \ldots, m_k) = l$, то должны существовать такие числа l_i $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $g_i(m_1, m_2, \ldots, m_k) = l_i$ и $f(l_1, l_2, \ldots, l_n) = l$, следовательно, в качестве формулы $A_h(y_1, y_2, \ldots, y_k, \boldsymbol{x_{n+1}})$ можно взять формулу

$$\exists z_1 \exists z_2 \ldots \exists z_n (A_1(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_n) \mathbin{\&} A_f(z_1, z_2, \ldots, z_n, \boldsymbol{x_{n+1}}))$$

3) **Операция примитивной рекурсии:**

$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\qquad A_\alpha(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{x_{n+1}})$

$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z)$ $\qquad A_\beta (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y}, z, \boldsymbol{x_{n+1}})$

$f (x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ $\qquad A_f (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x_{n+1}})$

Известно, что

$f (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \quad = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$f (x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f (x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$

$\forall m_1, m_2, \ldots, m_n, l, k$ если $f (m_1, m_2, \ldots, m_n, l) = k$, то должны существовать такие числа $k_0, k_1, \ldots, k_l$, что

$f (m_1, m_2, \ldots, m_n, 0) = \alpha(m_1, m_2, \ldots, m_n) = k_0$

$f (m_1, m_2, \ldots, m_n, 1) = \beta(m_1, m_2, \ldots, m_n, 0, k_0) = k_1$

$f(m_1,m_2,\ldots,m_n,i+1)=\beta(m_1,m_2,\ldots,m_n,i,k_i)=k_{i+1}$,

----

$f(m_1,m_2,\ldots,m_n,l)=\beta(m_1,m_2,\ldots,m_n,l-1,k_{l-1})=k_l=k$

Кажется, что как и при канонической подстановке, и в этом случае формулу $A_f(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x_{n+1}})$ можно начать группой кванторов $\exists z_0\exists z_1\ldots\exists z_l$, однако при этом формула не будет иметь заранее фиксированный конечный вид, так как длина формулы будет зависеть от величины числа l. Устранить эту неоднозначность формулы поможет введённая ранее функция Гёделя $\beta(x_1,x_2,x_3)$, а точнее представляющая эту функцию формула $Bt(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3},\boldsymbol{x_4})$. Действительно, вместо существования чисел $k_0, k_1, \ldots, k_l$ достаточно фиксировать существование двух таких чисел **b** и **c,** что для всех $\mathbf{0}\leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$ будет выполнено $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{i})=\mathbf{k_i}$, следовательно, в качестве формулы $A_f(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x_{n+1}})$ можно рассматривать формулу

$$\exists u\exists v[(\exists w Bt(u, v,0, w)\& A_\alpha(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},w))\&$$
$$\& \forall t(t<y\supset \exists w_1\exists w_2(Bt(u, v,t, w_1)\&Bt(u, v,t', w_2)$$
$$\& A_\beta(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n}, t,w_1,w_2))\& Bt(u, v,y, \boldsymbol{x_{n+1}})],$$

где под *u* подразумеваем b, под *v* подразумеваем c, под *w* подразумеваем k_0, под *t* подразумеваем *i,* под w_1 подразумеваем k_i, под w_2 подразумеваем k_{i+1}, под *y* подразумеваем l и под $\boldsymbol{x_{n+1}}$ подразумеваем k.

Важное замечание: во всех вышеперечисленных случаях значение полученной при применении операции функции обозначено переменной $\boldsymbol{x_{n+1}}$, которой обозначено также значение одной или двух функций, к которым применяется операция, а поэтому единственность значения этой переменной в строящейся формуле доказывается ее же единственностью по допущению в заданной формуле и возможностью вынесения соответствующего квантора существования в начало построенной формулы по правилам построения предварённой нормальной формы.

4) **Операция минимизации**

$\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ $\qquad$ $A\phi\ (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x_{n+1}})$

$\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mu_y(\ \phi(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0)$

$\forall$ $m_1,m_2,\ldots,m_n,l$ если $\psi(m_1,m_2,\ldots,m_n) = l$, то l является тем минимальным числом, что $\phi(m_1,m_2,\ldots,m_n,l)=0$, следовательно, в качестве формулы $A\psi\ (\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y})$ может быть рассмотрена формула

$$A\phi(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y},0)\&\forall t(t<\boldsymbol{y} \supset \neg\ A\phi(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},t,0))$$

Замечание: в отличие от вышерассмотренных случаев, здесь в формуле $A\psi(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots,\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{y})$ значение полученной функции представлено переменной y, а не переменной x_{n+1}, единственность которой имеется по допущению, следовательно, здесь единственность значения переменной y доказывается от противного более детальным рассмотрением представленной формулы (см. [1]).

Лемма 3. Предикат $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ выразим в S тогда и только тогда, когда его характеристическая функция $\mathcal{X}_P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ представима в S.

Доказательство:

1. Если $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ выразим формулой $A_P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ то $\mathcal{X}_P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ представима формулой

$$B_P(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}):$$
$$(A_P(x_1,x_2,\dots,x_n)\&x_{n+1}=0)$$
$$\vee(\urcorner A_P(x_1,x_2,\dots,x_n)\&x_{n+1}=\bar{1})$$

Действительно, если $\forall k_1,k_2,\dots,k_n$ $P(k_1,k_2,\dots,k_n)$=И, то $\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\dots,k_n)=0$, тогда

$\vdash A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})$ *по допущению*

$\vdash 0=0$ *формула*

$\vdash A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ 0=0$ *введ. &*

$\vdash (A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ 0=0)\vee(\urcorner A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ 0=\bar{1})$

введ. V

2. Если $\forall k_1,k_2,\dots,k_n$ $P(k_1,k_2,\dots,k_n)$=Л, то $\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\dots,k_n)=1$, тогда

$\vdash\urcorner A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})$ *по допущению*

$\vdash\bar{1}=\bar{1}$ формула

$\vdash\urcorner A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ \bar{1}=\bar{1}$ *введ. &*

$\vdash (A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ \bar{1}=0)\vee(\urcorner A_P(\overline{k_1},\overline{k_2},\dots\overline{k_n})\&\ \bar{1}=\bar{1})$

введ. V

3. Если $\mathcal{X}_P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ представима формулой

$$B_p(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}),$$

то $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ выразим формулой

$$A_P(x_1,x_2,\dots,x_n):B_p(x_1,x_2,\dots,x_n,0)$$

Действительно, если $\forall k_1,k_2,\ldots,k_n,l$
$\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\ldots,k_n)=l$, то l=0 или l=1.

4. Если $\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\ldots,k_n)=l$ и l=0, то $P(k_1,k_2,\ldots,k_n)$=И, что соответствует

$$\vdash B_p\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0)$$

Если $\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\ldots,k_n)=l$ и l=1, то $P(k_1,k_2,\ldots,k_n)$=Л, тогда нужно, чтобы $\vdash \rceil\ B_p\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0)$ и по правилу введения отрицания нужно из $B_p\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0)$ вывести противоречие:

$B_p\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0) \vdash B_p\ (\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0)$ посылка

.... $\vdash$ Bp $(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, \overline{1})$ *т.к.* $\mathcal{X}_P(k_1,k_2,\ldots,k_n)=1$

............$\vdash$ Bp$(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, \overline{1})$& $B_p(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0)$ *введ. &*

............$\vdash$ Bp$(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, \overline{1})$&$B_p(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots \overline{k_n}, 0) \supset 0=\overline{1}$

в силу единственности x_{n+1}

............$\vdash 0=\overline{1}$ modus ponens

............$\vdash \rceil\ (0=\overline{1})$ т. п. с.акс. 4

Таким образом, на основании вышеперечисленных утверждений теорема полностью доказана.

Гёделевская нумерация объектов формальных систем

Номера букв алфавита:

$g(\forall) = 1, g(() = 3, g()) = 5, g(\supset) = 7, g(\rceil) = 9, g(,) = 11$

$g(a_i) = 5 + 8i,\quad g(x_i) = 7 + 8i,\quad g(f_i^j) = 9 + 8 \cdot 2^i \cdot 3^j,$
$g(P_k^l) = 11 + 8 \cdot 2^k \cdot 3^l$

Номер слова (терма или формулы) $u_0u_1\ldots u_m$:

$$g(u_0u_1\ldots u_m)=p_0^{g(u_0)}\cdot p_1^{g(u_1)}\cdot\ldots\cdot p_m^{g(u_m)},$$

где p_i – i-тое простое число. Отметим, что здесь все показатели нечетные, т.к. они – номера символов, а сам номер слова является четным числом.

Номер последовательности слов (выводов) $A_0A_1\ldots A_к$:

$$g(A_0A_1\ldots A_к)=\ p_0^{g(A_0)}\cdot p_1^{g(A_1)}\cdot\ldots\cdot p_k^{g(A_k)}$$

Отметим, что здесь все показатели четные, т.к. они – номера слов.

Примеры по нумерации:

$g(a_7)=5+8\cdot 7=61$

$g(x_2)=7+8\cdot 2=23$

2^{15} – номер терма, состоящего из переменной x_1

$g\ (P_1^2(x_1,x_2))=2^{11+8\cdot 2^1\cdot 3^2}\cdot 3^3\cdot 5^{15}\cdot 7^{11}\cdot 11^{23}\cdot 13^5$

Условная запись собственной аксиомы 6

$x_1+x_2{}' = (x_1+x_2)'$

Её же запись в формальной системе

$P_1^2(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1(f_2^2(x_1,x_2)))$ и соответственно

$g(P_1^2(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)), f_1^1(f_2^2(x_1,x_2))))=$

$$2^{155}\cdot 3^3\cdot 5^{9+8\cdot 4\cdot 9}\cdot 7^3\cdot 11^{15}\cdot 13^{11}\cdot 17^{9+8\cdot 2\cdot 3}\cdot 19^{3\ldots\ldots} \qquad (1)$$

Облегчение процесса нумерации

Скажем, что число x представляет последовательность чисел $a_0, a_1,\ldots, a_m$, если

$$x=(p_0)^{a_0}\,(p_1)^{a_1}\ldots.\,(p_m)^{a_m}$$

и число y представляет последовательность чисел b_0, b_1, …, b_n, если

$$y=(p_0)^{b_0}\,(p_1)^{b_1}\ldots.\,(p_n)^{b_n}:$$

Введём функцию $x * y = (p_0)^{a_0}\,(p_1)^{a_1}\ldots\,(p_m)^{a_m}(p_{m+1})^{b_0}\,(p_{m+2})^{b_1}\ldots\,(p_{m+n+1})^{b_n}$, где, используя известные примитивно-рекурсивные функции $lh(x)$ и $(x)_i$, будем иметь

$$m=lh(x)-1,\; n=lh(y)-1,\;\; (x)_i=a_i,\;\; (y)_i=b_i,$$

Следовательно,

$$x*y= x\cdot (p_{\,lh(x)})exp(y)_0\cdot (p_{\,lh(x)+1})exp(y)_1\cdot\ldots\cdot (p_{lh(x)+lh(y)})exp(y)_{lh(y)-1}$$

также будет примитивно-рекурсивной. Применение этой функции позволяет записать выражение (1) в более простом виде

$$2^{15}5^{3}3^{5}5^{9+8\cdot4\cdot9}{}_{*}\, 2^{3}3^{15}5^{11}{}_{*}2^{9+8\cdot2\cdot3}3^{3}\, 5^{7+8\cdot2}\ldots.$$

Вопросы

1) Выяснить, являются ли следующие числа номерами объектов формальной теории и если да, то какого объекта:

42, 155, 15, 167, 23, 57, 58, 153, 244, 159,

$2^{57}7^{5}\cdot 27\cdot 5^{23}$,

$2^{3}3^{7}5^{3}7^{155}11^{3}13^{13}17^{11}19^{57}23^{3}29^{15}31^{5}37^{5}41^{5}43^{5}$, (*)

$$2\exp 2^{3}3^{7}5^{3}7^{155}11^{3}13^{13}17^{11}19^{57}23^{3}29^{15}31^{5}37^{5}41^{5}43^{5}, \quad (**)$$

2) Если A и B формулы и $g(A)=m_1$, $g(B)=m_2$, то является ли номером формулы число $2^{m_1}\cdot 3^{7}\cdot 5^{m_2}$.

Предикат Гёделя

Очень важную роль в дальнейшем играет предложенный Гёделем следующий предикат

$$\mathbf{W(u,v) = И \Leftrightarrow u=g(A\ (x_1))},$$

где переменная x_1 свободна в формуле A и

$$\mathbf{v=g(B_0,B_1,\ldots,B_n=A(u))},$$

где $B_0, B_1,\ldots,B_n$ – вывод формулы A(u).

Верен ли предикат W(u,v) для следующих пар чисел:

(42, 10056008)

(900, 900000000)

(701, 5000000230000032000)

(4678236, 3908)

(32400, 5760)

(m,n), где m – значение выражения (*), а n – значение выражения (**)

Нетрудно убедиться, что что существует простой и эффективный метод нахождения значения предиката W(u,v) для любых чисел u и v, следовательно, согласно тезису Чёрча предикат W(u,v) рекурсивен.

Формальное доказательство рекурсивности предиката W(u,v) основано на рекурсивности ряда нижеприведённых предикатов и функций, сокращённые названия которых приведены на английском, а для некоторых обоснована их рекурсивность соответствующими представлениями. Со всеми необходимыми функциями и предикатами, а также доказательствами их рекурсивности можно познакомиться, например, в русском переводе [1] стр.158–160.

«Подсказки» для некоторых сокращений:

Формула – formula – Fml

Переменная – variable –Vbl

Вывод – proof – Proof

Свободная(ный) – free – Free

Подстановка – substitution - Sub

Результат – result – Res

Отрицание – negation – Neg

Fml(u)= И ⇔ когда u является гёделевым номером некоторой формулы;

Elemfml(u) = И ⇔ когда u является гёделевым номером некоторой элементарной формулы;

Freevbl(u,x)= И ⇔ когда u является гёделевым номером некоторой формулы, а x гёделев номер её переменной;

Term(t) = И ⇔ когда t является гёделевым номером некоторого терма;

Ax(x) = И ⇔ когда x является гёделевым номером некоторой аксиомы;

Ax$_i$(x) = И ⇔ когда x является гёделевым номером i–той аксиомы;

Funcvbl(x)= И ⇔ когда x является гёделевым номером некоторой функциональной переменной:

$$\exists y < x\ \exists z < x\ (x = 9 + 8 \cdot 2^{y} \cdot 3^{z})$$

Predvbl(x) = И ⇔ когда x является гёделевым номером некоторой предикатной переменной:

$$\exists y < x\ \exists z < x\ (x = 11 + 8 \cdot 2^{y} \cdot 3^{z})$$

Vbl(x) = И ⇔ когда x является гёделевым номером некоторой предметной переменной:

$$\exists y < x\ (x = 7+8 \cdot y)$$

Subfree(x,y,t) = И ⇔ когда терм с гёделевым номером t свободен для подстановки в формулу с гёделевым номером y вместо предметной переменной с гёделевым номером x;

Prooffml(x,y) = И ⇔ когда x является гёделевым номером вывода формулы с гёделевым номером x;

Ressub(y,x,t)= гёделевому номеру результата подстановки в выражение с гёделевым номером **y** вместо предметной переменной с гёделевым номером x терма с гёделевым номером t;

Argfuncvbl(x) = $([\frac{x \dot{-} 9}{8}])_1$ – количество аргументов функциональной переменной с гёделевым номером x;

Negfml(x)=$2^3 3^9 * x * 2^5$ является гёделевым номером формулы, являющейся отрицанием формулы с гёделевым номером x;

MP(x,y, z) = И ⇔ когда z является гёделевым номером формулы, полученной в результате применения правила m.p к формулам с гёделевыми номерами x и y:

$$\mathbf{y=2^3 * x * 2^7 * z * 2^5 \;\&\; Fml(x) \;\&\; Fml(y) \;\&\; Fml(z)}$$

Gen(x,y) = И ⇔ когда y является гёделевым номером формулы, полученной в результате применения правила вывода Gen к формуле с гёделевым номером x;

Proof(v)= И ⇔ когда v является гёделевым номером некоторого вывода:

$$\mathbf{\exists z<v(Ax(z)\&v=2^z)V\exists x<v\exists y<v\exists z<v\exists u<v(Proof(z)\&}$$
$$\mathbf{v=z*(p_{lh(z)})^u\&MP((z)_x,(z)_y,u)V\exists x<v\exists y<v\exists z<v(Proof(z)\&v}$$
$$\mathbf{=z*(p_{lh(z)})^x\&}$$
$$\mathbf{Gen(x,(z)_y)V\exists x<v\exists z<v\ (Proof(z)\&\ v=z*(p_{lh(z)})^x\&Ax(x));}$$

Prooffml(x,y) = И ⇔ когда y является гёделевым номером вывода формулы с гёделевым x.

Так как предикат Гёделя **W(u,v)** рекурсивен, то в **S** существует такая формула $W(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})$ с двумя свободными переменными, которая выражает этот предикат, т.е. для любых чисел u и v выполнено:
если **W(u,v)=И**, то $\vdash_{\boldsymbol{s}} W(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{v}})$
если **W(u,v)=Л**, то $\vdash_{\boldsymbol{s}} \rceil W(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\boldsymbol{v}})$.

Построим следующую формулу:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x_1}) \equiv \forall \boldsymbol{x_2} \rceil W(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}) \qquad (1)$$

Допустим u=g(A(x_1)). Подставим термальное представление числа u в (1).

$$\mathbf{A}(\overline{\boldsymbol{u}}) \equiv \forall \boldsymbol{x_2} \rceil W(\overline{\mathbf{u}}, \boldsymbol{x_2}).$$

Смысл этой формулы в следующем: для любого вывода не верно, что он является выводом формулы A($\overline{u}$)-n, но A($\overline{u}$) и есть эта формула, следовательно, она сама о себе сообщает, что ни один вывод не является её выводом, т.е. она не выводится. Далее будет доказана верность этого утверждения.

Первая и вторая теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Первая теорема Гёделя. Если **S** непротиворечива, то формула **A($\overline{\boldsymbol{u}}$)** невыводима в **S**.

Доказательство. Допустим обратное: **A($\overline{\boldsymbol{u}}$)** выводима в **S.** Тогда можно указать такую последовательность формул, которая является выводом **A($\overline{\boldsymbol{u}}$)**

$$\mathbf{v{=}g}\begin{cases} \vdash_s \boldsymbol{B_0} \\ \vdash_s \boldsymbol{B_1} \\ \vdots \\ \vdash_s \forall \boldsymbol{x_2} \rceil W(\overline{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x_2}) \end{cases} \qquad (2)$$

и **v** является гёделевым номером этого вывода, но тогда **W(u,v)=И,** следовательно,

$$\vdash_s W(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}})$$

$$\vdash_s \rceil W(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}}) \text{ удаление } \forall \text{ из } (2).$$

Получили противоречие, что невозможно в силу условия о непротиворечивости системы **S,** а значит допущение о выводимости формулы **A($\overline{u}$)** было не верным. Теорема доказана.

Для формальной теории через **Consis (непротиворечивость)** обозначим следующую формулу:

∀□∀y∀z ⌉ Fml(□)&Prooffml(□,y)& Prooffml(Negfml(□),z))

Вторая теорема Гёделя: Consiss не выводима в системе **S.**

То есть в формальной арифметике не выводима (не доказуема) её непротиворечовость. Действительно, если допустить обратное, т.е.

$\vdash_S$ Consiss   допущение

.....

.....

$\vdash_S$Consiss ⊃ A($\overline{u}$) формальное представление доказательства первой теоремы Гёделя

$\vdash_S$ A($\overline{u}$)   m.p.,

что противоречит утверждению первой теоремы.

Теорема. Формальная арифметика непротиворечива.

Приводим без доказательства, так как доказательство этого утверждения получается в более богатой теории, а для её определения и изучения понадобится дополнительное время (см., например, в русском переводе [1], стр. 282–295).

Следствие из теорем. Формальная арифметика не полна.

Действительно, из предыдущих теорем следует, что по крайней мере два верных утверждения не выводимы в формальной арифметике.

Комментарии

a) Здесь изложено лишь первое утверждение известной первой теоремы Гёделя о невыводимости формулы $\mathbf{A}(\overline{\boldsymbol{u}})$ и ничего не сказано об её отрицании. Дело в том, что мы задали «адаптированный» вариант понятия полноты теории: в ней выводимо всё, что верно. В известных литературных источниках принято иное определение: формальная теория считается полной, если существует такая замкнутая формула, что ни она, ни ее отрицание не выводимы в этой теории. В силу недостаточности времени одного семестра на определение омега-непротиворечивости или введения более сложной формулы по Россеру (см. русский перевод [1], стр. 158–163) выбран изложенный вариант.

b) Еще во Введении было указано, что доказанная в 1931 году первая теорема Гёделя до сего времени считается лучшей среди математических результатов. Кажется, что в ней особенного – арифметика, самая простая математическая теория не полна, что, в принципе, могло быть ожидаемым. Однако, если обратить внимание на ряд следующих обстоятельств:

- арифметика лежит в основе всех математических предметов,
- каждый рекурсивный предикат выразим в формальной арифметике,
- гёделевская нумерация была задана для объектов произвольной формальной теории, следовательно, предикат Гёделя рекурсивен в каждой конечно-аксиоматизируемой теории,

то из них следует, что

1. **для каждой непротиворечивой математической теории можно построить формулу, которая сама сообщит о своей невыводимости в этой теории,**
2. **непротиворечивость этой теории невозможно доказать средствами самой теории.**

Естественно, бессмысленно рассматривать противоречивые теории, так как в них вожно доказать любую нелепицу.

Фактически, значимость теоремы Гёделя в следующем: какие бы сложные непротиворечивые конечно-аксиоматизируемые математические теории не были бы построены, они не могут быть полными, так как в каждой из них хоть некоторое истинное утверждение не может быть доказано, а значит нет предела развитию математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mendelson Ell*. Introduction to mathematical logic (Discrete Mathematics and its Applications), sixth edition, © 2015 by Taylor & Francis Group, LLC CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group. (Русский перевод: Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Изд-во «Наука» Главная Редакция Физико-Математической Литературы, 1971).
2. *Kleene S*. Introduction to metamathematics (Dover books on mathematics), ISBN-13 978-0923891572, 2012.
3. *Kleene S.* Mathematical logic (Dover books on mathematics), ISBN-13, 978-0486425337, 2021.
4. *Weili Chen.* The Way of Machine Thinking: Volume 1: Rules of Universal Language and Fundamental Math, ISBN13, 979-8860709904,2023.
5. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

УПРАЖНЕНИЯ

а) Доказать истинность утверждения леммы Кальмара для нижеприведённых формул на заданных наборах значений переменных:

1. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (0,0,0)
2. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,1)
3. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
4. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (0,1,1)
5. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,0)
6. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
7. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (1,1,0)
8. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (1,1,1)
9. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,1,1)
10. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,1,0)
11. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (1,0,1)
12. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,0)
13. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,1)
14. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (0,1,0)
15. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,0,1)
16. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,0,0)
17. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (0,0,1)
18. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (0,1,1)
19. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,0)
20. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
21. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,1,0)
22. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,1)
23. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (0,0,1)

24. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,1,1)
25. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (1,1,1)
26. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,0,0)
27. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,1,0)
28. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (0,1,0)
29. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (1,0,1)
30. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,1,0)
31. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,1)
32. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (1,0,0)
33. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,0)
34. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (0,1,0)
35. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (0,1,1)
36. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,1)
37. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,0,1)
38. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (0,0,0)
39. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (0,1,0)
40. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,1)
41. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,0)
42. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (1,0,1)
43. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (1,0,1)
44. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (1,1,0)
45. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (1,1,1)
46. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,0,0)
47. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,0,1)
48. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (0,1,0)
49. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (0,1,1)
50. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,1,1)
51. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,1,0)
52. $p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset \neg p_1)$ (0,0,1)

53. $\neg p_1 \supset ((\neg p_3 \supset p_2) \supset p_1)$ (0,0,0)
54. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg (p_2 \supset p_1)$ (1,1,1)
55. $p_1 \supset \neg (p_3 \supset (p_2 \supset \neg p_1))$ (1,1,0)
56. $\neg (p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (1,0,1)
57. $((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (1,0,0)
58. $(p_1 \supset \neg p_3) \supset (p_2 \supset \neg p_1)$ (1,0,1)
59. $p_1 \supset (\neg p_3 \supset \neg (p_2 \supset p_1))$ (1,1,1)
60. $(\neg p_1 \supset (p_3 \supset \neg p_2)) \supset p_1$ (0,0,0)
61. $\neg ((p_1 \supset \neg p_3) \supset \neg p_2) \supset p_1$ (0,0,1)

б) Вывести в исчислении высказываний:

1. $\neg(A \supset \neg C) \supset ((\neg C \supset B) \supset (C \supset A))$
2. $\neg B \supset (C \supset (B \supset \neg A))$
3. $(\neg A \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
4. $\neg B \supset ((A \vee B) \vee \neg A)$
5. $\neg A \supset (A \vee B \supset B)$
6. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset (C \supset \neg A))$
7. $(\neg A \vee B) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (B \& C)$
8. $(A \vee B) \& (A \vee C) \supset A \vee (B \& C)$
9. $(A \supset B) \supset (A \& C \supset B \& C)$
10. $(A \supset \neg B) \supset (\neg(A \supset B) \vee \neg A)$
11. $(A \supset (B \supset C \vee \neg C))$
12. $A \vee (B \vee C) \supset B \vee (A \vee C)$
13. $C \supset (A \supset (\neg B \supset A \& \neg B))$
14. $B \supset (\neg A \& B \supset (B \supset \neg A))$
15. $\neg B \supset (\neg C \supset \neg(B \vee C))$
16. $\neg(A \& B) \supset (\neg A \vee \neg B)$
17. $(B \supset C) \supset ((B \supset \neg C) \supset (\neg C \supset \neg B))$

18. $(A \supset \neg B) \supset (C \vee A \supset C \vee \neg B)$
19. $(A \vee B \& \neg B) \supset A$
20. $((A \vee B) \& ((A \supset C) \& (B \supset C))) \supset C$
21. $\neg(B \supset \neg C) \supset ((\neg C \supset A) \supset (C \supset B))$
22. $\neg A \supset (B \supset (A \supset \neg C))$
23. $(\neg B \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
24. $\neg B \supset ((A \vee C) \vee \neg A)$
25. $\neg A \supset (A \vee C \supset C)$
26. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg D) \supset (D \supset \neg A))$
27. $(\neg A \vee D) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (D \& C)$
28. $(A \vee B) \& (A \vee D) \supset A \vee (B \& D)$
29. $(B \supset A) \supset (B \& C \supset A \& C)$
30. $(A \supset \neg C) \supset (\neg(A \supset C) \vee \neg A)$
31. $(D \supset (B \supset C \vee \neg C))$
32. $A \vee (B \vee A) \supset B \vee (A \vee C)$
33. $D \supset (A \supset (\neg B \supset A \& \neg B))$
34. $B \supset (\neg C \& B \supset (B \supset \neg C)) \neg A \supset (\neg C \supset \neg(A \vee C))$
35. $\neg(A \& C) \supset (\neg A \vee \neg C)$
36. $(A \supset C) \supset ((A \supset \neg C) \supset (\neg C \supset \neg A))$
37. $(A \supset \neg B) \supset (D \vee A \supset D \vee \neg B)$
38. $(C \vee B \& \neg B) \supset C$
39. $((A \vee D) \& ((A \supset C) \& (D \supset C))) \supset C$
40. $\neg(A \supset \neg C) \supset (D \supset (C \supset A))$
41. $\neg B \supset (C \supset (B \supset \neg A))$
42. $(\neg A \& B) \supset (\neg A \supset B) \& (B \supset \neg A)$
43. $\neg B \supset ((A \vee B) \vee \neg A)$
44. $\neg A \supset (A \vee B \supset B)$
45. $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset (C \supset \neg A))$
46. $(\neg A \vee B) \& C \supset (\neg A \& C) \vee (B \& C)$

47. $(A\vee B)\&(A\vee C)\supset A\vee(B\&C)$
48. $(A\supset B)\supset(A\&C\supset B\&C)$
49. $(A\supset\neg B)\supset(\neg(A\supset B)\vee\neg A)$
50. $(A\supset(B\supset C\vee\neg C))$
51. $A\vee(B\vee C)\supset B\vee(A\vee C)$
52. $C\supset(A\supset(\neg B\supset A\&\neg B))$
53. $B\supset(\neg A\&B\supset(B\supset\neg A))$
54. $\neg B\supset(\neg C\supset\neg(B\vee C))$
55. $\neg(A\&B)\supset(\neg A\vee\neg B)$
56. $(B\supset C)\supset((B\supset\neg C)\supset(\neg C\supset\neg B))$
57. $(A\supset\neg B)\supset(C\vee A\supset C\vee\neg B)$
58. $(A\vee B\&\neg B)\supset A$
59. $((A\vee B)\&((A\supset C)\&(B\supset C)))\supset C$
60. $A\&\neg A\supset B\vee\neg B$

в) Для нижеприведенных формул привести три интерпретации, в которых формула является

- выполнимой, но не тавтологией,
- тавтологией,
- противоречием.

Если какая-либо из указанных интерпретаций невозможна, указать причину.

1. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\& P_2^2(f_1^1(a_1),x_2)\supset\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)$
2. $x\cdot(y-z)=x\cdot y-x\cdot z$
3. $\forall x_1 P_1^3(x_1,f_1^1(x_3),x_2)\supset P_2^1(f_1^1(x_3))$
4. $x+y\cdot z=y+x\cdot z$
5. $\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2))\supset\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2))$
6. $(x+y)\cdot z=x\cdot y\cdot z$

7. $\exists x_1(\forall x_2 P_1^2(x_1,x_2))$
8. $x=y\&y=z\supset x=z$
9. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset P_1^2(f_1^2(x_3,a_2),x_2)$
10. $x+y=z\supset x+z=y$
11. $\forall x_1(P_1^2(x_1,x_2)\supset P_2^2(x_1,f_1^1(x_2)))$
12. $x+y=z\supset x=z\&y=z$
13. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\ V(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
14. $x=yVx=z\supset y=z$
15. $\urcorner\exists x_1(\forall x_2 P_1^2(x_1,x_2))$
16. $x\cdot y\cdot z=xVx\cdot y\cdot z=yVx\cdot y\cdot z=z$
17. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\supset\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
18. $x\cdot y\cdot z=xVx\cdot y\cdot z=yVx\cdot y\cdot z=z\supset(x=y=z=1)$
19. $\forall x_1(P_1^2(x_1,x_2)\supset\urcorner P_2^2(x_1,f_1^1(x_2)))$
20. $x\cdot y\cdot z=x\&x\cdot y\cdot z=y\&x\cdot y\cdot z=z$
21. $\urcorner(P_1^2(x_1,x_2)\supset P_1^2(f_1^1(x_1),f_1^1(x_2)))$
22. $x=y=z\supset xy=xz=yz$
23. $(\forall x_1 P_1^2(x_2,x_1))\supset P_1^2(x_2,f_1^2(x_3,x_2))$
24. $(x=y\cdot z)\supset(x=y)V(x=z)$
25. $\exists x_1 P_1^2(x_1,x_2)\supset\urcorner(\forall x_3 P_2^3(x_1,x_2,x_3))$
26. $(x<y)\supset(x\cdot y\geq x\cdot x)$
27. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\&\urcorner P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)$
28. $\urcorner((x+y)+\alpha=x+(\alpha+y))$
29. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset(\urcorner P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset\exists x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
30. $(x<y)\supset(x+y\geq x+x)$
31. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\supset(\urcorner\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
32. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset\urcorner P_1^2(x_3,x_2))$
33. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\&(\urcorner\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$

34. $P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$

35. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset(\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2)) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$

36. $\neg (P_1^2 (x_1,x_2) \supset P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$

37. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \&(\neg \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))$

38. $\neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))\supset P_1^2 (x_1,x_2)$

39. $(\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$

40. $\neg (P_1^2 (x_1,x_2) \supset P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$

41. $\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2) \supset (\forall x_1 \neg P_1^2 (x_1,x_2))\& P_2^2(f_1^1(a_1),x_2) x_2)$

42. $\neg P_2^1(f_1^1(x_3))\supset\forall x_1P_1^3(x_1,f_1^1(x_3),x_2)$

43. $\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2))\supset\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))\vee\neg P_2^1(f_1^1(a_2))$

44. $\exists x_1(\forall x_2P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg P_1^2(f_1^2(x_3,a_2),x_2)$

45. $\neg P_1^2(f_1^2(x_3,a_2),x_2)\supset (\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))$

46. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)))\supset \neg \forall x_1(P_1^2 (x_1,x_2)$

47. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \vee(\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))\supset \neg (\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))$

48. $(\forall x_1 \neg P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg \exists x_1(\forall x_2P_1^2 (x_1,x_2))$

49. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))\supset (\neg \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))$

50. $\neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)))\supset \neg \forall x_1(P_1^2 (x_1,x_2)$

51. $P_1^2(x_2,f_1^2(x_3,x_2))\supset \neg (\forall x_1P_1^2 (x_2,x_1))$

52. $\neg \exists x_1P_1^2 (x_1,x_2)\supset \neg (\forall x_3P_2^3 (x_1,x_2,x_3))$

53. $\forall x_1P_1^2 (x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))\& \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$

54. $\neg \exists x_1P_1^2 (x_1,x_2))\supset (\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2)) \supset(\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$

55. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset(\neg \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$

56. $\neg P_1^2 (x_3,x_2))\supset (\neg \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2)) \supset(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$

57. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \&(\neg \forall x_1P_1^2 (x_1,x_2))$

58. $\neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))\supset \neg P_1^2 (x_1,x_2)$

59. $(\forall x_1P_1^2 (x_1,x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$

60. $\neg (P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$

г) Привести к предварённой нормальной форме:

1. $(\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))\& P_2^2(f_1^1(a_1),x_2) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)$
2. $\forall x_1 P_1^3(x_1, f_1^1(x_3),x_2) \supset \exists x_3 P_2^1(f_1^1(x_3))$
3. $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2)) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2))$
4. $\exists x_1(\forall x_2 P_1^2(x_1,x_2)) \supset \exists x_3 P_2^1(f_1^1(x_3))$
5. $(\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)) \supset \neg\exists x_2 P_1^2(f_1^2(x_3,a_2),x_2)$
6. $\forall x_1(P_1^2(x_1,x_2) \supset \neg\exists x_1 P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)))$
7. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\ \vee(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
8. $\neg\exists x_1(\forall x_2 P_1^2(x_1,x_2)) \supset \neg(\forall x_3 P_2^3(x_1,x_2,x_3))$
9. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
10. $\neg(\forall x_3 P_2^3(x_1,x_2,x_3))\&(P_1^2(x_1,x_2) \supset \neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)))$
11. $(\forall x_1 P_1^2(x_2,x_1)) \supset \neg(\forall x_3 P_1^2(x_2,f_1^2(x_3,x_2))$
12. $\exists x_1 P_1^2(x_1,x_2) \supset \neg(\forall x_3 P_2^3(x_1,x_2,x_3))$
13. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\& \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)$
14. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset(\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)) \supset \exists x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
15. $\exists x_2 P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset(\neg\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset P_3^1(f_1^1(x_3))$
16. $(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)) \supset \neg\exists x_2 P_1^2(x_3,x_2))$
17. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)\ \&(\neg\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
18. $\exists x_2 P_2^2(x_1, x_2) \supset \neg\forall x_1 P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$
19. $\neg\exists x_2 P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\ \vee P_3^1(f_1^1(x_3))$
20. $\neg\exists x_2(P_1^2(x_1,x_2) \supset(\forall x_1 P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
21. $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2))\vee P_2^1(f_1^1(a_2))\supset\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\vee\neg P_2^1(f_1^1(a_2))$
22. $\exists x_1(\forall x_2 P_1^2(x_1, x_2)) \supset \neg P_1^2(f_1^2(x_3, a_2),x_2)$
23. $\neg P_1^2(f_1^2(x_3,a_2),x_2)\supset (\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$
24. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2)))\supset \neg\forall x_1(P_1^2(x_1,x_2)$
25. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\ \vee(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))\supset \neg(\forall x_1 P_1^2(x_1,x_2))$

26. $(\forall x_1 \neg P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg \exists x_1(\forall x_2 P_1^2 (x_1,x_2))$
27. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2))$
28. $\neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2))) \supset \neg \forall x_1(P_1^2 (x_1,x_2)$
29. $P_1^2(x_2,f_1^2(x_3,x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2 (x_2,x_1))$
30. $\neg \exists x_1 P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg (\forall x_3 P_2^3 (x_1,x_2,x_3))$
31. $\forall x_1 P_1^2 (x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \& \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
32. $\neg \exists x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
33. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
34. $\neg P_1^2 (x_3,x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
35. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \& (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2))$
36. $\neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset \neg P_1^2 (x_1,x_2)$
37. $(\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
38. $\neg (P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
39. $\neg P_2^1(f_1^1(x_3)) \supset \forall x_1 P_1^3(x_1,f_1^1(x_3),x_2)$
40. $P_2^2(x_1, f_1^1(x_2))) \supset \neg \forall x_1(P_1^2 (x_1,x_2)$
41. $P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \vee (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2))$
42. $(\forall x_1 \neg P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg \exists x_1(\forall x_2 P_1^2 (x_1,x_2))$
43. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2))$
44. $\neg P_2^2(x_1, f_1^1(x_2))) \supset \neg \forall x_1(P_1^2 (x_1,x_2)$
45. $P_1^2(x_2,f_1^2(x_3,x_2)) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2 (x_2,x_1))$
46. $\neg \exists x_1 P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg (\forall x_3 P_2^3 (x_1,x_2,x_3))$
47. $\forall x_1 P_1^2 (x_1, x_2) \supset \neg (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \& \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
48. $\neg \exists x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
49. $(P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
50. $\neg P_1^2 (x_3,x_2)) \supset (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2)) \supset (P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
51. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \& (\neg \forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2))$
52. $\neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)) \supset \neg \forall P_1^2 (x_1,x_2)$
53. $(\forall x_1 P_1^2 (x_1,x_2) \vee \neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
54. $\neg \forall (P_1^2 (x_1,x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$

55. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)\ \&(\neg\forall x_1P_1^2\ (x_1,x_2)) \supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)$
56. $\neg\exists P_1^2\ (x_1,x_2) \supset \neg P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))$
57. $\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2) \supset(\forall x_1P_1^2\ (x_1,x_2))\ V\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))$
58. $\neg(P_1^2\ (x_1,x_2) \supset\neg\exists P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2)))$
59. $P_2^2(f_1^1(x_3), x_2)\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2)\ \&(\neg\forall x_1P_1^2\ (x_1,x_2))$
60. $\neg\neg\exists P_1^2(f_1^1(x_1), f_1^1(x_2))\supset P_1^2\ (x_1,x_2)$
61. $(\forall x_1P_1^2\ (x_1,x_2)\ V\neg P_2^2(f_1^1(x_3),x_2))\supset P_2^2(f_1^1(x_3),x_2$

д) Вывести в формальной арифметике:

1. $t = r \supset \overline{1} + t' = r''$
2. $ts = 0\&s = t' \supset t = 0$
3. $(t' + r') + s' = (t + (r + s))'''$
4. $t'' + \overline{3} = t' + \overline{4}$
5. $\neg(t + s = 0)\ \supset\ \neg(t = s)$
6. $t<s \supset\ (s = r \supset t<r)$
7. $t' + \overline{3} = (t + \overline{1})'''$
8. $r = 0\&\, t<s \supset\ tr = sr$
9. $\overline{3}t + \overline{1} = (\overline{2}t)' + t$
10. $(t + r)'' = t' + r'$
11. $r<s\&s<t \supset r + \overline{2} \leq t$
12. $(t'' + \overline{1})' = t + \overline{4}$
13. $t = r' \supset t<r + \overline{2}$
14. $t' + r = r' + t$
15. $t + s = r \supset t' + s' = r''$
16. $t \leq s\&s \leq t \supset t = s$
17. $t''' + \overline{2} = t'' + \overline{3}$
18. $\neg(t = s) \supset \neg(t + s = 0)$

19. $t' + (r' + s') = ((t + r) + s)'''$
20. $\overline{2}t + \overline{3} = (t)''' + t$
21. $\overline{3}t + \overline{4} = (\overline{2}t)'''' + t$
22. $t = r \supset \overline{2} + t' = r'''$
23. $ts = 0 \& s = t'' \supset t = 0$
24. $(t'' + r') + s' = (t + (r + s))''''$
25. $t'' + \overline{4} = t' + \overline{5}$
26. $\neg(t + s = 0) \supset \neg(t' = s')$
27. $t<s \supset (s = r' \supset t<r')$
28. $t'' + \overline{3} = (t + \overline{1})''''$
29. $r = 0 \& t'<s \supset t'r = sr$
30. $\overline{3}t + \overline{2} = (\overline{2}t)' + t'$
31. $(t + r)''' = t'' + r'$
32. $r<s \& s'<t \supset r + \overline{3} \leq t$
33. $(t'' + \overline{2})' = t + \overline{5}$
34. $t = r' \supset t<r + \overline{3}$
35. $t'' + r = r'' + t$
36. $t' + s = r \supset t' + s' = r'$
37. $t' \leq s \& s \leq t' \supset t' = s$
38. $t''' + \overline{2} = t' + \overline{4}$
39. $\neg(\mathrm{t}' = \mathrm{s}') \supset \neg(\mathrm{t} + \mathrm{s} = 0)$
40. $t + (r' + s') = ((t + r) + s)''$
41. $\overline{2}t + \overline{4} = (t)'''' + t$
42. $\overline{3}t + \overline{2} = (\overline{2}t)'' + t$
43. $t = r \supset \overline{2} + t' = r'''$
44. $ts = 0 \& s = t'' \supset t = 0$
45. $(t' + r') + s''' = (t + (r + s))'''$

46. $t'' + \overline{3} = t''' + \overline{2}$
47. $\urcorner(\mathrm{t} + \mathrm{s} = 0) \supset \urcorner(t'' = s'')$
48. $t<s \supset (s = r'' \supset t'<r''')$
49. $t' + \overline{4} = (t + \overline{3})'''$
50. $r = 0 \& t<s'' \supset tr = sr$
51. $\overline{3}t + \overline{2} = (\overline{2}t)' + t'$
52. $(t' + r)'' = t' + r''$
53. $r<s \& s<t \supset r + \overline{3} \le t'$
54. $(t'' + \overline{3})' = t' + \overline{4}$
55. $t = r' \supset t<r + \overline{3}$
56. $t' + r'' = r' + t''$
57. $t + s = r \supset t' + s = r'$
58. $t \le s' \& s' \le t \supset t = s'$
59. $t'' + \overline{2} = t + \overline{4}$
60. $\urcorner(\mathrm{t} + \mathrm{s}' = 0)$

е) Построить формулы, представляющие в S следующие функции:

1. $F(x, y) = x^2 + 3!\,y$
2. $F(x, y, z) = y^2 + 3rm(x, z)$
3. $F(x, y) = max(2x, 3y^2)$
4. $F(x, y, z) = min(x, y + 1, z + 2)$
5. $F(x, y) = |x - 2y|$
6. $F(x, y, z) = rm(xz, 3y)$
7. $F(x) = \mu_y(x + 5y \ge 40)$
8. $F(x, y, z) = max(rm(x, y), 3z)$
9. $F(x, y) = 8x + sg(y)$

10. $F(x,y,z) = 2xy \dot{-} z$
11. $F(x) = \mu_y\,(|x - 2y| = 0)$
12. $F(x,y,z) = [xy/2z]$
13. $F(x,z) = \mu_y(|xz - y| = 0)$
14. $F(x,y,z) = 2xy \dot{-} 3z$
15. $F(x,y,z) = min(rm(x,z), y)$
16. $F(x,y) = sg|3x - 2y|$
17. $F(x,y,z) = [xz/3y]$
18. $F(x,y) = \mu_z(|2xy - z| = 0)$
19. $F(x,y,z) = [x/y] + 3z$
20. $F(x,y) = min([x/2],[y/3])$
21. $F(x,y,z) = min(max(y,z), x)$
22. $F(x,y) = 4x^2 + 3!\,y$
23. $F(x,y,z) = 5y^2 + 3rm(x,z)$
24. $F(x,y) = max(2x, 32y^2)$
25. $F(x,y,z) = min(x, y + 31, z + 2)$
26. $F(x,y) = |x - 32y|$
27. $F(x,y,z) = rm(7xz, 3y)$
28. $F(x) = \mu_y(x + 5y \geq 409)$
29. $F(x,y,z) = max(2rm(x,y), 3z)$
30. $F(x,y) = 18x + sg(y)$
31. $F(x,y,z) = 2xy \dot{-} 3z$
32. $F(x) = \mu_y\,(\,|4x - 2y| = 0)$
33. $F(x,y,z) = [3xy/2z]$
34. $F(x,z) = \mu_y(|xz - 2y| = 0)$
35. $F(x,y,z) = 2xy \dot{-} 3z$
36. $F(x,y,z) = min(rm(x,z), y)$
37. $F(x,y) = sg|3x - 2y|$

38. $F(x,y,z) = [xz/3y]$
39. $F(x,y) = \mu_z(|2xy - z| = 0)$
40. $F(x,y,z) = 7[x/y] + 3z$
41. $F(x,y) = min([x/2],[y/13])$
42. $F(x,y,z) = min(max(y,z),5x)$
43. $F(x,y) = x^2 + 4!\,y$
44. $F(x,y,z) = 7y^2 + 3rm(x,z)$
45. $F(x,y) = max(21x, 13y^2)$
46. $F(x,y,z) = min(x, y + 71, z + 2)$
47. $F(x,y) = |5x - 2y|$
48. $F(x,y,z) = rm(11xz, 3y)$
49. $F(x) = \mu_y(x + 5y \geq 40)$
50. $F(x,y,z) = max(rm(x,2y),3z)$
51. $F(x,y) = 18x + sg(y)$
52. $F(x,y,z) = 2xy \dot{-} 5z$
53. $F(x,y,z) = min(rm(x,z),7y)$
54. $F(x,y) = sg|3x - 2y|$
55. $F(x,y,z) = [xz/3y]$
56. $F(x,y) = \mu_z(|3xy - z| = 0)$
57. $F(x,y,z) = [x/2y] + 3z$
58. $F(x,y) = min([x/2],[y/5])$
59. $F(x,y,z) = min(max(y,z),7x)$
60. $F(x,y) = 5x^2 + 3!\,y$
61. $F(x,y,z) = y^2 + 3rm(x,2z)$
62. $F(x,y) = max(12x, 3y^2)$
63. $F(x,y,z) = min(x + 3, y + 1, z + 2)$
64. $F(x,y) = |7x - 12y|$

ж) По гёделеву номеру восстановить объект формальной теории (если таковой существует):

1. 443
2. 1500
3. 2034
4. 666
5. 2299
6. 428
7. 87456
8. 691
9. 1500
10. 2034
11. 666
12. 2299
13. 428
14. 87456
15. 3276
16. 71
17. 59
18. 2691
19. 489
20. 2021
21. 349
22. 241
23. 2331
24. 749
25. 729
26. 3000
27. 1946
28. 1948
29. 1952
30. 1919
31. 1912
32. 1931
33. 1906
34. 1942
35. 1953
36. 1964
37. 1969
38. 1978
39. 2007
40. 2009
41. 1986
42. 1991
43. 1961
44. 1966
45. 1992
46. 1995
47. 2002
48. 2014
49. 214
50. 202
51. 209
52. 207
53. 198
54. 201
55. 1962
56. 1973
57. 2015
58. 503
59. 7411
60. 2025
61. 2026
62. 2027

Список вопросов

1. Определение формальной теории (язык, аксиомы, правила выводов), свойства (непротиворечивость, полнота, разрешимость).
2. Определение исчисления высказываний, свойства.
3. Теорема дедукции в исчислении высказываний.
4. Лемма Кальмара.
5. Теорема о полноте исчисления высказываний.
6. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
7. Независимость аксиом исчислния выскаываний.
8. Определние исчисления предикатов, свойства.
9. Интерпретации, выполнимые, противоречивые, тавтологичные и логически обще-значимые формулы.
10. Теорема дедукции в исчислении предикатов.
11. Теорема о непротиворечивости исчисления предикатов.
12. Определние формальной арифметики, свойства.
13. Введение новых отношений в S.
14. Метатеорема о неравенстве, сумме и произведении в S.
15. Выразимость предикатов и представление функций в S, примеры.
16. Представимость базисных функций в S.
17. Функция Гёделя и ее свойство.
18. Представимость в S результата операции введения фиктивных переменных.

19. Представимость в S результата операции подстановки.
20. Представимость в S результата операции примитивной рекурсии.
21. Представимость в S результата операции минимизации.
22. Выразимость в S рекурсивных предикатов.
23. Нумерации объектов формальных теорий.
24. Первая теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
25. Вторая теорема Гёделя о невыводимости непротиворечивости арифметики в ней

А. Чубарян
Лекции по предмету
«Математическая логика»
Учебное пособие

Главный редактор РНИ – М.Э. Авакян
Корректор – А.С. Есаян
Компьютерная верстка – А.С. Бжикян

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского (Славянского) университета:
0051, г. Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123
тел⁄факс: (+374 12) 77-57-75 (внутр.: 392)
e-mail: *maria.avakian@rau.am*

Заказ № 21
Подписано к печати 10.05.2025г.
Формат 60x70$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Объем 7.5 усл. п.л. Тираж 150 экз.