ՌՈՒՍԱՍՏԱՆԻ ԴԱՇՆՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ
ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՏԱՍՆԵՐԿՈՒԵՐՈՐԴ ՏԱՐԵԿԱՆ ԳԻՏԱԺՈՂՈՎ

4–8 դեկտեմբերի 2017 թ.

Հոդվածների ժողովածու

ԵՐԵՎԱՆ
ՌՀՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДВЕНАДЦАТАЯ ГОДИЧНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

4–8 декабря 2017 г.

Сборник статей

ЕРЕВАН
ИЗДАТЕЛЬСТВО РАУ
2018

УДК 5:06
ББК 22
Г 590

*Печатается по решению Ученого совета,
НТС и РИС РАУ*

Г 590 **Годичная научная конференция** (4–8 декабря 2017г.): Сборник научных статей: серия: физико-математические и естественные науки. – Ер.: Изд-во РАУ, 2018. – 192 с.

Сборник печатается по материалам 12-ой Годичной Научной конференции, проведенной в Российско-Армянском университете. Статьи публикуются в алфавитном порядке и под авторскую ответственность.

Публикация сборника осуществлена также в соответствии с требованиями ВАК РА к сборникам научных трудов.

УДК 5:06
ББК 22

ISBN 978-9939-67-213-7

МАТЕМАТИКА

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СВЕРХТОЖДЕСТВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПО РАВЕНСТВУ $((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$

***Л.Р. Абрамян*[1]**

[1]*Арцахский государственный университет*

liana_Abrahamyan@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной научной статье характеризуются сверхтождества, определенные по равенству $((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$ в фукционально-нетривиальных 2q-алгебрах и 3q-алгебрах.

Ключевые слова: $\{2,3\}$-алгебра, 2q-алгебра, 3q-алгебра, обратимая алгебра, сверхтождество.

Введение

Обычно в алгебре изучаются свойства первого или второго порядка, т.е. такие свойства, которые выражаются формулами первого или второго порядка. Отличие формул первого и второго порядка заключается в том, что в формулах второго порядка кванторные символы существования и общности связывают не только предметные переменные, но и функциональные (предикатные) переменные. Одни из таких классов формул называются сверхтождествами.

Общее понятие сверхтождества рассматривал Ю.М. Мовсисян [1–4]) как формулу языка второго порядка следующего вида:

$$\forall X_1,...,X_m \forall x_1,...,x_n \, (w_1 = w_2),$$

где $X_1,...,X_m$ – функциональные переменные, а $x_1,...,x_n$ – предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2. О формулах второго порядка см. ([5, 6]) (см. также [7, 8]).

Обычно сверхтождества записываются без кванторной приставки, понимая их выполнимость (истинность) в алгебрах в следующем смысле. В алгебре (Q,Σ) выполняется сверхтождество:

$$w_1 = w_2, \qquad (*)$$

если равенство $(*)$ справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются, соответственно, любым элементом из Q и любой операцией, соответствующей арности из, Σ (предполагается возможность такой замены, т.е. имеет место включение $\{|X_1|,...,|X_m|\} \subseteq \{|A| \mid A \in \Sigma\}$, где $|S|$ – арность S). Число m называется функциональным рангом сверхтождества; если m>1, то сверхтождество называется нетривиальным.

Например, в дистрибутивной решетке $Q(+,\cdot)$ выполняются следующие сверхтождества идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$X(x,x) = x,$$
$$X(x,y) = X(y,x),$$
$$X(X(x,y),z) = X(x,X(y,z)).$$
$$X(x,Y(y,z)) = Y(x,X(x,y),X(x,z)).$$

Доказано [3, 4] и обратное утверждение, что любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток является следствием этих четырех свертождеств. Кроме того, в [3, 4] характеризованы также сверхтождества многообразий всех решеток, модулярных решеток, а также многообразие булевых алгебр. В [7, 8] рассмотрены сверхтождества в термальных алгебрах или в алгебрах полиномов. Они доказали, что в полиномиальных алгебрах групп или полугрупп сверхтождества не имеют конечного базиса.

Алгебра с бинарными и тернарными операциями называется $\{2,3\}$-алгеброй.

$\{2,3\}$-алгебра (Q,Σ) называется функционально-нетривиальной, если в ней множество бинарных и множество тернарных операций неодноэлементно.

$\{2,3\}$-алгебра (Q,Σ) называется обратимой алгеброй, если в ней каждая операция квазигрупповая.

$\{2,3\}$-алгебра (Q,Σ) называется 2q-алгеброй, если в ней существует бинарная квазигрупповая операция и 3q-алгеброй, если в ней существует тернарная квазигрупповая операция.

n-группоид $Q(A)$) называется n-квазигруппой или n-арной квазигруппой, если в равенстве $A(x_1^n)=x_n+1$ всякие n элементы из x_1^{n+1} однозначно определяют $n+1$-й. Иными словами, $Q(A)$ называется n-квазигруппой, если уравнение

$$A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n)=b$$

однозначно разрешимо для любых $a_1^n,b\in Q$ и для любого $i=1,2,...,n$.

При $n=2$ получаем 2-квазигруппу или обычную (бинарную) квазигруппу, а при $n=3$ получаем 3-квазигруппу или тернарную квазигруппу.

Основной результат

Основным результатом данной статьи является следующая теорема:

Теорема. *1).* Если в фукционально-нетривиальной 2q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество, определенное по равенству:

$$((x,y),u,v)=(x,y,(u,v)) \ ,$$

тогда в нем каждая тернарная функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга 2 или 3 и одного из следующих видов:

$$X(Y(x,y),u,v)=X(x,y,Y(u,v)),$$
$$X(Y(x,y),u,v)=X(x,y,Z(u,v)).$$

2). Если в функционально-нетривиальной 3q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество, определенное по равенству:

$$((x, y), u, v) = (x, y, (u, v)),$$

тогда в нем каждая бинарная функциональная переменная повторяется хотя бы два раза. Следовательно, каждое такое сверхтождество может быть только функционального ранга 2 или 3 и одного из следующих видов:

$$Y(X(x, y), u, v) = Z(x, y, X(u, v)),$$
$$Y(X(x, y), u, v) = Y(x, y, X(u, v)).$$

Доказательство: *1).* Пусть в фукционально-нетривиальной 2q-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество, определенное по равенству:

$$((x, y), u, v) = (x, y, (u, v)).$$

Рассмотрим произвольное такое сверхтождество:

$$X(Y(x, y), u, v) = Z(x, y, T(u, v)).$$

Предположим, что в этом сверхтождестве функциональная переменная X встречается всего один раз и А-бинарная квазигрупповая операция из Σ. Тогда имеем:

$$X_1(A(x, y), u, v) = Z(x, y, T(u, v)) \quad (1)$$

$$X_2(A(x, y), u, v) = Z(x, y, T(u, v)), \quad (2)$$

где $X_1 \neq X_2$ и $X_1, X_2 \in \Sigma.$

Правые части равенства (1) и (2) равны, следовательно, равны и их левые части, т.е. имеет место:

$$X_1(A(x, y), u, v) = X_2(A(x, y), u, v).$$

Так как тернарная операция обратима (квазигрупповая), то из равенства

$$X_1(A(x, y), u, v) = X_2(A(x, y), u, v)$$

следует

$$X_1(t, u, v) = X_2(t, u, v),$$

где $t = A(x, y) \in Q$ – произвольный элемент из Q. Противоречие.

Следовательно, функциональная переменная X должна повторяться в рассматриваемом сверхтождестве.

2). Аналогично доказывается, что бинарная функциональная переменная Y также должна повторяться, если данное сверхтождество выполняется в функционально-нетривиальной 3q-алгебре. Действительно, пусть функциональная пременная Y встречается всего один раз. Здесь полагаем $X = B$, где B – тернарная квазигрупповая операция из Σ. Тогда имеем:

$$B(Y_1(x,y),u,v) = Z(x,y,T(u,v))$$
$$B(Y_2(x,y),u,v) = Z(x,y,T(u,v)),$$

где $Y_1 \neq Y_2$ и $Y_1, Y_2 \in \Sigma$.

Следовательно,

$$B(Y_1(x,y),u,v) = B(Y_2(x,y),u,v),$$

и поскольку B – тернарная квазигрупповая операция, здесь можно сократить на u,v:

$$Y_1(x,y) = Y_2(x,y),$$

т.е. $Y_1 = Y_2$. Противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Ю.М.* Введние в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.
2. *Мовсисян Ю.М.* Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1990.
3. *Movsisyan Yu.* Hyperidentities in algebras and varieties // Uspekhi Mathematicheskikh Nauk, 53(1998). PP. 61–114. English traslation in Russian Mathematical Surveys 53 (1998). PP. 57–108.
4. *Movsisyan Yu*. Hyperidentities and hypervarieties, Scientiae Mathematicae Japonicae, 54(3), (2001). PP. 595–640.
5. *Malcev A.* Some problems in the theory of classes of models, Proceedings of IV All-Union Mathematical Congress, Leningrad, I, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, Leningrad. PP. 169–198, 1963.
6. *Church A.* Introduction to mathematical logic, vol. I, Princeton University Press, Princeton, 1956. *Bergman G.* Hyperidentities of groups and semigroups, A equationes Math. 23(1981). PP. 50–65.

7. *Taylor W*. Hyperidentities and hypervarieties, A equationes Math. 23(1981). PP. 111–127.

CHARACTERIZATION OF HYPERIDENTITIES DEFINED BY THE EQUATION $((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$

L. Abrahamyan

ABSTRACT

In this paper we characterize the hyperidentities defined by the equation $((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$ which are satisfied in functionally non-trivial 2q-algebras and 3q-algebras.

Keywords: {2}-algebra, 2q-algebra, 3q-algebra, invertible algebra, hyperidentity.

$((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇՎՈՂ ԳԵՐՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒՄԸ

Լ.Ռ. Աբրահամյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատանքում բնութագրվում են $((x,y),u,v)=(x,y,(u,v))$ հավասարությամբ որոշվող գերնույնությունները ֆունկցիոնալ-ոչտրիվիալ 2q-հանրահաշիվներում և 3q-հանրահաշիվներում:

Հիմնաբառեր՝ {2}-հանրահաշիվ, 2q-հանրահաշիվ, 3q-հանրահաշիվ, հակադարձելի հանրահաշիվ, գերնույնություն:

ԵՐԵՔ ԽՈՐԱՆԱՐԴՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

***Ա.Հ. Ավագյան*[1], *Գ.Վ. Դալլաքյան*[1]**

[1]*Խ. Աբովյանի անվան հայկական պետական մանկավարժական համալսարան*

avagyana73@gmail.com, dallakyangurgen@gmail.com

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածը նվիրված է հայտնի $a^3 + b^3 + c^3 = d$ տեսքի դիոֆանտյան հավասարումների որոշ մասնավոր դեպքերի լուծմանը: Հաջողվել է գտնել նշված խնդրի լուծման արդյունավետ ալգորիթմ, որն այս խնդրի լուծման այլ ալգորիթմների համեմատ ավելի պարզ է և օգտագործում է զգալիորեն փոքր քանակությամբ գործողություններ:

Հիմնաբառեր՝ դիոֆանտյան հավասարումներ, երեք խորանարդների գումար:

1. Ներածություն

Ամբողջ թվի երեք խորանարդների գումարով ներկայացնելու խնդիրն ունի ավելի քան 160 տարվա պատմություն: Այս խնդրի ուղղությամբ հայտնի առաջին ակնարկն արվել է Ֆերմայի կողմից, ով առաջարկել է գտնել այնպիսի ոչ զրոյական երեք ամբողջ թվեր, որոնց n աստիճանների գումարը հավասար է զրոյի: Խնդրի դրվածքը հիմք հանդիսացավ, որ հետագայում շատ մաթեմատիկոսներ (Էյլեր, Վիետ և այլն) զբաղվեն $n = 3$ դեպքի, այսինքն՝ $x^3 + y^3 + z^3 = k$ հավասարման, լուծումների փնտրմամբ k-ի տարբեր արժեքների համար: Ներկայացնենք որոշ նշանակալից արդյունքեր ըստ ժամանակացույցի:

1825 թվական. Ս. Ռայլին իր [1] աշխատանքում $k \epsilon Z$ դեպքի համար ստացավ ռացիոնալ լուծումների պարամետրական ընտանիք՝

$$x = \frac{(9d^6 - 30k^2d^3 + k^4)(3d^3 + k^2) + 72k^4d^3}{6kd(3d^3 + k^2)^2}$$

$$y = \frac{30k^2d^3 - 9d^6 - k^4}{6kd(3d^3 + k^2)}$$

$$z = \frac{18kd^5 - 6k^3d^2}{(3d^3 + k^2)^2}$$

1908 թվական. Ա.Ս. Վերեբրուսովը քննարկեց $k = 2$ դեպքը և գտավ լուծումների այսպիսի պարամետրական ընտանիք [2].

$$(6t^3 + 1)^3 - (6t^3 - 1)^3 - (6t^2)^3 = 2:$$

1936 թվական. ավելի ուշ $k = 1$ դեպքի վերաբերյալ առաջին հետազոտությունը հրապարակվեց Մահլերի կողմից [3].

$$(9t^4)^3 + (3t - 9t^4)^3 + (1 - 9t^3)^3 = 1$$

1942 թվական. Մորդելն ապացուցեց [2], որ k-ի ցանկացած այլ արժեքների համար $x^3 + y^3 + z^3 = k$ հավասարման ռացիոնալ գործակիցներով պարամետրական լուծումը պետք է լինի առնվազն 5 աստիճանի:

1954 թվական. Միլլերն ու Վուլեթը [4] հայտնաբերեցին 1-ից 100 միջակայքի 69 թվերի խորանարդների գումարով ներկայացումները, ընդ որում x, y, z-ը բավարարում էին $|x|, |y|, |z| \leq 3164$ պայմանին:

1963 թվական. Գարդիների, Լազարուսի և Ստեյնի [5] կողմից գտնվեցին $x^3 + y^3 = z^3 - k$ հավասարման $0 \leq x \leq y \leq 2^{16}$, $0 \leq z - x \leq 2^{16}$ և $0 \leq |k| \leq 999$ պայմաններին բավարարող համարյա բոլոր լուծումները: Նրանց չհաջողվեց գտնել 1-ից 1000 միջակայքի միայն 70 թվերի ներկայացումները՝ 30, 33, 39, 42, 52, 74, 75, 84, 110, 114, 143, 156, 165, 180, 195, 231, 290, 312, 318, 321, 366, 367, 390, 420, 435, 439, 444, 452, 462, 478, 501, 516, 530, 534, 542, 556, 564, 579, 588, 600, 606, 609, 618, 627, 633, 660, 663, 732, 735, 754, 758, 767, 777, 786, 789, 795, 830, 834, 861, 870, 894, 903, 906, 912, 921, 933, 948, 964, 969, 975,

1992 թվական. գտնվեց 39 թվի ներկայացումը: Հիթ-Բրաունը, Լիոնը և Ռիլեն [6] օգտագործեցին լիովին նոր ալգորիթմ և հայտնաբերեցին, որ

$$39 = 134476^3 + 117367^3 + (-159380)^3:$$

1994 թվական. Կոյաման [7] օգտագործեց անհատական համակարգիչներ և լայնացրեց որոնումների տիրույթը՝ մինչև $|x|, |y|, |z| \leq 2^{21}$, բացի այդ գտավ 100–ից 1000 միջակայքի մինչ այդ անհայտ ևս 16 թվերի ներկայացումները: Նույն տարում Կոնը և Վասերստեյնը գտան 84-ի և 960-ի ներկայացումները և իրենց [8] աշխատանքում կազմեցին $k \in (1,100)$ միջակայքի լուծումների աղյուսակը:

1995 թվական. Բրեմները [9] մշակեց ալգորիթմ, որն օգտագործում էր էլիպտիկ կորերի տեսությունը: Դրանով նա էապես փոքրացրեց փնտրման տիրույթը և գտավ 75–ի (ըստ այդմ 600-ի) ներկայացումը, այդպիսով մինչ 100 թվերի մեջ անհայտ լուծումների քանակը դարձնելով 5: Ապա Լյուքը [10] նույն ալգորիթմով գտավ 110, 435 և 478 թվերի առաջին ներկայացումները:

1997 թվական. Կոյաման, Ցուրուոկան և Սեկիգավան մեկ այլ ալգորիթմով գտան 100-ից մինչև 1000 միջակայքի ևս 5 թվերի համար լուծումներ: Իրենց [11] աշխատանքում նրանք քննարկեցին նաև մինչ այդ հայտնի որոշ ալգորիթմների բարդության աստիճանը:

1999 թվական. Բեռնշտեյնը [12], իրագործելով Էլկիասի [13] աշխատանքում առաջարկված մեթոդը հայտնաբերեց k-ի 11 նոր արժեքների համար լուծումներ:

Ընդհանրացնելով վերն ասվածը, կարելի է նշել, որ $1 \leq k \leq 999$ արժեքներից մինչ 21-րդ դարի սկիզբը չլուծված էին մնացել 27-ը: Դրանք, իրենց փնտրման տիրույթների հետ միասին, ներկայացված են ստորև բերված աղյուսակում:

K	< T
33	10^{12}
42	6.5×10^{11}

74	1.5×10^{11}
156, 165, 318, 366, 390, 420, 534, 564, 579, 609, 627, 633, 732, 758, 786, 789, 795, 834 894, 903, 906, 921, 948, 975	10^{10}

Միայն վերջերս՝ 2007 թվականին, Էլզենհանսի և Ցահնելի կողմից [14] հնարավոր եղավ գտնել լուծումներ k=156, 318, 366, 420, 564, 758, 789, 894 և 948 արժեքների համար՝

$$156 = 26577110807569^3 - 18161093358005^3 - 23381515025762^3$$
$$318 = 47835963799^3 + 20549442727^3 - 49068024704^3$$
$$318 = 1970320861387^3 + 1750553226136^3 - 2352152467181^3$$
$$318 = 30828727881037^3 + 27378037791169^3 - 36796384363814^3$$
$$366 = 241832223257^3 + 167734571306^3 - 266193616507^3$$
$$420 = 8859060149051^3 - 2680209928162^3 - 8776520527687^3$$
$$564 = 53872419107^3 - 1300749634^3 - 53872166335^3$$
$$758 = 662325744409^3 + 109962567936^3 - 663334553003^3$$
$$789 = 18918117957926^3 + 4836228687485^3 - 19022888796058^3$$
$$894 = 19868127639556^3 + 2322626411251^3 - 19878702430997^3$$
$$948 = 323019573172^3 + 63657228055^3 - 323841549995^3$$
$$948 = 103458528103519^3 + 6604706697037^3 - 103467499687004^3$$

Այսպիսով, 1000–ից փոքր թվերից մնացել են միայն 33, 42, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, 975 թվերը, որոնք առայժմ չեն ստացել իրենց լուծումները, մնացած բոլորի ներկայացումները հրապարակված են համացանցում, մասնավորապես դա արվել է Սանդեր Հուիսմանի կողմից [15]:

2. Նոր մեթոդ և արդյունքներ

Ինչպես արդեն նկատեցինք, ամբողջ թվի երեք խորանարդների գումարի տեսքով ներկայացնելու խնդրում դեռևս շատ հարցեր են բաց մնում, նույնիսկ $k=1$ դեպքում հայտնի չէ՝ կա արդյոք բոլոր հնարավոր լուծումների բազմությունը նկարագրող ընտանիք:

Ընդհանրապես ասած, հայտնի է, որ չկա վերջավոր մեթոդ՝ պարզելու համար տրված դիոֆանտյան հավասարումն ունի լուծումներ, թե՝ ոչ: Այնուհանդերձ, հարկ է նշել, որ

$$x^3 + y^3 + z^3 = k^3 \quad (2.1)$$

խնդրի բոլոր ռացիոնալ լուծումները հայտնի են.

$$x = q[1 - (a - 3b)(a^2 + 3b^3)]$$
$$y = q[1 - (a - b)(a^2 + 3b^3)]$$
$$z = q[(a^2 + 3b^2)^2 - (a + 3b)]$$
$$k = q[(a^2 + 3b^2)^2 - (a - 3b)]$$

որտեղ q, a, b-ը ցանկացած ռացիոնալ թվեր են [16]: Պարզ է, որ եթե ընդունենք q–ի արժեքը հավասար $[(a^2 + 3b^2)^2 - (a - 3b)]$-ի հակադարձին՝ կստանանք

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad (2.2)$$

հավասարման ռացիոնալ լուծումները:

Չնայած ռացիոնալ լուծումների գոյությանը (2.2)-ի ամբողջ լուծումների պարամետրական ընտանիքի հարցը վերջնականորեն լուծված չէ: Մասնավորապես, այդ ուղղությամբ հայտնի արդյունք հանդիսացող

$$(1 + -9m^3)^3 + (9m^4)^3 + (-9m^4 - +3m)^3 = 1 \quad (2.3)$$

ներկայացումը չի ստանում (2.2)-ի բոլոր լուծումները, քանի որ այդ հավասարման համար [16]-ում գտնված են (2.3)-ից տարբեր լուծումներ, օրինակ.

$$(1 - 9t^3 + 648t^6 + 3888t^9)^3 + (-135t^4 + 3888t^{10})^3 + (3t - 81t^4 - 1296t^7 - 3888t^{10})^3 = 1$$

Ինչ վերաբերում է $a^3 + b^3 + c^3 = 2$ խնդրին, այստեղ նս կա պարամետրական լուծում.

$$(6t^3 + 1)^3 - (6t^3 - 1)^3 - (6t^2)^3 = 2 \quad (2.4)$$

որը, սակայն, նս չի «ծածկում» բոլոր ամբողջ լուծումները, քանի որ.

$$21214928^3 + 3480205^3 - 3528875^3 = 2$$

$k = 1,2$ դեպքերի նկարագրումն արդեն ապացուցում է, որ

$$a^3 + b^3 + c^3 = k \quad (2.5)$$

խնդրի լուծումը $k > 2$ ընդհանուր դեպքում բավականաչափ բարդ է և այս ուղղությամբ ստացված ցանկացած արդյունք ինքնին հետաքրքիր է:

Երկար ժամանակ չլուծված է մնում այն խնդիրը, թե արդյոք ցանկացած $k \neq 4.5(mod9)$ ամբողջ թիվ կարելի է ներկայացնել երեք թվերի խորանարդների գումարի տեսքով: Բնական է, որ այսպիսի խնդիրների լուծման հուսադրող ուղիներից շատերը պետք էր կապել համակարգչային տեխնոլոգիաների զարգացման հետ: Համաձայն Դանիել Բեռնշտեյնի [12] համացանցային էջի, համակարգիչների օգտագործմամբ այս հարցի ուսումնասիրությունը սկսվել է 1955 թվականից: Այնուհանդերձ, $k = 3$ դեպքում, բացի (1, 1, 1), (4, 4,–5), (4,–5, 4) և (–5, 4, 4) ակնհայտ լուծումներից, մինչ օրս այլ լուծումներ չեն գտնվել: Իսկ օրինակ, $k = 30$-ի համար առաջին լուծումը գտնվել է 2000 թվականին Հարվարդի համալսարանի երիտասարդ պրոֆեսոր Ն. Էլկիսի կողմից [17]:

Սույն աշխատանքում ներկայացված մեթոդը և արդյունքը ևս վերաբերում են հանրահայտ երեք խորանաղների գումարի խնդրին: Սակայն այստեղ մենք դիտարկում ենք խնդրի ավելի ընդհանուր դրվածքը. փնտրում ենք հնարավորինս բարձր կարգի $P_1(y)$, $P_2(y)$, $P_3(y)$ և հնարավորինս ցածր կարգի $Q(y)$ բազմանդամներ, այնպիսիք՝ որ տեղի ունենա

$$P_1^3(y) + P_2^3(y) + P_3^3(y) = Q(y) \tag{2.6}$$

հավասարությունը: Պարզ է, որ $\deg Q(y) = 0$ դեպքում (2.6)-ը հանգում է հնարավորինս փոքր աջ մասով (2.5) հավասարման հնարավորինս մեծ լուծումների ստացմանը:

Նշենք, որ այս աշխատանքում ներկայացված ալգորիթմը լիովին նոր մոտեցում է: Այն էապես տարբերվում է մինչ այժմ հայտնի լուծումներից, առանձնանում է գործողությունների շատ ավելի փոքր քանակով և արդյունավետությամբ: Նկարագրենք այդ ալգորիթմը (8, 8, 6) մասնավոր դեպքի համար, այսինքն՝ որոնելի $P_1^3(y) + P_2^3(y) + P_3^3(y)$ գումարը փնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$(ax^8 + bx^5 + cx^2)^3 - (ax^8 + b_1x^5 + c_1x^2)^3 - (Ax^6 + Bx^3 + C)^3 \tag{2.7}$$

Հաշվումների բարդությունը մեղմելու նպատակով կօգտագործենք Mathematica 11.0 փաթեթը: Նախ վերլուծենք (2.7)-ը.

$$-C^3-3BC^2x^3+(c^3-3B^2C-3AC^2-{c_1}^3)x^6$$
$$+(-B^3+3bc^2-6ABC-3b_1{c_1}^2)x^9$$
$$+\left(-3AB^2+3b^2c+3ac^2-3A^2C-3{b_1}^2c_1-3a{c_1}^2\right)x^{12}$$
$$+\left(b^3-3A^2B-{b_1}^3+6abc-6ab_1c_1\right)x^{15}$$
$$+\left(-A^3+3ab^2-3a{b_1}^2+3a^2c-3a^2c_1\right)x^{18}$$
$$+(3a^2b-3a^2b_1)x^{21}$$

Ալգորիթմ:

Քայլ առաջին: Ընդունենք $b_1=b$, կունենանք.

$$-C^3-3BC^2x^3+(c^3-3B^2C-3AC^2-{c_1}^3)x^6$$
$$+(-B^3+3bc^2-6ABC-3bc_1{}^2)x^9$$
$$+(-3AB^2+3b^2c+3ac^2-3A^2C-3b^2c_1-3a{c_1}^2)x^{12}$$
$$+(-3A^2B+6abc-6abc_1)x^{15}+(-A^3+3a^2c-3a^2c_1)x^{18}$$

Քայլ երկրորդ: Գլխավոր անդամի գործակիցը հավասարեցնենք 0-ի և ստացված $c_1=\frac{-A^3+3a^2c}{3a^2}$ արժեքը տեղադրենք վերլուծության մեջ.

$$-C^3-3BC^2x^3+\left(\frac{A^9}{27a^6}-\frac{A^6c}{3a^4}+\frac{A^3c^2}{a^2}-3B^2C-3AC^2\right)x^6$$
$$+\left(-\frac{A^6b}{3a^4}-B^3+\frac{2A^3bc}{a^2}-6ABC\right)x^9$$
$$+\left(-\frac{A^6}{3a^3}+\frac{A^3b^2}{a^2}-3AB^2+\frac{2A^3c}{a}-3A^2C\right)x^{12}$$
$$+\left(\frac{2A^3c}{a}-3A^2B\right)x^{15}$$

Քայլ երրորդ: Վարվելով նույն կերպ կունենանք $B=\dfrac{2Ab}{3a}$ արժեքը, որի տեղադրումից կստանանք.

$$-C^3-\frac{2AbC^2x^3}{a}+\left(\frac{A^9}{27a^6}-\frac{A^6c}{3a^4}+\frac{A^3c^2}{a^2}-\frac{4A^2b^2C}{3a^2}-3AC^2\right)x^6+\left(-\frac{A^6b}{3a^4}-\frac{8A^3b^3}{27a^3}+\frac{2A^3bc}{a^2}-\frac{4A^2bc}{a}\right)x^9+\left(-\frac{A^6}{3a^3}+\frac{A^3b^2}{a^2}+\frac{2A^3c}{a}-3A^2C\right)x^{12}$$

Քայլ երրորդ: Վերջում կատարելով $C=\frac{-A^4-aAb^2+6a^2Ac}{9a^3}$ փոխարինումը՝ կստանանք.

$$\frac{A^{12}}{729a^9}+\frac{A^9b^2}{243a^8}+\frac{A^6b^4}{243a^7}+\frac{A^3b^6}{729a^6}-\frac{2A^9c}{81a^7}-\frac{4A^6b^2c}{81a^6}-\frac{2A^3b^4c}{81a^5}+\frac{4A^6c^2}{27a^5}+\frac{4A^3b^2c^2}{27a^4}-\frac{8A^3c^3}{27a^3}+\left(-\frac{2A^9b}{81a^7}-\frac{4A^6b^3}{81a^6}-\frac{2A^3b^5}{81a^5}+\frac{8A^6bc}{27a^5}+\frac{8A^3b^3C}{27a^4}-\frac{8A^3bc^2}{9a^3}\right)x^3+\left(\frac{2A^6b^2}{27a^5}+\frac{A^3b^4}{9a^4}+\frac{A^6c}{9a^4}-\frac{4A^3b^2c}{9a^3}-\frac{A^3c^2}{3a^2}\right)x^6+\left(\frac{A^6b}{9a^4}+\frac{4A^3b^3}{27a^3}-\frac{2A^3bc}{3a^2}\right)x^9$$

Հետագա դիտարկումները նվիրված են հետաքրքրություն ներկայացնող դեպքերի բացահայտմանը: Նախ վերլուծենք գլխավոր անդամի գործակիցը.

$$-\frac{A^3b(-3A^3-4ab^2+18a^2c)}{27a^4}$$

Դեպք 1. $b=0$: Արդյունքն ունի

$$\frac{A^{12}}{729a^9}-\frac{2A^9c}{81a^7}+\frac{4A^6c^2}{27a^5}-\frac{8A^3c^3}{27a^3}+\left(\frac{A^6c}{9a^4}-\frac{A^3c^2}{3a^2}\right)x^6$$

տեսքը: Նորից վերլուծենք գլխավոր գործակիցը՝

$$-\frac{A^3c(-A^3+3a^2c)}{9a^4}$$

Ենթադեպք 1.1. $c=0$: Արդյունքն ունի $\frac{A^{12}}{729a^9}$ տեսքը, որն ռացիոնալ թվի խորանարդ է և հետևաբար հետաքրքիր չէ:

Ենթադեպք 1.2. $c=\frac{A^3}{3a^2}$: Այստեղ ևս ստացվում է ոչ հետաքրքիր արդյունք՝ $-\frac{A^{12}}{729a^9}$:

Դեպք 2. $c=\frac{3A^3+4ab^2}{18a^2}$: Արդյունքում ունենք.

$$-\frac{A^3(-3A^3+2ab^2)(3A^3+2ab^2)}{972a^6}$$

Վերլուծելով վերջինս և տեղադրելով $a=\frac{3A^3}{2b^2}$, կստանանք.

$$-\frac{64b^{18}}{14348907A^6}-\frac{64b^{15}x^3}{177147A^3}$$

Վերջապես ընդունելով $x=\frac{2yb}{A}$, կստանանք մեզ համար հետաքրքրություն ներկայացնող արդյունք՝ $-1-648y^3$:

Քննարկենք ստացված ներկայացման կիրառությունը (2.5) հավասարման լուծման գործընթացում: Նախ, վերհիշենք ներկայացումը.

$$(54y^2(1+36y^3+432y^6))^3-\left(18y^2(1+108y^3+1296y^6)\right)^3 \\ -(1+216y^3+3888y^6)^3=-1-648y^3$$

Ապա կիրառենք հետևյալ ծրագրային կոդը.

$\boldsymbol{G8}[\boldsymbol{y}\_] \coloneqq$

$\boldsymbol{1/GCD}[\left(\boldsymbol{54y^2(1+36y^3+432y^6)}\right),\left(\boldsymbol{18y^2(1+108y^3+1296y^6)}\right),(\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{+216y^3+3888y^6})]$

$\boldsymbol{F8}[\boldsymbol{y}\_] \coloneqq$

$\boldsymbol{G8}[\boldsymbol{y}\_]*\{\left(\boldsymbol{54y^2(1+36y^3+432y^6)}\right),\ \left(\boldsymbol{18y^2(1+108y^3+1296y^6)}\right),$
$(\boldsymbol{1+216y^3+3888y^6})\}$

$\boldsymbol{V8}[\boldsymbol{y}\_] \coloneqq \boldsymbol{G8}[\boldsymbol{y}]^{\boldsymbol{3}}*(\boldsymbol{-1-648y^3})$

$\boldsymbol{For}[\boldsymbol{i}=\boldsymbol{-10},\boldsymbol{i}\le\boldsymbol{10},\boldsymbol{i}++,$

$\boldsymbol{IF}\ [\boldsymbol{Abs}[\boldsymbol{V8}[\boldsymbol{i}]]<10000, If[Max\left[\boldsymbol{Abs}[\boldsymbol{F8}[\boldsymbol{i}]]\right]>10000,$

$Print[\{i,F\boldsymbol{8}[\boldsymbol{i}],\boldsymbol{V8}[\boldsymbol{i}]\}]]]]$

Արդյունքն ունի հետևյալ տեսքը.

$\{-2,\{5909976,5909832,247105\},5183\}$

$\{-1,\{21438,21402,3673\},647\}$

Վերջինս մասնավորապես նշանակում է, որ $21438^3 - 21402^3 - 3673^3 = 647$:

Նշենք, որ բերված ծրագրային կոդում փոքր փոփոխություններ կատարելով կարելի է ստանալ $[1, 999]$ հատվածի շատ թվերի համար նոր ներկայացումներ, սակայն 33, 42, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, 975 չլուծված դեպքերից ոչ մեկի համար առայժմ մեզ չի հաջողվում ստանալ որևէ ներկայացում:

Այնուհանդերձ հատկանշանական է, որ մեր ալգորիթմը առանձնակի արդյունավետությամբ է աշխատում «մեծ» թվերի հետ: Քանի որ, $max[abs[x, y, z]] \leq 10^{14}$ դեպքում կան հայտնի աղյուսակներ [12], ուստի փորձենք գտնել $max[abs[x, y, z]] \geq 10^{15}$ պայմանին բավարարող լուծումներ, որոնք կհամապատասխանեն հնարավորինս փոքր $abs[k]$-երի: Դրա համար, ծրագրային կոդի ցիկլը ձևափոխենք.

Կստանանք.

$\boldsymbol{For}[\boldsymbol{i} = -\mathbf{100}, \boldsymbol{i} \leq \mathbf{100}, \boldsymbol{i} + +,$

$\boldsymbol{IF}\ [\boldsymbol{Abs}[\boldsymbol{V}\mathbf{8}[\boldsymbol{i}]] < 10000000,$

$If[Max\left[\boldsymbol{Abs}[\boldsymbol{F}\mathbf{8}[\boldsymbol{i}]]\right] > 100000000000000,$

$\boldsymbol{Print}[\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F}\mathbf{8}[\boldsymbol{i}], \boldsymbol{V}\mathbf{8}[\boldsymbol{i}]\}]]]]$

$\{-24, \{2\,567\,821\,449\,787\,776, 2\,567\,821\,449\,767\,040, 743\,005\,384\,705\}, 8\,957\,951\}$
$\{-23, \{1\,826\,826\,152\,412\,942, 1\,826\,826\,152\,393\,898, 575\,560\,908\,361\}, 7\,884\,215\}$
$\{-22, \{1\,280\,134\,359\,213\,336, 1\,280\,134\,359\,195\,912, 440\,818\,766\,785\}, 6\,899\,903\}$
$\{-21, \{882\,323\,723\,704\,878, 882\,323\,723\,689\,002, 333\,456\,678\,073\}, 6\,001\,127\}$
$\{-20, \{597\,190\,579\,221\,600, 597\,190\,579\,207\,200, 248\,830\,272\,001\}, 5\,183\,999\}$
$\{-19, \{396\,187\,745\,103\,486, 396\,187\,745\,090\,490, 182\,912\,903\,785\}, 4\,444\,631\}$
$\{-18, \{257\,069\,967\,014\,232, 257\,069\,967\,002\,568, 132\,238\,267\,201\}, 3\,779\,135\}$
$\{-17, \{162\,727\,709\,397\,246, 162\,727\,709\,386\,842, 93\,845\,807\,065\}, 3\,183\,623\}$
$\{-16, \{100\,190\,958\,663\,168, 100\,190\,958\,653\,952, 65\,228\,931\,073\}, 2\,654\,207\}$

Այստեղից, մասնավորապես հետևում է, որ

$$100190958663168^3 - 100190958653952^3 - 65228931073^3 = 2654207$$

Եթե վերը բերված ալգորիթմը կիրառենք (25, 25, 18) դեպքի համար, ապա ստացվում են ավելի հետաքրքիր արդյունքներ, օրինակ.

$$1356746873828735451217558350 9^3 - 135674687382873545121755420 37^3 - 2839823167678672896 01^3 = -4852225$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Ryley S.* The Ladies' Diary 122 (1825), 35.
2. *Mordell L.* On Sums of Three Cubes, Journal of the London Mathematical Society 17 (1942). PP. 139–144. MR0007761 (4:189d).
3. *Mahler K.* Note On Hypothesis K of Hardy and Littlewood, Journal of the London Mathematical Society 11 (1936). PP. 136–138.
4. *Miller J.C.P. and Woollett M.F.C.* Solution of the Diophantine Equation $x^3 + y^3 + z^3 = k$, Journal of the London Mathematical Society 30 (1955). PP. 101–110. MR0067916 (16:797e).
5. *Gardiner V., Lazarus R. and Stein P.* Solutions of the Diophantine Equation $x^3 + y^3 = z^3 - d$, Mathematics of Computation 18 (1964). PP. 408–413. MR0175843 (31:119).
6. *Heath-Brown D., Lioen W. and te Riele H.* On Solving the Diophantine Equation $x^3 + y^3 + z^3 = k$ on a Vector Computer, Mathematics of Computation 61 (1993). PP. 235–244. MR1202610 (94f:11132).
7. *Koyama K.* Tables of solutions of the Diophantine equation $x^3 + y^3 + z^3 = n$, Mathematics of Computation 62 (1994). PP. 941–942.
8. *Conn W. and Vaserstein L.* On Sums of Three Integral Cubes, Contemporary Mathematics 166 (1994). PP. 285–294. MR1284068 (95g:11128).
9. *Bremner A*. On sums of three cubes, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings 15 (1995). PP. 87–91. MR1353923 (96g:11024).
10. *Richard F.* Lukes, A Very Fast Electronic Number Sieve, University of Manitoba doctoral thesis, 1995.
11. *Koyama K.* Yukio Tsuruoka and Hiroshi Sekigawa, On Searching for Solutions of the Diophantine Equation $x^3 + y^3 + z^3 = n$, Mathematics of Computation 66 (1997). PP. 841–851. MR1401942 (97m:11041).
12. *Bernstein D.* Three cubes, available at: http://cr.yp.to/threecubes.html.
13. *Noam Elkies*, <elkies@abel.math.harvard.edu> "$x^3 + y^3 + z^3 = d$", 9 July 1996, nmbrthry@listserv.nodak.edu via <http://listserv.nodak.edu/archives/nmbrthry.html>.

14. http://www.uni-math.gwdg.de/jahnel/Preprints/elk_ants6c.pdf
15. *Sander G.* Huisman, Newer sums of three cubes, archive.org
16. *Payne G., Vaserstein L.* Sums of three cubes. PP. 443–454 in The Arithmetic of Function Fields, de Gruyter, 1992.
17. *Elkies N.* Rational points near curves and small nonzero |x3 − y2| via lattice reduction, in: Algorithmic number theory (Leiden 2000), Lecture Notes in Computer Science 1838, Springer, Berlin 2000. PP. 33–63. MR1850598 (2002g:11035).

О ПРОБЛЕМЕ СУММЫ ТРЕХ КУБОВ

А.Г. Авагян, Г.В. Даллакян

АННОТАЦИЯ

Данная научная статья посвящена решению известного диофантового уравнения вида $a^3+b^3+c^3=d$ в некоторых частных случаях. Используя пакет «Mathematica 11», удалось найти эффективный алгоритм нахождения решений этой задачи, которая, по сравнению с другими известными алгоритмами, дающими решения этой задачи, является более простым и использует значительно меньшее количество операций.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, сумма трех кубов.

ON A PROBLEM OF THE SUM OF THREE CUBES

A. Avagyan, G. Dallakyan

ABSTRACT

The article is dedicated to the famous Diophantine equation of the form $a^3+b^3+c^3=d$ .We solve this problem in some particular cases. Using the package “Mathematica 11” we find an efficient algorithm to solve this problem. This algorithm is simpler and uses a significantly smaller number of operations than other known describing solutions of this equations algorithms.

Keywords: diophantine equations, the sum of three cubes.

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $\mathfrak{R}^*$

С.Л. Берберян

Российско-Армянский университет

samvel357@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе в зависимости от граничного поведения непрерывных действительнозначных функций класса $\mathfrak{R}^*$ дается классификация всех точек единичной окружности. Этот класс содержит класс нормальных действительнозначных функций.

Ключевые слова: действительнозначные непрерывные функции, класс $\mathfrak{R}^*$, предельные множества.

Вопрос классификации точек единичной окружности в зависимости от граничного поведения функций, определенных в единичном круге, давно привлекал внимание известных специалистов комплексного анализа. Подобного типа задачи для мероморфных и гармонических функций, определенных в единичном круге, рассматривались такими известными математиками, как Плеснер, Мейер, Ямасита и В.И. Гаврилов. Представляет интерес рассмотреть классификацию точек единичной окружности для непрерывных действительнозначных функций класса $\mathfrak{R}^*$. В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений. Обозначим

Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств Минобрнауки РФ.

через Γ и $h(\xi,\varphi)$, соответственно, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке ξ угол *φ;* $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta_\alpha(0,\varphi_1,\varphi_2)$ – угол величины α с вершиной в точке $z=1$. Обозначим через $\Delta_\alpha(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ образ угла $\Delta(0,\varphi_1,\varphi_2)$ при повороте $z'=e^{i\theta}z$ ($0<\theta<2\pi$), где $\xi=e^{i\theta}$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$, определенную в D. Для произвольного подмножества S круга *D*, для которого $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества *S*, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ относим к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называют «множеством точек Фату» для функции $f(z)$. Через $R(f,\xi,S)$ обозначают множество повторяющихся значений функций $f(z)$ на множестве S, $a=f(z_n^a)$, $n\in N$, для которой последовательность $\{z_n^a\}$ точек множества S, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n^a=\xi$, удовлетворяет условию $\xi\in\Gamma$. Нам понадобятся некоторые понятия из теории предельных множеств, содержащиеся, например, в монографиях [35] и [41].

Точку $\xi\in\Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, если

$$C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')),$$

для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$, где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2'\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Точку $\xi \in K(f)$ относят к подмножеству $C(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)) = C(f,\xi,D)$ для любого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, где $\varphi_1,\varphi_2 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Точку $\xi \in \Gamma$ назовем уточненной точкой Жюлиа функции $f(z)$ и отнесем к подмножеству $J^*(f)$ множества $J(f)$, если для любой хорды $h(\xi,\varphi)$ множество $R(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ покрывает R, за возможным исключением двух значений. Точка $\xi \in \Gamma$ называется уточненной точкой Мейера функции $f(z)$ и относится к множеству $M^*(f)$, если:

a) $C(f,\xi,D)$ содержит более одной точки;

b) $C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) = C(f,\xi,D) \neq \overline{R}$ для любой хорды $h(\xi,\varphi)$;

c) Множество $C(f,\xi,D) \setminus R(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ состоит самое большое из двух элементов для любой хорды $h(\xi,\varphi)$.

Обыкновенная точка Мейера отличается от уточненной точки Мейера тем, что в ней отсутствуют свойства a) и c). Точка $\xi \in C(f)$ называется точкой граничной непрерывности функции $f(z)$ и относят ее к множеству $C_b(f)$, если $C(f,\xi,D)$ или $C(\frac{1}{f},\xi,D)$ состоит из единственного значения. Обозначим через $B(f)$ множество всех точек $\xi \in K(f)$, в которых для любого угла $\Delta(\xi)$ выполнены следующие свойства: $C(f,\xi,\Delta(\xi)) \neq \overline{R}$ и $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ содержит более одного элемента. Пересечение обозначим через $B^*(f)$. Точку $\xi \in \Gamma$ назовем уточненной точкой Линделефа функции $f(z)$, если:

a) $C(f,\xi,\Delta_1(\xi)) = C(f,\xi,\Delta_2(\xi)) \neq \overline{R}$ для любых углов
$B(f) \bigcap C(f)$ $\Delta_1(\xi),\Delta_2(\xi)$;

b) $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ содержит более одной точки;

c) множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))\setminus R(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ состоит самое большее из двух зчений для любого угла $\Delta(\xi)$ и для любой хорды $h(\xi,\varphi)$.

Множество уточненных точек Линделефа функции $f(z)$ обозначим через $L^*(f)$. Действительнозначную функцию $f(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{R}^{\theta}$, где $0\le\theta<\pi$ – фиксировано, если порождаемое ею семейство функций $\Phi^{\theta}=\{f(S_a^{\theta}(z));\quad S_a^{\theta}\in \mathrm{T}^{\theta}\}$, где $\mathrm{T}^{\theta}=\{S_a^{\theta}(z);S_a^{\theta}(z)=(z+ae^{i\theta})\cdot(1+aze^{-i\theta})^{-1},\quad a\in(-1,1)$ и θ, $0\le\theta<\pi$ – фиксировано$\}$ нормально в D в смысле Монтеля. Обозначим $\mathfrak{R}^*=\bigcap\limits_{0\le\theta<\pi}\mathfrak{R}^{\theta}$.

При получении новых результатов используются **методы** современного комплексного анализа и теории предельных множеств.

Полученные результаты

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Для произвольной непрерывной действительнозначной функции $f(z)$ класса $\mathfrak{R}^*$, определенной в D, справедливы равенство $B^*(f)=M^*(f)$ и разложение $\Gamma=C_b(f)\bigcup M^*(f)\bigcup J^*(f)\bigcup E$, в котором E – некоторое множество первой категории и типа F_{σ} на Γ.

Теорема 2. Для произвольной непрерывной действительнозначной функции $f(z)$ класса $\mathfrak{R}^*$ справедливы равенство $B(f)=L^*(f)$ и представление $\Gamma=F(f)\cup L^*(f)\bigcup J^*(f)\bigcup E$, в котором E – некоторое совершенное пористое множество на Г.

Полученные результаты были известны только для нормальных субгармонический функций, которые содержатся в классе $\mathfrak{R}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М.: Изд-во «Мир». 1971. С. 306.
2. *Носиро К.* Предельные множества. М.: Изд-во иностр. литер. 1963. С. 253.
3. *Гаврилов В.И.* Нормальные функции и почти периодические функции // ДАН СССР. Т. 240, № 4. 1978. СС. 768–770.
4. *Берберян С.Л.* Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций // Изв. вузов, математика, № 3. 1986. СС. 22–28.
5. *Берберян С.Л., Гаврилов В.И.* Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям // Mathematica Montisnigri, Vol.1. 1993. СС. 17–25.
6. *Берберян С.Л.* О предельных множествах непрерывных функций классов $\mathfrak{R}^{\theta}$ // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2007, № 3. 2007. СС. 5–9.

ON SOME BOUNDARY SINGULARITIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS OF THE CLASS $\mathfrak{R}^*$

S. Berberyan

ABSTRACT

In this article there is given a classification of all points of the unit circle depending on a boundary behavior of continuous real-valued functions of a class $\mathfrak{R}^*$. This class contains a class of normal real-valued functions.

Keywords: real – valued continuous functions, class $\mathfrak{R}^*$, limit sets.

$\mathfrak{R}^*$ ԴԱՍԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ս.Լ. Բերբերյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածում տրվում է բոլոր միավոր շրջանագծի կետերի դասակարգումը, կախված $\mathfrak{R}^*$ դասից անընդհատ իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիաների եզրային վարքից: Այդ դասը պարունակում է նորմալ իրական արժեքներ ընդունող ֆունկցիաների դասը:

Հիմնաբառեր՝ իրական արժեքներ ընդունող անընդհատ ֆունկցիաներ, $\mathfrak{R}^*$ դասը, սահմանային բազմություններ:

О НЕТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

***А.А. Дарбинян*[1]*, А.Г. Туманян*[1]**

[1]*Российско-Армянский университет*

armankri@yahoo.com, ani.tumanyan92@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Данная научная статья посвящена исследованию нетеровости и индекса полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами, имеющими определенное поведение на бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия для нетеровости рассматриваемых операторов в анизотропных соболевских пространствах.

Ключевые слова: нетеровость, полуэллиптический оператор, анизотропные пространства.

В данной работе исследуется нетеровость полуэллиптических операторов с переменными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева.

Исследованию нетеровости полуэллиптических операторов посвящена работа [1], где доказана нетеровость для оператора с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева в ограниченной области. В [2] получено необходимое и достаточное условие нетеровости для операторов с постоянными коэффициентами в анизотропных

Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при МОН РА (код проекта SCS №15T-1A197).

пространствах в R^n. Нетеровости полуэллиптического оператора в весовых пространствах посвящены работы [3–4]. В работе [5] исследована нетеровость операторов со специальными переменными коэффициетами. В данной работе получены результаты для более широкого класса операторов.

Определение 1. Ограниченный линейный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банаховом пространство Y, называется нетеровым, если выполняются следующие условия:

1) область значений оператора A замкнута ($Im(A) = \overline{Im(A)}$);
2) ядро оператора A является конечномерным ($dim\, Ker(A) < \infty$);
3) коядро оператора A конечномерно ($dim\, coker(A) = dim\, Y/Im\,(A) < \infty$).

Индексом нетерового оператора A называется разность между размерностью ядра и коядра:

$$ind(A) = dimKer(A) - dim\, coker(A).$$

Для $k \in N, \nu \in N^n$ обозначим

$$C^{k,\nu} := C^{k,\nu}(R^n) := \left\{a(x)\colon D^\beta a(x) \in C(R^n), \sup_{x\in R^n}\left|D^\beta a(x)\right| < \infty, \forall\beta \in Z_+^n, (\beta\colon\nu) \le k\right\},$$

$$Q^{k,\nu} := Q^{k,\nu}(R^n) := \left\{q(x) \in C^{k,\nu}\colon q(x) > 0, \forall x \in R^n, \frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0\,, \frac{\left|D^\beta q(x)\right|}{q(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty \;\; \forall\beta \in Z_+^n\,, (\beta\colon\nu) \le k \right\}.$$

Для $\nu \in N^n, k \in N$ и $q \in Q^{k,\nu}$ через $H^{k,\nu}$ и $H_q^{k,\nu}$ обозначим, соответственно, множества измеримых функций $\{u\}$ с конечными нормами

$$\|u\|_{k,\nu} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \|D^\alpha u\,\|_{L_2(R^n)}\,,$$

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \left\|D^\alpha u \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(R^n)}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,D) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad (1)$$

где $s \in N, \nu \in N^n,\ (\alpha:\nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_k = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}, x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Обозначим через

$$P_s(x,D) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (2)$$

главную часть дифференциальной формы $P(x,D)$, а через

$$P_s(x,\xi) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \qquad (3)$$

символ $P_s(x,D)$.

Определение 2. Говорят, что дифференциальная форма $P(x,D)$ полуэллиптична в точке $x_0 \in R^n$, если $\sigma_s(x_0,\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in R^n, |\xi| \neq 0$.

Определение 3. Говорят, что дифференциальная форма $P(x,D)$ полуэллиптична в R^n, если $P(x,D)$ полуэллиптична в каждой точке $x \in R^n$.

Для $\xi \in R^n$ и $\nu \in N^n$ обозначим $|\xi|_\nu = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. Пусть $k \in N, k \geq s$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,D)$ $a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}$ при $(\alpha:\nu) \leq s$ и при этом существуют постоянные $\tilde{a}_\alpha$ такие, что $D^\beta(a_\alpha(x) - \tilde{a}_\alpha) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta \in Z_+^n, (\beta:\nu) \leq k-s$. Тогда $P(x,D): H^{k,\nu} \to H^{k-s,\nu}$ является нетеровым тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \tilde{a}_\alpha D^\alpha \right| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in R^n,$$

при этом $ind(P) = 0$.

Теорема 2. Пусть $q \in Q^{k,\nu}$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,D)$ имеют следующее представление:

$$a_\alpha(x) = a_\alpha^0(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a_\alpha^1(x),$$

где $a_\alpha^0(x)$ и $a_\alpha^1(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $D^\beta\left(a_\alpha^1(x)\right) = o\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}\right)$ для всех $(\alpha:\nu) < s$ и $(\beta:\nu) \leq k-s$;

2) $a_\alpha^0(x) \in C^{k-s,\nu}$ и существуют $\tilde{a}_\alpha$ константы такие, что $a_\alpha^0(x) \rightrightarrows \tilde{a}_\alpha$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s$.

Тогда $P(x,D): H_q^{k,\nu} \to H_q^{k-s,\nu}$ нетеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)<s} \tilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \ge \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in R^n, \lambda > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян Г.А., Дарбинян А.А.* Нетеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в области. Уч. Записи ЕГУ (2008). № 3.
2. *Дарбинян А. А, Туманян А.Г.* Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами. Вестник РАУ (2014). № 2. СС. 4–14.
3. *Карапетян Г.А., Дарбинян А.А.* Об индексе полуэллиптического оператора в R^n. Изв. НАН. Арм., Мат. Т. 42. № 5. (2007). СС. 33–50.
4. *Tumanyan A.* On Noethericity and Index of Differential Operators in Anisotropic Weighted Sobolev Spaces. Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical sciences. № 3. (2016). СС. 63–69.
5. *Дарбинян А.А., Туманян А.Г.* О необходимых и достаточных условиях нетеровости для полуэллиптического оператора со специальными переменными коэффицитами. Вестник РАУ (2017). № 2. СС. 5–13.

ON NOETHERICITY AND INDEX OF SEMIELLIPTICAL OPERATOR WITH SPECIAL COEFFICIENTS

A. Darbinyan, A. Tumanyan

ABSTRACT

We study Noethericity of semielliptical operator with variable cofficients that have certain rate at infinity. Noethericity is proven for the special class of semielliptical operators in weighted Sobolev spaces.

Keywords: Noethericity, semielliptical operator, anisotropic space.

ՈՐՈՇԱԿԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԿԻՍԱԷԼԻՊՏԻԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՆՅՈՏԵՐՅԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԻՆԴԵՔՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.Ա. Դարբինյան, Ա.Գ. Թումանյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում հետազոտված է անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող գործակիցներով կիսաէլիպտիկ օպերատորների նյոտերյանության հարցը: Ստացված են բավարար պայմաններ կիսաէլիպտիկ օպերատորների Նյոտերյանության համար Սոբոլևի կշռային անիզոտրոպ տարածություններում:

Հիմնաբառեր՝ նյոտերյանություն, կիսաէլիպտիկ օպերատոր, անիզոտրոպ տարածություն:

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.А. Карапетян[1], Г.А. Петросян[1]

[1]Российско-Армянский университет

garnik_karapetyan@yahoo.com, heghine.petrosyan@rau.am

АННОТАЦИЯ

В работе изучается задача типа Дирихле в полупространстве для регулярных гипоэллиптических уравнений. Применяя специальное интегральное представление, строются приближенные решения для данной задачи и, тем самым, доказывается корректная разрешимость.

Ключевые слова: регулярные гипоэллиптические уравнения, мультианизотропное расстояние, интегральное представление, мультианизотропные ядра, корректная разрешимость.

Введение

В работе рассматривается задача типа Дирихле в полупространстве для специальных (мультиоднородных) регулярных гипоэллиптических уравнений с нулевыми граничными условиями. Задачи такого типа появляются при изучении мультианизотропных процессов, и трудность их изучения заключается в том, что соответсвующий характеристический многочлен не обобщенно однородный (как для эллиптических или полуэллиптических уравнений (см. [1–3])), а мультиоднородный, и построение приближенного решения для таких уравнений представляет собой трудность. Но, применяя специальные интегральные представления функций через вершины вполне правильного многогранника Ньютона, удалось построить приближенные решения через интегральные операторы. Аналогичные вопросы во всем пространстве R^n были изучены в работе [4]. В данной работе изучается вопрос о разрешимости задачи Дирихле в собольевских пространствах в $W_p^{\Re}(R_+^n)$ $(1 < p < \infty)$.

Будем пользоваться обозначениями работы [4]. Пусть $\Re \subset R^{n-1}$ вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^M$, а $\Im \subset R^n$ – многогранник с вершинами $\beta^i = (\alpha^i, 0)$ $(i = 1, ..., M)$ и $\beta^{M+1} = (0, 0, ..., 2m)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(D_x, D_{x_n})$ в R_+^n с постоянными действительными коэффициентами a_i $(i = 1, ..., M)$

$$P(D_x, D_{x_n}) = D_{x_n}^{2m} + \sum_{i=1}^{M} a_i D^{\alpha^i} \tag{1}$$

с характеристическим многочленом

$$P(\xi, \xi_n) = \xi_n^{2m} + \sum_{i=1}^{M} a_i \xi^{\alpha^i} . \tag{2}$$

Предположим, что оператор (1) есть регулярный оператор, то есть существует постоянное число $C > 0$, такое, что для любого $\xi \in R^n$ имеет место неравенство

$$\left| P(\xi, \xi_n) \right| \geq C \left(\sum_{i=1}^{M} \left| \xi^{\alpha^i} \right| + \xi_n^{2m} \right). \tag{3}$$

Из регулярности следует, что вершины многогранника $\Re$ имеют четные координаты, и при действительных коэффициентах a_i $(i = 1, ..., M)$ многочлен $P(\xi, \tau)$ по τ имеет ровно m корней с положительными и отрицательными мнимыми частями. Для любого фиксированного ξ обозначим через $\tau_i^{\pm}(\xi)$ $(i = 1, ..., m)$ эти корни. Обозначим также через

$$M^+(\xi, \tau) = \prod_{j=1}^{m} (\tau - \tau_j^+(\xi)) = \sum_{i=0}^{m} b_i(\xi) \tau^{m-i},$$

$$M_k^+(\xi, \tau) = \sum_{i=0}^{k} b_i(\xi) \tau^{m-i},$$

$$\chi = \min_{i=1,...,I_{n-2}} \left(\left| \mu^i \right| + \frac{1}{2m} \right) - \left(\left| \mu^1 \right| + \frac{1}{2m} \right) \frac{1}{p},$$

где $p > 1$ некоторое число.

В R_+^n рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} P(D_x, D_{x_n})U = f(x, x_n), & x_n > 0, x \in R^{n-1} \qquad (4) \\ \left.\dfrac{\partial^i U}{\partial x_n^i}\right|_{x_n=0} = 0, & i = 0,1,\dots,m-1. \qquad (5) \end{cases}$$

Введем следующие обозначения для произвольного параметра $\nu > 0$ и натурального числа k:

$$\rho_{\mathfrak{R}}(\xi) = \left(\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$G_0(\xi, \nu) = e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{R}}(\xi))^{2k}},$$

$$G_1(\xi, \nu) = (-2k)(\nu\rho_{\mathfrak{R}}(\xi))^{2k-1} e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{R}}(\xi))^{2k}},$$

$$G_2(\xi, \nu) = (-2k)\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{R}}(\xi))^{2k} e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{R}}(\xi))^{2k}}.$$

В работе [5] для функции $f \in L_p(R^{n-1})$ изучено усреднение функции через ядро, $G_0(\xi, \nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^{n-1}} f(t)\hat{G}_0(t, \nu)dt$$

и почти для всех $x \in R^{n-1}$ получено интегральное представление

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{R^{n-1}} f(t)\hat{G}_2(t - x, \nu)dt. \qquad (6)$$

Применяя представление (6), построим приближенное решение задачи (4–5). Так как оператор $P(D_x, D_{x_n})$ – регулярный, то корни многочлена $P(\xi, \tau)$ по τ имеют вид $\tau_л = \sqrt[2m]{\rho_{\mathfrak{R}}(\xi)} \cdot \omega_k \ (k = 1,\dots,2m)$, где ω_k $(k = 1,\dots,2m)$ – корни $\sqrt[2m]{-1}$, следовательно, для некоторой постоянной $\delta > 0$ имеют места соотношения

$$\delta\sqrt[2m]{\rho_{\mathfrak{R}}(\xi)} \le \left|\operatorname{Im}\tau_k(\xi)\right| \le \sqrt[2m]{\rho_{\mathfrak{R}}(\xi)} \ (k = 1,2,\dots,2m).$$

Как и в работе [2], обозначим через

$$G^+(\xi) = \left\{\lambda \in C; |\lambda| < 2\rho_{\mathfrak{R}}^{\frac{1}{2m}}(\xi); \operatorname{Im}(\lambda) > \delta\rho_{\mathfrak{R}}^{\frac{1}{2m}}(\xi)\right\},$$

$$G^{-}(\xi)=\left\{\lambda\in C;|\lambda|<2\rho_{\Re}^{\frac{1}{2m}}(\xi);\operatorname{Im}(\lambda)<-\delta\rho_{\Re}^{\frac{1}{2m}}(\xi)\right\},$$

а $\Gamma^{+}(\xi)$ и $\Gamma^{-}(\xi)$ соответствующие границы этих областей и введем следующие контурные интегралы:

$$J_{+}(\xi,x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{+}(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$J_{-}(\xi,x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{-}(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$J_{j}(\xi,x_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{+}(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}M^{+}_{m-j}(\xi,\lambda)}{M^{+}(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$I_{j}(\xi,x_n)=\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{j}J_{-}(\xi,y_n-x_n)\Big|_{y_n=0}.$$

Обозначим также

$$U_h^{+}(x,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_h^{h^{-1}}\int_0^{x_n}\int_{R^{n-1}}\int_{R^{n-1}}e^{i(x-y)}G_2(\xi,\nu)J_{+}(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n d\nu,$$

$$U_h^{-}(x,x_n)=-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_h^{h^{-1}}\int_{x_n}^{\infty}\int_{R^{n-1}}\int_{R^{n-1}}e^{i(x-y)}G_2(\xi,\nu)J_{-}(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n d\nu,$$

$$U_{jh}(x,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_h^{h^{-1}}\int_{R^{n-1}}\int_{R^{n-1}}e^{i(x-y)}G_2(\xi,\nu)J_j(\xi,x_n)\int_0^{\infty}I_j(\xi,x_n)f(y,y_n)dy_n d\xi dy d\nu,$$

где $j=1,...,m.$ Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если* $f\in L_p(R_+^n)$ $(1<p<\infty)$ *и имеет компактный носитель, то при* $\chi>1$ *задача (4–5) имеет единственное решение* U *из класса* $W_p^{\Im}(R_+^n)$, *которая является пределом функций* U_h *в* $W_p^{\Im}(R_+^n)$ *при* $h\to 0$, *и для некоторой постоянной* $C>0$ *(независящей от* f*) имеет место оценка*

$$\|U\|_{W_p^{\Im}(R_+^n)}\le C\|f\|_{L_p(R_+^n)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян Г.А.* Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. (1984). СС. 119–138.
2. *Демиденко Г.В.* О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журнал, т. XXIX, № 4, (1988).
1. *Демиденко Г.В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими ураненями // I, Сиб. мат. журнал. Т. 34, 5, (1993). СС. 52–67.
2. *Карапетян Г.А., Петросян Г.А.* О разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в R^n // Изв. НАН Армении, в печати.
3. *Карапетян Г.А.* Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности // Сиб. мат. журнал, 58, № 3, (2017). СС. 573–590.

CONSTRUCTION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A HALF-SPACE FOR REGULAR EQUATIONS

G. Karapetyan, H. Petrosyan

ABSTRACT

In this paper we study a Dirichlet type problem in a half-space for regular hypoelliptic equations. Applying a special integral representation, approximate solutions are constructed for the given problem, and thus the correct solvability is proved.

Keywords: regular hypoelliptic equations, multianisotropic distance, integral representation, multianisotropic kernels, correct solvability.

ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Գ.Ա. Կարապետյան, Հ.Ա. Պետրոսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումների համար կիսատարածությունում ուսումնասիրվում է Դիրիխլեի տիպի խնդիր։ Կիրառելով հատուկ ինտեգրալային ներկայացում, կառուցվում են այդ խնդրի համար մոտավոր լուծումներ և դրանով իսկ ապացուցվում է նշված խնդրի կոռեկտ լուծելիությունը։

Հիմնաբառեր՝ ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ հավասարումներ, մուլտիանիզոտրոպ հեռավորություն, ինտեգրալային ներկայացում, մուլտիանիզոտրոպ կորիզներ, կոռեկտ լուծելիություն։

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ С ВЕСОМ МНОГОЧЛЕНЫ

В.Н. Маргарян[1]

[1]Российско-Армянский университет

vachagan.margaryan@yahoo.com

АННОТАЦИЯ

В работе найдено достаточное условие на младшие члены, при выполнении которой многочлен является гиперболическим с весом.

Ключевые слова: гиперболические (по Гордингу), гиперболические с весом многочлены, сравнение с весом многочленов.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n$ – множество n-мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, ..., n$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное эвклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ $(\mathrm{i}^2 = -1)$, $\mathbb{R}_+^n := \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$ $\xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$. Для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}_+^n$ обозначим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $|\xi| = (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^{1/2}$, $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}$, $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$, $(\xi, \nu) = \xi_1 \nu_1 + ... + \xi_n \nu_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ конечный набор. Многогранником Ньютона набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\Re = \Re(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+^n$, содержащий множество $A \bigcup \{0\}$. Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне правильным (в.п.), если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей (далее $\Re$-нормалей) (n-1)-мерных некоординатных граней положительны. Для в.п. многогранника $\Re \subset \mathbb{R}_+^n$ обозначим:

Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОН РФ.

1) $\Re^0$ – множество вершин $\Re$,

2) $\Lambda(\Re)$ – множество $\Re$-нормалей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ нормированных так $\min\limits_{1 \le j \le n} \lambda_j = 1$,

3) $d(\Re) := \max\limits_{\lambda \in \Lambda(\Re)} d(\Re, \lambda) := \max\limits_{\substack{\lambda \in \Lambda(\Re), \\ \nu \in \Re}} (\lambda, \nu)$,

и положим $h_{\Re}(\xi) = \sum\limits_{\nu \in \Re^0} \left|\xi^{\nu}\right|, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Через B_n обозначим множество тех в.п. многогранников $\Re \in \mathbb{R}^n_+$, для которых $d(\Re) < 1$. Функцию g, определенной на $\mathbb{R}^n$, назовем весовой функцией гиперболичности, если

1) $\inf\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} g(\xi) > 0$,

2) $\dfrac{g(\xi)}{|\xi|} \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,

3) для любого $t > 0$ с некоторой постоянной $c = c(\mathrm{t}) > 0$
$c^{-1} g(\xi) \le \mathrm{g}(\mathrm{t}\xi) \le \mathrm{cg}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Через M_n обозначим множество всех весовых функций гиперболичности от n-переменных.

<u>Предложение 1</u>. Для любого $\Re \in B_n$ $h_{\Re} \in M_n$. Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(\mathrm{P}) := \{\alpha \in \mathrm{N}_0^n, \gamma_\alpha \ne 0\}$. Представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha| = \mathrm{j}} \gamma_\alpha \xi^\alpha \right), \tag{1}$$

где $m := \max\limits_{\alpha \in (\mathrm{P})} |\alpha|$.

<u>Определение 1</u>. (см. [1] определение 12.3.3, теорему 12.4.1) Многочлен P, представленный в виде (1), называется гиперболическим (по Гордингу) относительно вектора $N \in \mathbb{R}^n$, если $P_m(\mathrm{N}) \ne 0$ и с некоторой $\tau_0 > 0$ $P(\xi + \mathrm{i}\tau \mathrm{N}) \ne 0, \ \xi, \tau \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}, \ |\mathrm{Re} \ \tau| \ge \tau_0$.

<u>Определение 2</u>. (см. [2]) Скажем, что многочлен P, представленный в виде (1), $\Re \in B_n$ гиперболичен относительно вектора $N \in \mathbb{R}^n$, если $P_m(\mathrm{N}) \neq 0$ и с некоторой постоянной $C_0 > 0$ $P(\xi + \mathrm{i}\,\tau\,\mathrm{N}) \neq 0$ $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\ \tau| \geq C_0 h_{\Re}(\xi)$.

Для многогранника $\Re \in B_n$ и вектора $N \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$h_{\Re,N}(\xi) = \inf_{t \in \mathbb{R}} h_{\Re}(\xi - tN).$$

Верны следующие утверждения:

<u>Предложение 2</u>. Для любых $\Re \in B_n$ и $N \in \mathbb{R}^n$ $h_{\Re,N} \in M_n$.

<u>Лемма 1</u>. Многочлен P, представленный в виде (1), $\Re \in B_n$ гиперболичен относительно вектора $N \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $P_m(\mathrm{N}) \neq 0$ и с некоторой постоянной $C_1 > 0$ $P(\xi + \mathrm{i}\,\tau\,\mathrm{N}) \neq 0$, $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\ \tau| \geq C_1 h_{\Re,N}(\xi)$.

<u>Определение 3</u>. Скажем, что многочлен Q $g \in M_n$ слабее многочлена P (P g сильнее Q) и запишем $Q \prec^{g} P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\tilde{Q}(\xi, \mathrm{g}(\xi)) \leq \mathrm{C}\tilde{\mathrm{P}}(\xi, \mathrm{g}(\xi)),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где для данного многочлена q

$$\tilde{q}(\xi, \tau) := \sum_{\alpha} \left| (\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{q})(\xi) \right| \cdot \tau^{|\alpha|},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Верны следующие:

<u>Предложение 3</u>. Пусть $g_1, g_2 \in M_n$, а P и Q многочлены с постоянными коэффициентами. Если $Q \prec^{g_2} P$ и с некоторой постоянной $C > 0$ $g_1(\xi) \geq \mathrm{C}g_2(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то $Q \prec^{g_1} P$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $g_1, g_2 \in M_n$, $g = g_1 + g_2$, а P и Q многочлены с постоянными коэффициентами. $Q \prec^{g} P$ тогда и только тогда, когда $Q \prec^{g_j} P$ $j = 1, 2$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\Re \in B_n$, $N \in \mathbb{R}^n$, а P и Q многочлены с постоянными коэффициентами. $Q \prec^{h_{\Re,N}} P$ тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $C > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{Q}(\xi - \mathrm{tN}, \mathrm{h}_{\Re,N}(\xi)) \leq \mathrm{C}\tilde{\mathrm{P}}(\xi - \mathrm{tN}, \mathrm{h}_{\Re,N}(\xi)), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Основным результатом настоящей заметки является:

Теорема. Пусть $\Re \in B_n$, $N \in \mathbb{R}^n$, однородный многочлен P_m порядка m гиперболичен (по Гордингу) относительно вектора N, а Q многочлен $P_m + Q$ $h_{\Re}$ гиперболичен относительно вектора N.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными». М.: Мир 1986, Т. 2.
2. *Маргарян В.Н.* Сравнение многочленов и h-гиперболичность. Изд-во НАН Армении, 2016. Т. 51, № 1. СС. 40–55.

HYPERBOLIC BY WEIGHT POLYNOMIALS

V. Margaryan

ABSTRACT

In the paper, we have found a sufficient condition for the lower terms, for which the polynomial becomes hyperbolic by weight.

Keywords: hyperbolic (according to Garding), hyperbolic polynomials with weight, comparison with the weight of polynomials.

ՀԻՊԵՐԲՈԼԻԿ ԸՍՏ ԿՇԻՌԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

Վ.Ն. Մարգարյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում գտնված է բավարար պայման կրտսեր անդամների վրա, որի կատարման դեպքում բազմանդամը հանդիսանում է ըստ կշիռի հիպեր-բոլիկ։

Հիմնաբառեր՝ հիպերբոլիկ (ըստ Գորդինգի), ըստ կշիռի հիպերբոլիկ բազմանդամներ, բազմանդամների համեմատություն կշիռով։