ЭДУАРД КАЗАРЯН
СОС МАИЛЯН

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА
(МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ)

Ереван
Издательство РАУ
2018

ԷԴՈՒԱՐԴ ՂԱԶԱՐՅԱՆ
ՍՈՍ ՄԱՅԻԼՅԱՆ

ՖԻԶԻԿԱ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
(ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ԿԱՊԵՐ)

Երևան
ՀՌՀ հրատարակչություն
2018

ՀՏԴ 53:51
ԳՄԴ 22.3+22.1
Ղ 158

Գրքույկը հրատարակվում է Հայ-Ռուսական համալսարանի հրատարակչական խորհրդի երաշխավորությամբ

Խմբագիր՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու, փիլ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Պ.Ս. Ավետիսյան

Ղազարյան Է.Մ., Մայիլյան Ս.Ս.
Ղ 158 Ֆիզիկա և մաթեմատիկա (միջառարկայական կապեր): Գումարների հաշվման մեթոդները և դրանց կիրառությունները ֆիզիկայում/ Է.Մ. Ղազարյան, Ս.Ս. Մայիլյան. - Եր.: ՀՌՀ հրատարակչություն, 2018. – 152 էջ:

Գրքույկը նվիրված է ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի միջառարկայական կապերին: Դիտարկված են որոշ՝ լայն տարածում գտած գումարների (վերջավոր և «անվերջ») հաշվման մաթեմատիկական հնարներն ու եղանակները: Այդ գումարների հաշվման արդյունքներն օգտագործված են ֆիզիկական մի շարք խնդիրների լուծման համար:

Գրքույկը նախատեսված է ընթերցողների լայն շրջանակի՝ ինչպես բուհերի ուսանողների, այնպես էլ ավագ դպրոցի աշակերտների և ուսուցիչների համար: Թեմաները շարադրված են հնարավորինս պարզ, այնպես որ, կարծում ենք, գրքույկը մատչելի կլինի հիմնական դպրոցի հետաքրքրասեր աշակերտներին նույնպես:

ՀՏԴ 53:51
ԳՄԴ 22.3+22.1

ISBN 978-9939-67-204-5

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մաս III. Ֆիզիկական խնդիրներ, որոնք լուծվում են գումարների հաշվմամբ

ՆԱԽԱԲԱՆ

Ներկայումս, կարծում ենք, բնավ անհրաժեշտություն չկա ապացուցելու ուսուցման գործընթացում միջառարկայական կապերի կարևորությունը: Իրոք, գիտության զարգացման արդի փուլը բնորոշվում է տարբեր գիտությունների, հատկապես մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի՝ միմյանց մեջ փոխներթափանցմամբ, իսկ միջառարկայական կապերը հարկավոր է դիտարկել որպես միջգիտական կապերի արտացոլում ուսումնական գործընթացում: Դժվար է նույնիսկ երևակայել, որ կարելի է ֆիզիկա սովորել (կամ՝ սովորեցնել) առանց մաթեմատիկայի: Այդ երկու առարկաներն անխզելիորեն կապված են իրար հետ: Մաթեմատիկան ֆիզիկային տալիս է միջոցներ և հնարներ՝ արտահայտելու համար ճշգրիտ կախվածությունն այն ֆիզիկական մեծությունների միջև, որոնք բացահայտվում են գիտափորձի կամ տեսական հետազոտությունների արդյունքում: Ուստի ֆիզիկայի ուսուցման բովանդակությունը և մեթոդները կախված են աշակերտների՝ մաթեմատիկայից ստացած գիտելիքների մակարդակից: Ընդգրծենք, որ ֆիզիկայի դպրոցական ծրագիրը կազմված է այնպես, որ յուրաքանչյուր նոր թեմա ուսումնասիրելիս աշակերտներն արդեն յուրացրած լինեն անհրաժեշտ մաթեմատիկական դասանյութերը, իսկ ուսուցիչը, կարծում ենք, պետք է քաջածանոթ լինի մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի բովանդակությանը:

Հավելենք, որ ֆիզիկան նույնպես մաթեմատիկային, հատկապես երկրաչափությանը, տալիս է հնարներ և միջոցներ՝ առավել դյուրությամբ լուծելու մի շարք երկրաչափական խնդիրներ: (Այդպիսի մեթոդներից է, օրինակ, բարիցենտրիկ (ծանրության կենտրոնի) մեթոդը, որը ներառված է արտերկրյա որոշ երկրների երկրաչափության դպրոցական դասընթացում:)

Հետևաբար, կարելի է պնդել, ինչպես Ռիչարդ Ֆեյնմանը, որ թեպետ ֆիզիկան մաթեմատիկա չէ, իսկ մաթեմատիկան էլ ֆիզիկա չէ, այդուհանդերձ, լինելով իրարից այդքան տարբեր, նրանք իրար այնքա՜ն մոտ են, որ մեկը, «ձեռքը պարզելով», կարող է օգնել մյուսին: Ֆիզիկան, որ զբաղվում է բնության օրենքների բացահայտմամբ, այդ օրենքները նկարագրում է մաթեմատիկորեն: Բայց չի նշանակում, որ մաթեմատիկան պարզապես լեզու է՝ գումարած դատողություններ. այն, կարծես, լեզու և տրամաբանություն է՝ միասին վերցրած, այլ կերպ ասած, մաթեմատիկան մտածողության միջոց է, և ֆիզիկան չի կարելի պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի, թեպետ ֆիզիկան զարգանում է ոչ թե մաթեմատիկական տրամաբանության, այլ ֆիզիկական ներըմբռնողության շնորհիվ:

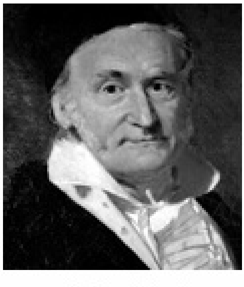
Ներկայացվող գրքույկում, «ֆիզիկա և մաթեմատիկա» միջառարկայական կապերը խորացնելու նպատակով, կանգ ենք առել որոշ՝ լայն տարածում գտած գումարների (վերջավոր և «անվերջ») հաշվման մաթեմատիկական հնարների և եղանակների վրա: Այդ գումարների հաշվման արդյունքներն օգտագործվում են մի շարք ֆիզիկական խնդիրների լուծման համար:

Հեղինակներն իրենց խորին երախտագիտությունն են հայտնում պրոֆ. Պ.Ս. Ավետիսյանին, ով մեծ սիրով հանձն է առել խմբագրելու մեր գրքույկը և, մանրակրկիտորեն ընթերցելով այն, արել օգտակար դիտողություններ:

Մեր հատուկ շնորհակալությունն ենք հայտնում պրոֆ. Գ.Ա. Կարապետյանին, ով մեզ օգնել է մաթեմատիկային վերաբերող մի շարք հարցեր առավել մատչելի ներկայացնելու համար:

Մաս I. Վերջավոր գումարների հաշվման հնարները և մեթոդները

1. *Պատմություն փոքրիկ Գաուսի մասին, ով հետագայում դարձավ մաթեմատիկոսների արքա կամ ինչպե՞ս հաշվել առաջին n բնական թվերի գումարը*



Կառլ Ֆրիդրիխ Գաուս
(1777-1855)

«Դա պատահել է, երբ փոքրիկ Գաուսը (Կառլ Ֆրիդրիխ Գաուս, գերմանացի հանճարեղ մաթեմատիկոս) նոր էր հաճախում դպրոց: Մի անգամ ուսուցիչն աշակերտներին հանձնարարեց դժվարին խնդիր՝ գումարել 1-ից մինչև 20-ը ներառյալ բոլոր բնական թվերը: Նա հույս ուներ մի փոքր հանգստանալ, քանի դեռ երեխաները զբաղված էին հաշվմամբ, և որքան զարմացավ, երբ փոքրիկ Գաուսն իրեն մոտեցավ այն ժամանակ, երբ մնացած աշակերտները դեռ նոր էին սկսել իրենց հաշվումները, և, ուսուցչին հանձնելով իր տախտակը, ասաց. «Պատրաստ է»: (Գաուսի ժամանակներում գրաֆիտե ձողիկներով (գրիֆելներով) գրում էին քարե տախտակների վրա:) Ուսուցիչը մինչև անգամ չնայեց փոքրիկ Գաուսի տախտակին, և նույնիսկ պատրաստվում էր պատժել տղային աններբանկատության համար: Եվ սպասեց այնքան, մինչև բոլոր աշակերտները կատարեցին իրենց աշխատանքը և տախտակները դրեցին փոքրիկ Գաուսի տախտակի վրա: Դրանից հետո միայն ուսուցիչը հանեց նրա տախտակը և նայեց: Որքա՜ն էր ուսուցչի զարմանքը, երբ տախտակին տեսավ մեն-միակ թիվ՝ ճիշտ պատասխանը: Ի՞նչ թիվ էր դա, և ինչպե՞ս էր փոքրիկ Գաուսն այն ստացել» [1]:

Վերջին հարցին կարելի է միայն պատասխանել ենթադրաբար: Հավանաբար, փոքրիկ Գաուսը նկատել էր, որ առաջին և վերջին (1+20), երկրորդ և նախավերջին (2+19), այսինքն՝ 1-ից և 20-ից հավասարահեռ բոլոր տասը զույգ թվերի գումարները նույնն են և հավասար են 21-ի, հետևաբար՝ մեկից մինչև քսանը բոլոր բնական թվերի գումարը հավասար կլինի 210-ի:

Այժմ ընդհանրացնենք խնդիրը՝ 20-ի փոխարեն վերցնելով կամայական բնական n թիվ, և գումարենք առաջին n բնական թվերը, այսինքն՝ գտնենք հետևյալ գումարը՝

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots n:$$

Հաշվարկը կատարենք այնպես, ինչպես, հավանաբար, կատարել էր փոքրիկ Գաուսը: Դրա համար գրենք S_n գումարը երկու անգամ, նախ՝ հաջորդաբար 1-ից մինչև n, ապա՝ հակառակ կարգով՝ n-ից մինչև 1.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n,$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1:$$

Գումարելով այս երկու արտահայտությունները՝ ստանում ենք.

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1):$$

Աջ մասի գումարելիների թիվը n է, հետևաբար՝ $2S_n = n(n+1)$, որտեղից՝

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}: \qquad (1.1)$$

Վարժություն 1. Օգտվելով վերը նկարագրված՝ փոքրիկ Գաուսի մեթոդից՝ ապացուցեք, որ.

ա) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n = n \cdot (n+1),$ (1.2)

բ) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) = n^2:$ (1.3)

2. Ինչպե՞ս գտնել 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերի քառակուսիների գումարն արտահայտող բանաձևը

Նշանակենք որոնելի գումարը S_n-ով՝

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 :$$

Ինչպե՞ս հաշվել S_n-ը, ինչի՞ց սկսել: Նման իրավիճակներում, սովորաբար, դիտարկում են համանման խնդիր, որի լուծումը, սակայն, ավելի պարզ է, և փորձում են կապ գտնել տրված և համանման խնդիրների միջև: Ասվածին համապատասխան անմիջապես հիշում ենք նախորդ խնդիրը, որի լուծումն արտահայտված է (1.1) բանաձևով: Նշանակելով այդ գումարը S_n-ի փոխարեն σ_n-ով՝

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

փորձենք կապ որոնել S_n-ի և σ_n-ի միջև: Դրա համար հաշվենք S_n-ը և σ_n-ը n-ի մի քանի արժեքների համար՝ լրացնելով հետևյալ աղյուսակը.

Աղյուսակ 1

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	5	14	30	55	91
σ_n	1	3	6	10	15	21

Ֆիզիկոս-փորձարարները, օրինակ, նմանատիպ աղյուսակներից օգտվելով, կարողանում են հաճախ կապ հաստատել հետազոտվող և համանման մեծությունների միջև՝ հաշվելով դրանց հարաբերության արժեքները: Մենք նույնպես ստանանք $\dfrac{S_n}{\sigma_n}$ հարաբերության արժեքները, երբ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$\frac{S_n}{\sigma_n} = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \cdots,$$

կամ

$$\frac{S_n}{\sigma_n} = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \cdots : \tag{1.4}$$

Իսկ ի՞նչ են մեզ տալիս (1.4) հարաբերությունները: Շատ բան: Քանի որ այդ հարաբերությունների հայտարարները նույնն են և հավասար են 3-ի, իսկ համարիչները կենտ թվեր են, ապա դժվար չէ արդեն ենթադրել, որ

$$\frac{S_n}{\sigma_n} = \frac{2n+1}{3},$$

որտեղից էլ ստանում ենք՝

$$S_n = \frac{2n+1}{3} \cdot \sigma_n = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}:$$

Այսպիսով՝ հանգեցինք այն ենթադրության, որ որոնելի գումարն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\boxed{S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}:} \qquad (1.5)$$

Բայց… այս ենթադրությանը մենք եկանք, դիտարկելով մի քանի մասնավոր օրինակ: Որքանո՞վ ենք վստահ, չի գտնվի 6-ից մեծ n-ի որևիցե արժեք, որի դեպքում $S_n/\sigma_n \neq (2n+1)/3$: Ուստի չենք կարող վստահաբար ասել, որ (1.5) բանաձևը ճիշտ է կամայական n-ի համար:

Իսկ ինչու՞ չենք կարող ասել՝ կհարցնեն ոմանք: Չէ՞ որ n-ի վեց արժեքի համար բանաձևն ստուգվեց: n-ի քանի՞ արժեքի համար է հարկավոր (1.5) բանաձևն ստուգել: Բավարար չէ՞, արդյոք, n-ի վեց արժեքը: Այսպես մտածող աշակերտներին համոզելու համար, կարծում ենք, ուսանելի կլինի հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1. Դիտարկենք $P(n)=n^2+n+41$ քառակուսային եռանդամը, որտեղ n-ը բնական թիվ է: Կազմենք հետևյալ աղյուսակը:

Աղյուսակ 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(n)$	43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173	197

Աղյուսակից նկատում ենք, որ $P(n)$-ի բոլոր արժեքները, երբ $n=1,2,\ldots,12,$ պարզ թվեր են: Կարելի՞ է այս արդյունքների հիման վրա ենթադրել, որ $P(n)$-ը n-ի կամայական արժեքի դեպքում պարզ թիվ է: Պարզվում է՝ ոչ, քանի որ արդեն $n=40$-ի համար $P(n)$-ը պարզ թիվ չէ: Իրոք, $P(40)=40^2+40+41=40(40+1)+41=41^2$, այսինքն՝ $P(40)$-ը բաղադրյալ թիվ է:

Դիտարկված օրինակը թույլ է տալիս եզրակացնելու, որ ***պնդումը կարող է ճշմարիտ լինել մի շարք մասնավոր դեպքերում, այդուհանդերձ անճիշտ լինել ընդհանուր առմամբ:***

Այժմ առաջանում է այսպիսի հարց: Դիցուք՝ առաջադրված վարկածը (պնդումը) ճշմարտացի է մի քանի մասնավոր դեպքերում: Բոլոր մասնավոր դեպքերը, բնականաբար, դիտարկել հնարավոր չէ: Ինչ-պե՞ս իմանալ, ճշմարտացի՞ է արդյոք այդ վարկածն առհասարակ:

Առաջ քաշված հարցին երբեմն հնարավոր է լինում լուծում տալ, կիրառելով դատողությունների առանձնահատուկ մի եղանակ, որը մաթեմատիկայում անվանում են

3. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ

Վերնագրյալ մեթոդով որևէ վարկածի (պնդման) ապացույցը բաղկացած է երկու մասից.

1) համոզվում ենք, որ վարկածը ճշմարտացի է $n=1$-ի համար,

2) ապացուցում ենք, որ եթե այդ վարկածը ճշմարտացի է որևէ $n=k$ բնական թվի համար, ապա այն ճշմարտացի է նաև $n=k+1$-ի համար:

Այստեղից հետևում է, որ դիտարկված վարկածը ճիշտ է կամայական բնական n-ի համար:

Կրկին դառնանք (1.5) բանաձևին:

Հեշտ է համոզվել, որ այդ բանաձևը ճիշտ է, երբ $n=1$:

Այժմ ենթադրենք, որ այն ճշմարտացի է $n=k$ դեպքում, որտեղ k-ն կամայական բնական թիվ է, այսինքն՝ ենթադրենք, որ

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

հավասարությունը ճիշտ է: Այդ դեպքում

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}:$$

Այսպիսով, տեսնում ենք, որ $n=k$ դեպքում մեր առաջ քաշած վարկածի՝ (1.5) հավասարության ճշմարիտ լինելուց հետևում է այդ վարկածի ճշմարիտ լինելը, երբ $n=k+1$: Բացի այդ, մենք համոզվեցինք, որ վարկածը (այսինքն՝ (1.5) հավասարությունը) ճշմարիտ է նաև $n=1$ դեպքում: Այդ ամենից բխում է (1.5) բանաձևի ճիշտ լինելը կամայական n-ի համար:

Եվս մեկ օրինակ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի կիրառմամբ: Հաշվել

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

գումարը:

Հեշտ է ստուգել, որ

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}, \qquad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}:$$

Դիտարկված գումարների հաշվարկման արդյունքները հնարավորություն են տալիս ենթադրելու, որ n-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար S_n-ն արտահայտվում է մի կոտորակով, որի հայտարարը 1-ով մեծ է համարիչից, այսինքն՝ $S_n=\frac{n}{n+1}$: Արված ենթադրությունը (վարկածը) ստուգելու համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

$n=1$-ի համար վարկածը ճշմարիտ է, քանի որ $S_1=\frac{1}{2}$:

Ենթադրենք, որ վարկածը ճշմարիտ է $n=k$ բնական թվի համար, այսինքն՝

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}:$$

Ապացուցենք, որ այդ դեպքում վարկածը ճիշտ կլինի նաև $n=k+1$-ի համար, այսինքն՝ $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$:

Իրոք,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}:$$

Այսպիսով, կարող ենք պնդել, որ $S_n = \frac{n}{n+1}$ բանաձևով արտահայտվող վարկածը ճշմարիտ է կամայական n-ի համար՝

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(\mathrm{n}+1)} = \frac{n}{n+1}: \qquad (1.6)$$

4. Նոր հնար արդեն լուծված խնդրի համար

Մաթեմատիկան լի է հնարներով.
հարկավոր է միայն կարողանալ ընտրել
դրանցից անհրաժեշտը և կիրառել:
Ջորջ Պոյա

(1.5) բանաձևը կարելի է արտածել նաև այլ կերպ, եթե միայն կարողանանք կռահել, որ այդ նպատակի համար հարկավոր է օգտվել

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

նույնությունից: Այդ նույնության մեջ տեղադրելով $n = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$՝ կստանանք հետևյալ n հավասարությունները՝

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$
$$4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1,$$
....
$$n^3 - (n-1)^3 = 3\cdot(n-1)^2 + 3\cdot(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 :$$

Նկատում ենք, որ գրված հավասարությունների ձախ մասերում կան փոխադարձաբար իրար ոչնչացնող անդամներ՝ 2^3 և -2^3, 3^3 և -3^3, 4^3 և -4^3 և այլն: Դա մեզ գլխի է զցում, որ հարկավոր է այդ հավասարություններն անդամ առ անդամ գումարել: Այդ դեպքում կստանանք՝

$$(n+1)^3 - 1 = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3\cdot(1 + 2 + \cdots + n) + n =$$
$$= 3S_n + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

որտեղ $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$: Ստացված հավասարությունից կարող ենք որոշել S_n-ը՝

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} :$$

Վարժություն 2. Օգտվելով (1.5) բանաձևից՝ հաշվեք հետևյալ գումարները.

ա) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2,$

բ) $1^2+3^2+5^2+\dots+(2m+1)^2$,

գ) $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2$ ։

5. Նոր մեթոդի այլ կիրառություններ

Փորձենք օգուտ քաղել նախորդ օրինակի լուծման համար կռահած հնարից։ Դրա համար ընդհանրացնենք դիտարկված օրինակը և գրենք 1-ից մինչև n բոլոր բնական թվերի k-րդ աստիճանների գումարը՝

$$S_k=1^k+2^k+3^k+\dots+n^k\ ։$$

Նախորդ օրինակը, փաստորեն, S_2-ի հաշվումն էր՝

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

իսկ դրանից առաջ հաշվել էինք S_1-ը (տե՛ս 1.1 բաժնը)՝

$$S_1=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ ։$$

S_0-ն, ակներևաբար,հավասար է՝

$$S_0=1^0+2^0+3^0+\dots+n^0=1+1+1+\dots+1=n\ ։$$

Այժմ, նոր մեթոդի կիրառմամբ, կարող ենք հաշվել S_3-ը՝

$$S_3=1^3+2^3+3^3+\dots+n^3\ ։$$

Դրա համար գրենք բինոմական բանաձևը 4 ցուցչի համար: Այդ բանաձևը կարող ենք ստանալ դյուրությամբ: Իրոք $(n+1)^4 = (n+1)^2(n+1)^2 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, հետևաբար՝

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1:$$

Այս հավասարությունը գրենք $n = 1, 2, 3, \cdots, n$ արժեքների համար՝

$$\begin{aligned}
&2^4 - 1^4 = 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1,\\
&3^4 - 2^4 = 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,\\
&4^4 - 3^4 = 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1:
\end{aligned}$$

Անդամ առ անդամ գումարելով այս հավասարությունները՝ կստանանք՝

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0$$

կամ

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$\boxed{\begin{aligned} S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \\ = (1+2+3+\cdots+n)^2 : \end{aligned}} \qquad (1.7)$$

Մենք հանգեցինք ցանկալի արդյունքի, օգտագործելով նույն հնարը երկրորդ անգամ: Նշանակում է, այդ հնարն արդեն ուսանելի է: Արժե հիշել մեծ մանկավարժների իմաստալից խոսքը. «***Այն հնարը, որն օգտագործում եք երկու անգամ, արդեն դառնում է մեթոդ***»:

6. S_3 *-ի հաշվման այլ, բայց արդեն ծանոթ եղանակ*

Ուշադիր նայելով (1.7) հավասարությանը՝ նկատում ենք, որ

$$1^3 = 1^3,$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2 :$$

Բնական է ենթադրել, որ

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 : \qquad (1.8)$$

(1.8) արտահայտությամբ ներկայացվող վարկածի՝ առհասարակ ճշմարիտ լինելու մեջ համոզվենք, օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

$n = 1, 2, 3, 4$ արժեքների համար մենք համոզվեցինք, որ ներկայացվող վարկածը ճշմարիտ է: Դիցուք՝

վարկածն արտահայտող (1.8) հավասարությունը ճիշտ է, երբ $n=k$, այսինքն՝

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 :$$

Այդ հավասարության երկու մասին էլ ավելացնենք $(k+1)^3$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} :$$

Այսպիսով, (1.8) բանաձևը ճիշտ է կամայական n-ի համար:

Վարժություն 3. Հաշվել հետևյալ գումարները.

ա) $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3$,

բ) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$:

7. Խնդիրը երբեմն հուշում է, թե ինչ հնարով լուծել այն

Մեթոդների իմացությունն ավելի կարևոր է,
քան խնդիրն այս կամ այն կերպ լուծելը:
Ջորջ Պոյա

Ապացուցել, որ

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3} : \qquad (1.9)$$

(1.9) բանաձևն, իհարկե, դժվար չէ ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով, բայց մի հարց, այդուհանդերձ, կարող է մտատանջել ընթերցողին. իսկ ինչպե՞ս է «հայտնաբերվել» այդ հավասարության աջ մասը: Այդ պատճառով էլ, կարծում ենք, արժե որևէ հնարով հայտնագործել (1.9)-ի աջ մասը:

Ուշադիր նայելով (1.9) հավասարության ձախ կողմին՝ ուշիմ ընթերցողը կարող է նկատել հետևյալ օրինաչափությունը.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\cdots$$

$$\cdots+(n-1)\left[(n-1)+1\right]=$$

$$=\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right]+\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]:$$

Այսպիսով, օրինաչափությունը հայտնագործված է: Հաշվելիք գումարը նշանակելով S_n-ով՝ համաձայն (1.1) և (1.5) բանաձևերի, կարող ենք գրել, որ

$$S_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}=\frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6}=$$

$$=\frac{(n-1)n\cdot 2(n+1)}{6}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

այսինքն՝

$$S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}: \qquad (1.10)$$

Վարժություն 4. Ապացուցել, որ

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}:$$

Ցուցում: Խնդիրը կարելի է լուծել վերը դիտարկվածի նման՝ նկատելով, որ $k(k+1)(k+2)=k^3+3\cdot k^2+2\cdot k$: Այդ դեպքում ապացուցվելիքի հավասարության ձախ մասի գումարը, երբ $k=1,2,3,\ldots,n,$ արտահայտվում է S_3, S_2, S_1 գումարների միջոցով (տե՛ս դրվագ 5):

8. Ինչպե՞ս հաշվել S_4 գումարը

Ընթերցողն այժմ տիրապետում է բավարար չափով հնարների՝ հաշվելու համար

$$S_4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

գումարը: Հիշեք, օրինակ, թե ինչպես հաշվեցինք S_2 գումարը սկզբում: Հանգույն ձևով որոշենք S_4-ը: Դրա համար հաշվենք S_4 և $S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ գումարները, երբ $n=1,2,3,4,5,6,$ և գրանցենք աղյուսակ 3-ում:

Աղյուսակ 3

n	1	2	3	4	5	6
S_4	1	17	98	354	979	2275
S_2	1	5	14	30	55	91

Հաշվենք $\dfrac{S_4}{S_2}$ հարաբերության արժեքները, երբ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$\frac{S_4}{S_2} = 1, \frac{17}{5}, 7, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}, 25 \qquad \text{կամ}$$

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{5}{5}, \frac{17}{5}, \frac{35}{5}, \frac{59}{5}, \frac{89}{5}, \frac{125}{5}:$$

Փոքր-ինչ մտածելով՝ դժվար չէ նկատել, որ ստացված հարաբերությունների համարիչները կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$5 = 3 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1,$$

$$17 = 3 \cdot 6 - 1 = 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1,$$

$$35 = 3 \cdot 12 - 1 = 3 \cdot 3 \cdot 4 - 1,$$

$$59 = 3 \cdot 20 - 1 = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1,$$

$$89 = 3 \cdot 30 - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 6 - 1,$$

$$125 = 3 \cdot 42 - 1 = 3 \cdot 6 \cdot 7 - 1:$$

Այստեղից անմիջապես կռահում ենք, որ $\dfrac{S_4}{S_2}$ հարաբերությունների համարիչներն ունեն

$$3n(n+1) - 1$$

տեսքը: Հետևաբար, $\dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{3n(n+1)-1}{5}$, որտեղից էլ գտնում ենք որոնելի S_4 գումարը՝

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{3n(n+1)-1}{5} \cdot S_2 =$$

$$= \frac{3n(n+1)-1}{5} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} :$$

Քանի որ ստացված արդյունքը, վերջին հաշվով, գտանք կռահմամբ, ապա այն հարկավոր է համարել վարկած և այդ վարկածն ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Դրա համար.

1) Համոզվում ենք, որ $n=1$-ի համար վարկածը ճշմարիտ է:

2) Այնուհետև ենթադրում ենք, որ վարկածը ճշմարիտէ $n=k$-ի համար, այսինքն՝

$$S_{4(k)} = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30},$$

և ապացուցում, որ այդ դեպքում

$$S_{4(k+1)} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)\left[3(k+1)^2+3(k+1)-1\right]}{30} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)}{30} : \qquad (1.11)$$

Իրոք,

$$S_{4(k+1)}=S_{4(k)}+(k+1)^4=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}+(k+1)^4=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^4}{30}=$$

$$=\frac{(k+1)\left[(2k^2+k)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3\right]}{30}=$$

$$=\frac{(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)}{30}:$$

Համարիչի 2-րդ փակագծերի միջի բազմանդամը, սովորական թվերի բաժանման կանոնով, փորձենք բաժանել $(k+2)(2k+1)=2k^2+7k+6$ եռանդամի վրա.

$$\begin{array}{r|l}
-\;6k^4+39k^3+91k^2+89k+30 & 2k^2+7k+6 \\
\underline{6k^4+21k^3+18k^2\qquad\qquad\quad} & \overline{3k^2+9k+5} \\
-\;18k^3+73k^2+89k\qquad & \\
\underline{18k^3+63k^2+54k\qquad} & \\
-\;10k^2+35k+30 & \\
\underline{10k^2+35k+30} & \\
0\qquad\quad &
\end{array}$$

Բաժանվե՛ց: Հետևաբար՝ կարելի է գրել՝

$$6k^4+39k^3+91k^2+89k+30=(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5),$$

ինչը նշանակում է, որ (1.11) բանաձևի ճշմարիտ լինելն ապացուցվեց:

Այսպիսով՝

$$\boxed{S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}} \quad (1.12)$$

բանաձևով արտահայտվող մեր վարկածը ճիշտ է կամայական բնական n-ի համար:

9. Եռանկյունաչափական գումար

Ֆիզիկայի՝ երբեմն բնույթով իրարից էապես տարբերվող շատ խնդիրների լուծումը հաճախ հանգում է միևնույն մաթեմատիկական արտահայտության, օրինակ՝ եռանկյունաչափական (ներդաշնակ) ֆունկցիաների գումարի հաշվարկմանը: Բերենք օրինակ: Դիցուք՝ n միատեսակ մեներանգ լույսի աղբյուրներ շղթա են կազմում, իսկ նրանց արձակած կոհերենտ ալիքները (որոնք նկարագրվում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով), հանդիպելով տարածության մի որոշ կետում, վերադրվում են: Այդ դեպքում լույսի արդյունարար ուժգնությունն արտահայտվում է եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի տեսքով: Կարելի է բերել այլ օրինակներ ևս [5]: Ահա թե ինչու է կարևոր եռանկյունաչափական գումարի հաշվման հնարների դիտարկումը:

Հաշվենք, օրինակ, հետևյալ եռանկյունաչափական գումարը՝

$$S_n = sinx + sin2x + \cdots + sinnx : \qquad (1.13)$$

Աչքի անցկացնելով եռանկյունաչափական դպրոցական բանաձևերը՝ կարելի է նկատել, որ երկու տարբեր արգումենտների սինուսների արտադրյալի կրկնապատիկը արտահայտվում է այդ արգումենտների կոսինուսների տարբերությամբ՝

$$2sin\alpha sin\beta = cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) :$$

Իսկ տարբեր նշաններով անդամների մեջ գուցե լինե՞ն իրար փոխչեզոքացնող անդամներ: Ահա այս սևեռուն մտքով տոգորված՝ (1.13) գումարի աջ մասը բազմապատկենք $\dfrac{2sin\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}}$-ով՝

$$S_n = \frac{1}{2sin\frac{x}{2}}\left(2sinxsin\frac{x}{2} + 2sin2xsin\frac{x}{2} + 2sin3xsin\frac{x}{2} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + 2sin(n-1)xsin\frac{x}{2} + 2sinnxsin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{x}{2}}\left(cos\frac{x}{2} - cos\frac{3x}{2} + cos\frac{3x}{2} - cos\frac{5x}{2} + \cdots\right.$$

$$\cdots + cos\frac{2n-3}{2}x - cos\frac{2n-1}{2}x + cos\frac{2n-1}{2}x - cos\frac{2n+1}{2}x\bigg):$$

Հրաշալի է: Փակագծերի ներսում արտահայտություններից մնում են միայն առաջին և վերջին գումարելիները: Հետևաբար՝

$$S_n = \frac{cos\frac{x}{2} - cos\frac{2n+1}{2}x}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{sin\frac{n+1}{2}xsin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}:$$

Այսպիսով՝

$$S_n = sinx + sin2x + \cdots + sinnx = \frac{sin\frac{n+1}{2}xsin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}: \quad (1.14)$$

Վարժություն 5. Օգտագործելով վերը կիրառված հնարը՝ հաշվել $cosx + cos2x + \cdots + cosnx$ գումարը:

Պատասխան՝ $\dfrac{cos\frac{n+1}{2}xsin\frac{nx}{2}}{sin\frac{x}{2}}:$

Մաս II. «Անվերջ գումարների» հաշվման մեթոդները

1-ին աշակերտ. «Այսօր մաթեմատի-կայի նախասիրա-կան դասերին մենք ծա-նոթացանք մի շարք «անվերջ գումարների» հաշվման եղանակներին»:

2-րդ աշակերտ. «Անվերջ գումա՞ր… ի՞նչ անհեթե-թություն: Իսկական գումարը միշտ վերջավոր է…»:

1. Բազմանդա՞մ է, արդյոք, $(1+x)^{-1}$ *-ը*

Յուրաքանչյուր դպրոցական գիտե, որ $(1+x)^n$-ը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է, եթե n-ը բնական թիվ է: Իսկ եթե n-ը բնական թիվ չէ՞. ասենք՝ բացասական ամբողջ թիվ է, կամ կոտորակ: Օրինակ՝ բազմանդա՞մ է $(1+x)^{-1}=\dfrac{1}{1+x}$-ը: Համոզվելու համար, որ այն բազմ-անդամ լինել չի կարող, ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ պատկերացնենք, թե $\dfrac{1}{1+x}$-ը n-րդ աստիճա-նի բազմանդամ է: Վերջինս նշանակելով $P_n(x)$-ով՝ կարող ենք գրել $\dfrac{1}{1+x}=P_n(x)$ հավասարությունը, որ-տեղից՝ $1=(1+x)\cdot P_n(x)$:

Բայց $(1+x)\cdot P_n(x)$ արտադրյալը, ակներև է, տալիս է $(n+1)$-րդ աստիճանի բազմանդամ, և ոչ մի դեպքում՝ 1 (այն է՝ զրո աստիճանի բազմանդամ):

Ստանալու համար $(1+x)^{-1}$-ի տեսքը, սովորական բաժանման կանոնով 1-ը բաժանենք $(1+x)$-ի (տե՛ս մաս I, դրվագ 8).

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+x \\
\cline{2-2}
-\underline{1+x} & 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots \\
\quad -x & \\
\quad -\underline{-x-x^2} & \\
\qquad\quad x^2 & \\
\qquad\quad -\underline{x^2+x^3} & \\
\qquad\qquad -x^3 & \\
\qquad\qquad -\underline{-x^3-x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad x^4 & \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{x^4+x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -x^5 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\underline{-x^5-x^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^6\cdots &
\end{array}
$$

Եվ որքան էլ շարունակենք բաժանման պրոցեսը, միևնույն է, այն երբեք չի ավարտվելու, և ամբողջ ժամանակ քանորդում մեկը մյուսի հետևից հայտնվելու են նորանոր անդամներ:

Քանորդում, ճիշտ է, աստիճանի տեսքով գրված անդամները, կարծես, իրոք գումարելիներ են, բայց գումարման արդյունք դրանք չեն տալիս: Հետևաբար, առայժմ քանորդը պետք է պատկերացնենք որպես սիմվոլ (խորհրդանշան) և գրենք հետևյալ հավասարությունը

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots, \qquad (2.1)$$

որտեղ աջ մասի արտահայտությանը բնորոշ է այն, որ չի պարունակում վերջին անդամ, բայց յուրաքանչյուր անդամի հաջորդում է մեկ ուրիշը, որն x-ի ավելի մեծ ցուցիչով աստիճան է: Այսպես, $-x^5$-ին հաջորդում է x^6-ը, վերջինիս՝ $-x^7$-ը, այնուհետև գալիս է x^8-ը և այսպես շարունակ: Այսօրինակ արտահայտությունները չի կարելի անվանել բազմանդամ, քանի որ բազմանդամը միշտ պարունակում է որոշակի թվով անդամներ, որոնց մեջ միշտ հնարավոր է մատնանշել այն անդամը, որը պարունակում է x-ի ամենամեծ ցուցիչով աստիճանը: (2.1)-ի աջ մասի

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \qquad (2.2)$$

սիմվոլը («անվերջ գումարը») կարելի է դիտարկել որպես 1-ը $(1+x)$-ին բաժանելուց ստացված ***ճշգրիտ քանորդ:*** Այն կարելի էր անվանել, օրինակ, «անվերջ-անդամ», բայց մաթեմատիկայում գործածական է ***շարք*** եզրույթը: Քանի որ $1, -x, +x^2, \cdots$ «գումարելիները» (շարքի անդամները) x-ի՝ տարբեր ցուցիչով աստիճաններ են, ուստի (2.2) շարքը կոչվում է ***աստիճանային շարք:***

Ասվածն ըմբռնելու համար x-ը որոշակիացնենք՝ տալով նրան, օրինակ, $x=\frac{1}{4}$ թվային արժեքը (ուշադրություն դարձրեք, որ $-1<x<1$): Այդ դեպքում (2.1) հավասարության ձախ մասը հավասար կլինի՝ $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}=0,8,$ իսկ աջ մասում կստանանք՝ $1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots$: Սակայն

$$0,8=1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4-\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots \qquad (2.3)$$

հավասարությունը իմաստ կունենա միայն այն ժամանակ, երբ կկարողանանք գումարել այդ հավասարության աջ մասի անվերջ մեծ թվով գումարելիները. այդ գործողությունը, բնականաբար, ավարտին հասցնել չենք կարող: Բայց պետք է մի հնար գտնել, և փոքր-ինչ մտածելուց հետո, ընտրում ենք գումարը քայլ առ քայլ հաշվելու ուղին: Իսկ այդ ուղին հետևյալն է. սկզբից (2.3)-ի աջ մասից վերցնում ենք մեկ անդամ (առաջին անդամը՝ 1), ապա՝ առաջին երկուսի գումարը, այնուհետև՝ առաջին երեքի գումարը, և այսպես շարունակ (մինչև հոգնենք): Ամեն անգամ ստացված գումարները համեմատում ենք ձախ մասի՝ 0,8-ի հետ: Այսպիսով՝ կունենանք՝

$$0,8 = 1,$$
$$0,8 = 0,75,$$
$$0,8 = 0,8125,$$
$$0,8 = 0,796875,$$
$$0,8 = 0,80078125,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

հավասարությունները, որոնք, ակներև է, մոտավոր են, այսինքն՝ ոչ մի միջանկյալ արդյունք հավասար չէ 0,8-ի: Սակայն նկատում ենք, որ ինչքան ավելի շատ են գումարվող անդամները, այնքան ստացված արդյունքն ավելի մեծ ճշգրտությամբ է հավասար 0,8-ի:

Այսպիսով կարծես բոլոր հիմքերն ունենք պնդելու, որ (2.1) հավասարությունը ճշմարիտ է բոլոր այն x-երի համար, որոնք բացարձակ արժեքով փոքր են 1-ից:

Բայց մեր պնդմանը ինչպես դուք, սիրելի ընթերցողներ, այնպես էլ մենք, ավելի կվստահենք միայն այն դեպքում, երբ սահմանենք (2.2) շարքի գումարը: Իսկ մինչ այդ կատարենք հետևյալ նշանակումները՝ $a_1=1$, $a_2=-x,\ a_3=x^2,\ a_5=x^4,\ a_6=-x^5,\dots,a_{n-1}=(-1)^{n-1}x^{n-1},\dots$:

Այնուհետև սկսենք հաջորդաբար գումարել (2.2) շարքի անդամները՝ կազմելով հետևյալ գումարները (որոնց թիվն անվերջ մեծ է)՝

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1,\\
&S_2=a_1+a_2,\\
&S_3=a_1+a_2+a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots:
\end{aligned}$$

Վերոգրյալ գումարները կոչվում են ***մասնակի գումարներ:*** Մասնակի գումարների

$$S_1,S_2,S_3,\dots,S_n,\dots \tag{2.4}$$

հաջորդականության վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, երբ $n\to\infty$՝

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n, \tag{2.5}$$

անվանում են շարքի գումար՝ գրառելով այն այսպես.

$$S=a_1+a_2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n:$$

Եթե շարքն ունի վերջավոր գումար, ապա կոչվում է ***զուգամետ,*** այլապես (այսինքն՝ գումարը հավասար է $\pm\infty$ կամ գոյություն չունի)՝ ***տարամետ:***

Հաջորդիվ մեր խնդիրն է լինելու որոշ զուգամետ շարքերի գումարի հաշվումը:

2. Շարքեր, որոնց անդամները կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա

(2.1) հավասարության մեջ փոխենք ձախ և աջ մասերի տեղերը՝

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+x}: \quad (2.6)$$

Համոզվենք՝ (2.6) հավասարության ձախ մասի շարքի գումարն իրո՞ք հավասար է $\frac{1}{1+x}$-ի:

Փոքր-ինչ ուշադիր լինելով՝ հնարավոր չէ չնկատել, որ հիշատակվող շարքի («անվերջ գումարի») անդամների հաջորդականությունը անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա է (քանի որ յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է իրեն նախորդող անդամին՝ բազմապատկած $-x$-ով, իսկ $-1<x<1$)՝

$$\div 1,-x,x^2,-x^3,\ldots,(-1)^{n-1}x^{n-1},\ldots$$

Այս անվերջ պրոգրեսիայից առանձնացնենք առաջին n անդամներից կազմված վերջավոր պրոգրեսիան՝

$$\doteq 1, -x, x^2, -x^3, \ldots, (-1)^{n-1} x^{n-1}, \qquad (2.7)$$

և գտնենք այդ անդամների S_n գումարը՝

$$S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} : \qquad (2.8)$$

(2.8) առնչության երկու մասն էլ բազմապատկենք x-ով

$$xS_n = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} x^n$$

և ապա ստացված հավասարությունն անդամ առ անդամ գումարենք (2.8)-ի հետ: Արդյունքում կստանանք՝

$S_n(1+x) = 1 + (-1)^{n-1} x^n,$ որտեղից՝ $S_n = \dfrac{1 + (-1)^{n-1} x^n}{1+x}$:

S_n-ը (2.6) հավասարության ձախ մասում գրված շարքի n-րդ մասնակի գումարն է: Ուստի, համաձայն (2.5) սահմանման, այդ շարքի S գումարը հավասար է՝

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1} x^n}{1+x},$$

և քանի որ $|x| < 1$, ապա $x^n \to 0$, երբ $n \to \infty$, այդ պատճառով՝ $S = \dfrac{1}{1+x}$:

Այսպիսով, համոզվեցինք, որ (2.6), հետևաբար՝ նաև (2.1) բանաձևերը, իրոք, ճշմարիտ են:

Օրինակ 1: Հաշվենք $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$ շարքի գումարը, երբ $-1<x<1$:

(2.6) հավասարության ձախ մասում x-ը փոխարինենք $(-x)$-ով. կստանանք՝

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(-x)^{n-1}+\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots=$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots,$$

որը ոչ այլինչ է, եթե ոչ տրված շարքը: Նմանօրինակ փոխարինմամբ (2.6)-ի աջ մասում կունենանք $\frac{1}{1-x}$:

Հետևաբար՝

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}: \qquad (2.9)$$

Վարժություն 1: ա) Հաշվեք (2.9)-ի ձախ մասի շարքի առաջին n անդամների S_n գումարը՝

$$S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}: \qquad (2.10)$$

Ցուցում: (2.10)-ի երկու կողմն էլ բազմապատկեք x-ով և հանեք իրարից:

Կստանաք

$$S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}: \qquad (2.11)$$

բ) Հաշվեք $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ թվային շարքի գումարը:

Ցուցում: (2.9) բանաձևում համարեք $x=\frac{1}{2}$ և արդյունքում կստանաք՝

$$\boxed{S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2:} \tag{2.12}$$

3. Շարք, որի անդամները, սկսած երկրորդից, նախորդ և հաջորդ անդամների հարմոնիկ միջինն են

Այդ շարքն այդպես էլ անվանում են՝ ***հարմոնիկ շարք:*** Հարմոնիկ եզրույթը ծագում է հունարեն ἁρμονια բառից, որ նշանակում է ***կապ, ներդաշնակություն, համաչափություն:***

Ահավասիկ վերնագրյալ (հարմոնիկ) շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{2.13}$$

որի՝ երկրորդից սկսած յուրաքանչյուր անդամ իր հարևանների հարմոնիկ միջինն է, այսինքն՝ նրա հակադարձը հարևան անդամների հակադարձների թվաբանական միջինն է (հարմոնիկ միջինի մասին առավել հանգամանորեն կարող եք կարդալ [5] մեթոդական ձեռնարկում, էջ 234-246):

Նախորդ դրվագի վարժություն 1բ-ի

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \qquad (2.14)$$

զուգամետ շարքի անդամները կազմում են անվերջ հաջորդականություն, որի n-րդ անդամը ձգտում է զրոյի, երբ անդամների թիվն անվերջորեն աճում է, այսինքն՝ $\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$, երբ $n\to\infty$: Հարմոնիկ շարքի անդամները նույնպես կազմում են հաջորդականություն, որի n-րդ անդամը՝ $\frac{1}{n}\to 0$, երբ $n\to\infty$: Առաջին հայացքից թվում է, թե հարմոնիկ շարքը ևս պետք է լինի զուգամետ: Բայց ամեն պնդում, եթե աքսիոմ չէ, հարկավոր է ապացուցել:

Դրա համար ենթադրենք (ինչպես որ մենք կարծում ենք), թե (2.13) հարմոնիկ շարքը զուգամետ է և հաշվենք այդ շարքի $2n$-րդ և n-րդ մասնակի գումարների տարբերությունը՝

$$S_{2n}-S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ անդամ}}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ անդամ}}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}:$$

Իսկ զուգամետ շարքի երկու մասնակի գումարների տարբերությունը պետք է ձգտի զրոյի, ինչպես, օրինակ, (2.14) զուգամետ շարքի համար է, որի n-րդ և $2n$-րդ մասնակի գումարներն են՝

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}:$$

Այդ տարբերության սահմանը, երբ $n \to \infty$, հավասար է՝

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(S_n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) - S_n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = 0:$$

Նշանակում է, եթե հարմոնիկ շարքը զուգամետ է, ապա նրա երկու մասնակի գումարների $S_{2n} - S_n$ տարբերությունը ևս պետք է ձգտի զրոյի, երբ $n \to \infty$, մինչդեռ հարմոնիկ շարքի $(S_{2n} - S_n)$-ը մեծ է $\frac{1}{2}$-ից: Հետևաբար, մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, ինչը նշանակում է, որ հարմոնիկ շարքը չի կարող լինել զուգամետ:

Եթե ընթերցողին համոզիչ չթվա այս ապացույցը, ներկայացնենք մեկ ուրիշը ևս:

Դրա համար հարմոնիկ շարքը բաժանենք առանձին խմբերի: Օրինակ, շարքի առաջին 100 անդամները տրոհենք տասնյակների, հաջորդ անդամները՝ մինչև 1000-րդը, հարյուրյակների և այլն: Ուշադրություն դարձրեք այն բանին, որ առաջին 9 անդամներից յուրաքանչյուրը մեծ է $\frac{1}{10}$-ից, ուստի՝

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}>\frac{9}{10}:$$

Հաջորդ 90 անդամներից յուրաքանչյուրը մեծ է $\frac{1}{100}$-ից, այդ պատճառով՝

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{99}>90\cdot\frac{1}{100}=\frac{9}{10}:$$

Հաջորդ 900 անդամներից ամեն մեկը մեծ է $\frac{1}{1000}$-ից, ուրեմն՝

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{999}>\frac{900}{1000}=\frac{9}{10}$$

և այսպես շարունակ՝

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{9999}>\frac{9000}{10000}=\frac{9}{10} \text{ և այլն:}$$

Հետևաբար, շարքի բոլոր անդամների գումարը մեծ է

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots$$

շարքի գումարից, որը, ակներև է, անվերջ մեծ է: Այստեղից էլ հետևում է, որ ***հարմոնիկ շարքը տարամետ է:***

Հետաքրքիր է իմանալ

Հարմոնիկ թվեր

Հարմոնիկ շարքի մասնակի գումարները նշանակվում են H_n-ով և կոչվում են *հարմոնիկ թվեր* («H»-ը «harmonic» բառի առաջին տառն է)՝

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}:$$

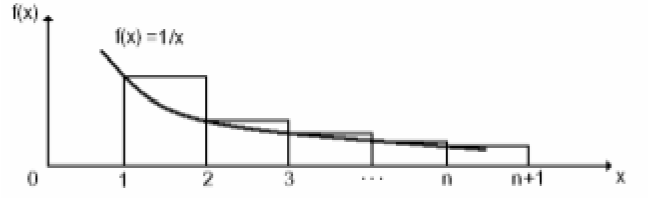
Հարմոնիկ թվերի մասին պատկերացում կազմելու համար բերենք դրանցից մի քանիսի արժեքները.

Աղյուսակ 4

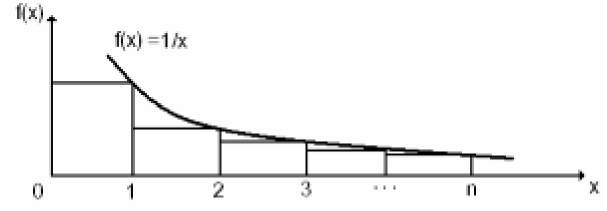
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Թեպետ հարմոնիկ շարքի անդամները, համարի աճմանը զուգընթաց, նվազում են՝ ձգտելով զրոյի՝ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, այդուհանդերձ, ինչպես վերը տեսանք, հարմոնիկ շարքը տարամետ է (այս փաստն առաջինն ապացուցել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Նիկոլա Օրեմը (1323-1383)):

Ճիշտ է, H_n հարմոնիկ թվերը ձգտում են անվերջության, սակայն դրանք անվերջության են ձգտում լոգարիթմական օրենքով, այսինքն՝ չափազանց դանդաղ: Օրինակ, Շվեյցարացի մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերը (1707-1787) H_{1000} և $H_{1000000}$ հարմոնիկ թվերի համար ստացել է, համապատասխանաբար, $H_{1000}\approx 7,48$ և $H_{1000000}\approx 14,39$ արժեքները:



Նկ. 1



Նկ. 2

Քանի որ H_n-ը $f(x)=ln\,x$ ֆունկցիան է $x=n$, $n\in N$, ընդհատ արժեքների համար, իսկ $ln\,x$-ը որոշվում է որպես վերևից $1/x$ կորով սահմանափակված սեղանակերպի մակերես, ապա, օգտվելով $f(x)=1/x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, կարող ենք գնահատել H_n-ը:

$f(x)=1/x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կազմենք այնպիսի ուղղանկյուններ, ինչպես ցույց է տրված նկ. 1-ում: Արդյունքում կորով սահմանափակված մակերեսը, երբ x-ը փոփոխվում է 1-ից մինչև n, հավասար է $ln\,n$ և փոքր է n ուղղանկյուններով սահմանափակված պատկերի մակերեսից, որը հավասար է՝ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n$: Հետևաբար՝ $ln\,n<H_n$:

Նույն կերպ կազմելով ուղղանկյուններ կորից ներքև, կստանանք H_n-ի վերին սահմանը: Այս անգամ

n ուղղանկյուններով սահմանափակված H_n մակերեսը փոքր է կորով սահմանափակված սեղանակերպի մակերեսի և առաջին ուղղանկյան մակերեսի գումարից (նկ. 2): Հետևաբար՝

$$\ln n < H_n < \ln n + 1, \quad \text{երբ} \quad n = 2, 3, 4, \ldots :$$

Թեպետ $H_n \to \infty$, $\ln n \to \infty$, երբ $n \to \infty$, այդուհանդերձ $(H_n - \ln n)$ տարբերությունը ձգտում է 1-ից փոքր սահմանի՝ $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = C$: C-ն անվանում են Էյլերի հաստատուն՝

$$C = 0{,}5772156649\ldots$$

4. Հարմոնիկ շարքից «սերած» շարքեր (1)

Հարմոնիկ շարքը թեպետ տարամետ է, բայց հաճախ, անսպասելիորեն, հայտնվում է ֆիզիկական խնդիրներում: Այդ մասին ընթերցողի հետ կզրուցենք մաս III-ում, իսկ այժմ խոսենք մի շարքի մասին, որը հարմոնիկ շարքն է՝ մեկընդմեջ բացասական նշան ունեցող անդամներով (այդպիսի շարքերն անվանում են ***նշանափոխ*** շարքեր): Ահավասիկ այդ շարքը՝

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots : \qquad (2.15)$$

Ինչպես կտեսնենք ստորև, այս շարքը նույնպես հանդիպում է ֆիզիկայի խնդիրներում, ուստի արժե, որ փոքր-ինչ մանրամասնորեն ընթերցողի հետ զրուցենք այդ շարքի մասին:

Նախ համոզվենք, որ (2.15) շարքը զուգամետ է: Դրա համար այն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}+\cdots: \qquad (2.15')$$

Այնուհետև դիտարկենք այսպիսի շարք՝

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots, \qquad (2.16)$$

որի n-րդ մասնակի գումարը, ձևափոխելով, կստանանք՝

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}:$$

Բայց $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, ինչը նշանակում է, որ (2.16) շարքը զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է 1-ի:

Համեմատելով (2.15′) և (2.16) շարքերն իրար հետ՝ նկատում ենք, որ

$$(2.15') \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\frac{1}{5\cdot 6}<\frac{1}{3\cdot 4}$$

……………..

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n(n+1)}$$

………………………..

Եվ քանի որ (2.16) շարքը զուգամետ է, ապա, բնականաբար, (2.15′) շարքը, կամ, որ նույնն է, (2.15) շարքը ևս կլինի զուգամետ:

Մեզ մնաց միայն գնահատել (2.15) շարքի գումարը: Կարելի է նույնիսկ միկրոհաշվիչով հաշվել, օրինակ, այդ շարքի առաջին տասն անդամների S_{10} գումարը:

Եթե S-ի համար որպես գնահատական վերցնենք S_{10}-ի՝ պակասորդով և հավելուրդով արժեքների թվաբանական միջինը, ապա կունենանք հետևյալ գնահատականը՝

$$S \approx 0,6910: \qquad (2.17)$$

Իսկ ի՞նչ ֆունկցիայի արժեք է ստացված թիվը: Կրկին ձեր ուշադրությունը սևեռեք (2.15) շարքի վրա, որի գումարը մոտավորապես 0,69 է, կամ դրան մոտ թիվ՝

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots \approx 0,69:$$

Այժմ ուշադրություն դարձրեք (2.6) հավասարության վրա՝ x-ը համարելով 1-ից փոքր ոչ բացասական թիվ: Ոչինչ չեք նկատի: Բայց… մի փոքր մտորեք և հետո կազմեք աղյուսակ, որի առաջին տողի վանդակներում (2.6) հավասարության ձախ մասի շարքի անդամներն են և աջ մասը, որն այդ շարքի գումարն է, իսկ երկրորդ տողում այն ֆունկցիաները, որոնց ածանցյալները հավասար են առաջին տողի համապատասխան վանդակներում գրված ֆունկցիաները: (Այդպիսի ֆունկցիաներն անվանում են ածանցյալ-ֆունկցիաների ***նախնականներ:***) Աղյուսակը կունենա ահա այսպիսի տեսք.

Աղյուսակ 5

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$\cdots$	$f_n(x)$	$\cdots$	$f(x)$
(2.6) շարքի անդամները (ածանցյալ-ֆունկցիաները) և դրանց գումարը	1	$-x$	x^2	$-x^3$	x^4	$-x^5$	$\cdots$	$(-1)^{n+1}x^{n+1}$	$\cdots$	$\frac{1}{1+x}$
(2.6) շարքի անդամների՝ (ածանցյալ-ֆունկցիաների) և դրանց գումարի նախնականները	x	$-\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{4}x^4$	$\frac{1}{5}x^5$	$-\frac{1}{6}x^6$	$\cdots$	$(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$	$\cdots$	$ln(1+x)$
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$\cdots$	$F_n(x)$	$\cdots$	$F(x)$

Ուրեմն, (2.15) շարքի գումարը հավասար է *ln2* -ի՝

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=ln2:} \tag{2.18}$$

Հետաքրքիր է իմանալ

Պարադոքս

Դիտարկենք

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots \tag{2.19}$$

զուգամետ շարքը, որն իրենից ներկայացնում է անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի (որի հայտարարը $-\frac{1}{2}$ է) անդամների գումար, որը հավասար է՝

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}:$$

(2.19) շարքի գումարը հաշվենք փոքր-ինչ այլ կերպ՝

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots\right)=S_1+2S_2,$$

որտեղ

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}:$$

Հետևաբար՝

$$S=2-2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}:$$

S-ի համար ստացանք նույն արժեքը: Անշուշտ, սպասելի արդյունք. չէ՞ որ (2.19) շարքում կատարել էինք անդամների որոշ փոխատեղումներ, ինչպիսիք կատարում ենք վերջավոր գումարներ հաշվելիս, և ուրիշ ոչինչ:

Այժմ նման փոխատեղումներ կատարենք (2.18) շարքի անդամների նկատմամբ.

$$ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)=0,$$

այսինքն՝ $ln2=0.$ անհեթեթ արդյունք:

Այստեղից միայն կարելի է եզրակացնել, որ հաշվումներում տարամետ շարքերի և դրանց «անվերջ գումարների» օգտագործումը կարող է հանգեցնել պարադոքսների:

Ի՞նչն է պատճառը: Ինչու՞ նույն ձևափոխությունների դեպքում (2.19) զուգամետ շարքի գումարը մնաց նույնը, իսկ (2.18), դարձյալ զուգամետ շարքի գումարը փոխվեց: Ուշադիր հետևելով կատարված ձևափոխություններին՝ նկատում ենք, որ թեպետ և՛ (2.18) և՛ (2.19) շարքերն էլ նշանափոխ և զուգամետ են, բայց դրանց անդամների բացարձակ մեծություններով կազմված շարքերն իրարից տարբերվում են: (2.18)-ի դրական անդամներով շարքը հարմոնիկ շարքն է, որը տարամետ է, իսկ (2.19)-ի դրական անդամներով շարքը զուգամետ է (և գումարն էլ հավասար է 2-ի): Իսկ ձևափոխությունների ժամանակ երկու շարքի դեպքում էլ փակագծերում օգտագործվում են դրանց դրական անդամներով շարքերը, ընդ որում մի դեպքում օգտագործվող շարքը զուգամետ է, երկրորդ դեպքում՝ տարամետ. փակագծերում հանդես եկող շարքի տարամետ լինելն էլ հանգեցնում է պարադոքսի:

5 . Հարմոնիկ շարքից սերած շարքեր (2)

Վերնագրյալ շարքն է՝

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots: \qquad (2.20)$$

Այնքան էլ դժվար չէ համոզվել, որ գրված շարքը զուգամետ է: Իրոք, կատարելով նշանակումներ՝ $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{3}$, $a_3=\frac{1}{5}$, $a_4=\frac{1}{7},\ldots$, (2.20) շարքի զույգ կարգի մասնակի գումարը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}):$$

Քանի որ $a_{n+1}<a_n$, ապա փակագծերում գրված տարբերությունները դրական են, ուստի n-ի աճմանը զուգընթաց S_{2n}-ը ևս աճում է:

S_{2n} մասնակի գումարը կարելի է գրել նաև այսպես՝

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ S_{2n}-ը սահմանափակ է վերևից՝ $S_{2n}<a_1$:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացից ձեզ հայտնի է, որ եթե հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և սահմանափակ՝ վերևից, ապա այն ունի վերջավոր սահման: $\{S_{2n}\}$ հաջորդականությունը բավարարում է այս պայմանը, հետևաբար՝ ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S:$$

(2.20) շարքի կենտ կարգի S_{2n+1} մասնակի գումարը՝ $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n}$: Քանի որ $a_{2n} = \frac{1}{4n-1}$, ապա $a_{2n} \to 0$, երբ $n\to\infty$: Հետևաբար՝

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S:$$

Այստեղից հետևում է, որ S-ը տրված շարքի գումարն է, այսինքն՝ (2.20) շարքը զուգամետ է:

Այժմ հաշվենք (2.20) շարքի գումարը: Դրա համար 2-րդ դրվագից հիշենք (2.6) հավասարության ձախ մասի շարքը: Այդ շարքի գումարը, երբ $-1 < x < 1$, հավասար է $\frac{1}{1+x}$-ի, այսինքն՝

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots = \frac{1}{1+x}:$$

x-ը փոխարինենք x^2-ով: Արդյունքում կունենանք՝

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}: \qquad (2.21)$$

այսինքն՝

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots \qquad (2.21')$$

շարքը ևս զուգամետ է, երբ $-1 < x < 1$, և գումարն էլ հավասար է $\frac{1}{1+x^2}$-ի:

Դարձյալ կազմենք աղյուսակ (Աղյուսակ 6), որի առաջին տողի վանդակներում գրված են (2.21′) շարքի անդամները և շարքի գումարը, իսկ երկրորդ տողի համապատասխան վանդակներում դրանց նախնականները:

Այսպիսով, նախնականների շարքն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots:$$

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots: \qquad (2.22)$$

Ի տարբերություն (2.21′) շարքի, (2.22) շարքը զուգամետ է նաև $x=1$ դեպքում: Իրոք, երբ $x=1$, ապա (2.22)-ը վերածվում է (2.20) թվային շարքի, որը զուգամետ է: Քանի որ $arctg1=\frac{\pi}{4}$, ապա $x=1$ դեպքում կունենանք՝

$$\boxed{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}:} \qquad (2.23)$$

Աղյուսակ 6

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$		$f_n(x)$		$f(x)$
(2.21) շարքի անդամները և գումարը (ածանցյալ-ֆունկցիաները)	1	$-x^2$	x^4	$-x^6$	x^8	$-x^{10}$	$\dots$	$(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}$	$\dots$	$\frac{1}{1+x^2}$
Վերին տողի ածանցյալ-ֆունկցիաների նախնականները	x	$-\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{5}x^5$	$-\frac{1}{7}x^7$	$\frac{1}{9}x^9$	$-\frac{1}{11}x^{11}$	$\dots$	$(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	$\dots$	$arctgx$
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$\dots$	$F_n(x)$	$\dots$	$F(x)$

6. «Հակադարձ քառակուսիների» շարքը

Այսպես է կոչվում

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \qquad (2.24)$$

շարքը:

Քննենք վերոգրյալ շարքի զուգամիտության հարցը, այդ շարքը համեմատելով (2.16) զուգամետ շարքի հետ:

Հարմար է, սակայն, (2.24) շարքի առաջին անդամը դեն գցենք. եթե (2.24) շարքը զուգամետ է, ապա ստացված

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \qquad (2.25)$$

շարքը ևս կլինի զուգամետ, և նրա գումարը հավասար կլինի (2.24) շարքի գումարին՝ հանած դեն գցված անդամը՝ 1-ը: Համեմատելով (2.25) և (2.16) շարքերն իրար հետ՝ նկատում ենք, որ

$$\begin{array}{cc}
(2.25) & (2.16) \\
\frac{1}{2^2} < & \frac{1}{1\cdot 2} \\
\frac{1}{3^2} < & \frac{1}{2\cdot 3} \\
\frac{1}{4^2} < & \frac{1}{3\cdot 4} \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots} \\
\frac{1}{n^2} < & \frac{1}{(n-1)n} \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Եվ քանի որ (2.16) շարքը զուգամետ է, ապա, բնականաբար, (2.25) շարքը, հետևաբար նաև՝ (2.24) շարքը, նույնպես կլինեն զուգամետ:

Հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը դպրոցական մաթեմատիկայի ընձեռած հնարավորություններով հաշվել չենք կարող, ուստի դպրոցի աշակերտներին այդ գումարի արժեքը կներկայացնենք պատրաստի՝

$$\boxed{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}:} \tag{2.26}$$

Նրանց համար, ովքեր ծանոթ են բարձրագույն մաթեմատիկայի հիմունքներին, հակադարձ քառակուսիների, ինչպես նաև հակադարձ չորրորդ աստիճանների շարքերի գումարը կհաշվենք 7-րդ դրվագում:

Նրանց համար, ովքեր ուզում են իմանալ ավելին

Ընդհանրացված հարմոնիկ շարքը

Այսպես են անվանում

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{2.27}$$

շարքը, որի զուգամիտության կամ տարամիտության հարցը պայմանավորված է այն բանով, թե ի՞նչ թվային միջակայքերում է ընկած s ցուցիչը: Ակներև է, որ $s=1$ դեպքում (2.27) շարքը վերածվում է հարմոնիկ շարքի և, այդ պատճառով, տարամետ է: $s<1$ և $s>1$ դեպքերը քննենք առանձին-առանձին:

ա. Դիցուք՝ $s<1$: Այդ ժամանակ (2.27) շարքի անդամները, սկսած երկրորդից, մեծ են հարմոնիկ շարքի համապատասխան համարով անդամներից (առաջին անդամները հավասար են): Իրոք, $s<1$ դեպքում 2^s, $3^s,\ldots$ թվերը փոքր են $2, 3,\ldots$ թվերից, հետևաբար՝

$$\frac{1}{1^s}=1, \qquad \frac{1}{2^s}>\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{3^s}>\frac{1}{3}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{n^s}>\frac{1}{n},\cdots:$$

Այստեղից դժվար չէ եզրակացնել, որ նշված պայմանով դեպքում (2.27) շարքը, բնականաբար, տարամետ է:

բ. $s>2$ դեպքում (2.27) շարքի անդամները փոքր են հակադարձ քառակուսիների (2.24) շարքի համապատասխան անդամներից: Հետևաբար, $s\geq 2$ դեպքում (2.27) շարքը պետք է զուգամիտի:

Բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացում ցույց է տրվում, որ երբ $1<s<2$, (2.27) շարքը դարձյալ զուգամետ է:

Այսպիսով, (2.27) շարքը զուգամետ է, երբ $s>1$, և տարամետ է $s\leq 1$ դեպքում:

Իմանալով հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը՝ կարող ենք դյուրավ հաշվել կենտ թվերի քառակուսիների հակադարձներից կազմված շարքի գումարը: Իրոք, հետևյալ ձևափոխությունները, կարծում ենք, բացատրության կարիք չունեն՝

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}+\frac{1}{2^2\cdot 5^2}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}:$$

Այսպիսով՝

$$\boxed{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}:} \tag{2.28}$$

Նույնպիսի թեթևությամբ կարող ենք հաշվել նաև հակադարձ քառակուսիների նշանափոխ շարքի գումարը՝

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}--\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12},$$

այսինքն՝

$$\boxed{1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}:} \qquad (2.29)$$

7. Գաղափար ֆունկցիոնալ շարքերի մասին: Թեյլոր-Մակլորենի շարքը

> Ուսուցանելիս օրինակներն ավելի
> կարևոր են, քան կանոնները:
> Իսահակ Նյուտոն

Հետադարձ հայացք ձգենք (2.2) արտահայտությանը՝

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots,$$

որի մեջ մտնող x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համապատասխանում է թվային շարք: Այսպիսի ֆունկցիոնալ համապատասխանությամբ որոշվող արտահայտությունն անվանում են ***ֆունկցիոնալ շարք:*** Ինչպես արդեն գիտենք, (2.2) ֆունկցիոնալ շարքը (-1,1) միջակայքին պատկանող յուրաքանչյուր x-ի համար զուգամետ է. այդ միջակայքն այդպես էլ անվանում են՝ (2.2) ֆունկցիոնալ շարքի ***զուգամիտության տիրույթ*** կամ ***միջակայք:***

Օրինակ՝ (2.27) ընդհանրացված հարմոնիկ շարքը զուգամետ է, երբ $s>1$, և տարամետ է $s\leq 1$ դեպքում: Հետևաբար, այդ շարքի զուգամիտության միջակայքը որոշվում է $s>1$ անհավասարությամբ:

Ուսանող ընթերցողները բարձրագույն մաթեմատիկայի դասընթացից գիտեն, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան մի որոշ փակ միջակայքում ունի ամեն կարգի ածանցյալ, ապա ֆունկցիայի համար կարելի է գրել Թեյլորի բանաձևը n-ի կամայական արժեքի համար (Բրուկ Թեյլոր, 1685-1731, անգլիացի մաթեմատիկոս)՝

$$f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=S_n(x):$$

Նշանակենք՝ $f(x)-S_n(x)=R_n(x)$: Եթե

$$R_n(x)\to 0,\quad \text{երբ}\quad n\to\infty,$$

ապա

$$f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots$$

շարքը զուգամիտում է, և նրա գումարը $f(x)$-ն է:

Այսպիսով, $f(x)$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել

$$f(x)=f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots \quad (2.30)$$

շարքի տեսքով, որն անվանում են այդ ֆունկցիայի ***Թեյլոր-Մակլորենի շարք*** (Կոլին Մակլորեն, 1698-1746, շոտլանդացի մաթեմատիկոս)։

Ներկայացնենք մեզ արդեն ծանոթ մի քանի ֆունկցիաների Թեյլոր-Մակլորենի շարքերը.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots,$$

$$-1<x<1,$$

$$ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

$$-1<x\leq 1,$$

(տե՛ս աղյուսակ 2.2)։

$$arctgx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

$$-1\leq x\leq 1,$$

Հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը հաշվելիս մեզ համար կարևորվում է $sinx$ ֆունկցիայի Թեյլոր-Մակլորենի շարքը։ Այդ նպատակով նախապես հաշվենք $sinx$-ի ածանցյալները՝

$$\frac{d}{dx}sinx = cosx, \quad \frac{d^2}{dx^2}sinx = -sinx, \quad \frac{d^3}{dx^3}sinx = -cosx,$$

$$\frac{d^4}{dx^4}sinx = sinx, \ldots,$$

այնուհետև՝ այդ ածանցյալների արժեքները, երբ $x = 0$: Համաձայն (2.30) բանաձևի՝ կստանանք հետևյալ վերլուծությունը՝

$$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots : \qquad (2.31)$$

Ունենալով *sinx* ֆունկցիայի (2.31) վերլուծությունը՝ հետևյալ դատողությունների օգնությամբ ստանանք հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը: Բերվող դատողություններն Էյլերինն են: Աջ մասի շարքը պատկերացնենք որպես «անվերջ աստիճանի բազմանդամ»: Բնականաբար, քանի որ այդ «բազմանդամի» աստիճանն անվերջ մեծ է, ապա «բազմանդամը» պետք է ունենա անվերջ շատ արմատներ (ինչպես, օրինակ, $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ եռանդամը կարող է ունենալ ամենաշատը երկու իրական արմատ՝ x_1 և x_2, և այդ դեպքում այն վերլուծվում է արտադրիչների հետևյալ կերպ՝ $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$): Հիանալի է, քանի որ (2.31) վերլուծության ձախ մասում *sinx* ֆունկցիան է, որի արմատների թիվը նույնպես անվերջ մեծ է. այդ արմատներն են՝ $x = k\pi,$ որտեղ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$:

Այժմ փորձենք (2.31)-ի աջ մասի «անվերջ-անդամը» վերլուծել արտադրիչների: Թվում է, թե այդ վերլուծությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$sinx = x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots,$$

բայց, նույնիսկ մակերեսային զննումը ցույց է տալիս, որ այդ դեպքում փակագծերը բացելուց հետո ստացվում են π-ին բազմապատիկ ամբողջաթիվ գործակիցներ, ինչը չի համապատասխանում (2.31) բանաձևին:

Մի փոքր խորհելուց հետո դժվար չէ կռահել, որ $sinx$-ի վերլուծության յուրաքանչյուր փակագծի ներսում երկանդամները հարկավոր է ձևափոխել. $x - k\pi$ երկանդամը պարունակող փակագծի ներսում (որը զրո է դառնում, երբ $x = k\pi$) այդ երկանդամի փոխարեն վերցնենք $1 - \dfrac{x}{k\pi}$ երկանդամը: Այդ դեպքում $sinx$ ֆունկցիայի վերլուծությունը կլինի այսպիսին՝

$$sinx = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots =$$

$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots \qquad (2.32)$$

(2.32) վերլուծությունն ավելի ճշմարտանման է: Կարելի է ցույց տալ, որ այն զուգամիտում է կամայական x-ի դեպքում: Այժմ, ունենալով $sinx$ ֆունկցիայի (2.32) վերլուծությունը և (2.31) Թեյլոր-Մակլորենի շարքը, փորձենք հաշվել վերլուծության x^3-ի գործակիցը: Դրա համար, ըստ երևույթին, հարկավոր է «բացել» վերլուծության մի քանի փակագիծ, որից հետո, կարծում ենք, կնկատվի այն օրինաչափությունը, որն էլ հնարավորություն կտա որոնելի գործակիցը հաշվելու: Սկսենք՝ բացելով երեք փակագիծ՝

$$x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots=$$

$$=x\left[1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}\right)x^2+\frac{1}{4\pi^4}x^4\right]\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots=$$

$$=x\left[1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}\right)x^2+\frac{1}{4\pi^4}x^4-\frac{1}{9\pi^2}x^2+\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}\right)\frac{1}{9\pi^2}x^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{36\pi^6}x^6\right]\cdots=\left[x-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^4}+\frac{1}{9\pi^2}\right)x^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4\pi^4}+\frac{1}{9\pi^4}+\frac{1}{36\pi^4}\right)x^5-\frac{1}{36\pi^6}x^7\right]\cdots:$$

Բնական է, որ եթե կարողանայինք բացել բոլոր փակագծերը, կստանայինք, որ x^3-ի գործակիցը

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)$$

շարքի գումարն է:

Մյուս կողմից, $sinx$-ի Թեյլոր-Մակլորենի շարքից երևում է, որ x^3-ի գործակիցը հավասար է՝

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{6}:$$

Հետևաբար՝

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots=\frac{1}{6},$$

որտեղից էլ գտնում ենք հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը՝

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}:$$

Այսքան հաճելի չարչարանքից հետո, կարծում ենք, դժվար չէ հաշվել «հակադարձ չորրորդ աստիճանների»

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots \qquad (2.33)$$

շարքի գումարը:

Դարձյալ կրկնենք Էյլերի դատողությունները: (2.32) հավասարության երկու կողմն էլ լոգարիթմենք՝

$$lnsinx=lnx+ln\left(1+\frac{x}{\pi}\right)+ln\left(1-\frac{x}{\pi}\right)+ln\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)+ln\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)+\cdots,$$

և ապա՝ անցնենք, որից հետո կստանանք՝

$$ctgx = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \cdots =$$

$$= \cdots \frac{1}{x + 2\pi} + \frac{1}{x + \pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - \pi} + \frac{1}{x - 2\pi} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x + \pi k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k} :$$

Համաձայն (2.1) բանաձևի՝ յուրաքանչյուր $\frac{1}{x + \pi k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ կոտորակի համապատասխանում է անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի շարք, այսինքն՝

$$\frac{1}{x + \pi k} = \frac{1}{\pi k} \frac{1}{1 + \frac{x}{\pi k}} = \frac{1}{\pi k}\left(1 - \frac{x}{\pi k} + \frac{x^2}{\pi^2 k^2} - \frac{x^3}{\pi^3 k^3} + \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi k} - \frac{x}{\pi^2 k^2} + \frac{x^2}{\pi^3 k^3} - \frac{x^3}{\pi^4 k^4} + \cdots\right):$$

Հանգունորեն, համաձայն (2.9) բանաձևի՝

$$\frac{1}{x - \pi k} = -\frac{1}{\pi k} \frac{1}{1 - \frac{x}{\pi k}} = \frac{1}{\pi k} - \frac{x}{\pi^2 k^2} - \frac{x^2}{\pi^3 k^3} - \frac{x^3}{\pi^4 k^4} - \cdots :$$

Հետևաբար, $ctgx$ -ի շարքը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$ctgx=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi k}-\frac{x}{\pi^2k^2}-\frac{x^2}{\pi^3k^3}-\frac{x^3}{\pi^4k^4}+\cdots\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi k}-\frac{x}{\pi^2k^2}-\frac{x^2}{\pi^3k^3}-\frac{x^3}{\pi^4k^4}-\cdots\right)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{2x^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)-\frac{2x^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)-\cdots:$$

(2.34)

Մեզ մնաց անելու վերջին քայլը՝ գրելու $ctgx-\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի Թեյլոր-Մակլորենի շարքը

$$-\pi<x<0\cup 0<x<\pi$$

միջակայքի համար: Քանի որ $x=0$ դեպքում դիտարկվող ֆունկցիան իմաստ չունի, այն լրացնենք հետևյալ կերպ. երբ $x=0$, ապա $f(x)=ctgx-\frac{1}{x}=0$: Հետևաբար, այս նոր՝ ընդլայնված ֆունկցիայի վերլուծությունը կարող ենք գրել $-\pi<x<\pi$ միջակայքի կամայական x-ի համար: Այդ պատճառով, օգտվելով [8] տեղեկատուից (կամ համացանցից), կարող ենք ներկայացնել $ctgx-\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի վերլուծությունը՝

$$ctgx=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots: \qquad (2.35)$$

(2.34) և (2.35) բանաձևերի համեմատությունից ստացվում են ինչպես հակադարձ քառակուսիների, այնպես էլ հակադարձ չորրորդ աստիճանի շարքերի գումարը: Դրա համար բավական է իրար հավասարեցնել նշված բանաձևերի x, և ապա x^3 պարունակող «անդամների» գործակիցները՝

$$-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{3},$$

որտեղից ստանում ենք հակադարձ քառակուսիների շարքի գումարը (արդեն երկրորդ անգամ)՝

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}:$$

Իսկ x^3-ի գործակիցների հավասարեցումից ստանում ենք՝

$$-\frac{2}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=-\frac{1}{45}$$

հավասարությունը, որտեղից՝

$$\boxed{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}:} \tag{2.36}$$

Մաս III. Ֆիզիկական խնդիրներ, որոնք լուծվում են գումարների հաշվմամբ

Դեպի ֆիզիկա տանող ուղին
անցնում է մաթեմատիկայով…
Ռիչարդ Ֆեյնման

Ներածություն

Եվ իրոք, ինչպես նշված է բնաբանում, ֆիզիկան չի կարելի շարադրել այլ կերպ, քան մաթեմատիկայի լեզվով: Եթե դու, սիրելի ընթերցող, ուզում ես ճանաչել բնությունը, գնահատել նրա գեղեցկությունը, ապա պետք է հասկանաս այն լեզուն, որով խոսում է նա:

Նախորդ դրվագներում մենք քեզ հետ զրուցեցինք այն մեթոդների և հնարների մասին, որոնցով դու արդեն ի զորու ես հաշվելու մի շարք այնպիսի գումարներ (վերջավոր և «անվերջ»), որոնք կիրառվում են ֆիզիկայի շատ խնդիրներում: Այդ խնդիրների մեծ մասը, համոզված ենք, կարող է լուծել (կամ, գոնե, լուծումը հասկանալ) յուրաքանչյուր դպրոցական, բայց կան նաև խնդիրներ, որոնք «հասանելի» են միայն ուսանողներին: Հեղինակները համոզված են, որ ֆիզիկայի այն խնդիրները, որոնք դու կհասկանաս, ընթերցելով այս փոքրիկ գրքույկը, կհետաքրքրեն, հնարավոր է նաև՝ կհրապուրեն քեզ, սիրելի ընթերցող, քանզի դրանք քեզ համար արդեն կլինեն դյուրավ հասկանալի:

Ահա այն ֆիզիկական խնդիրները, որ հեղինակները պատրաստել են քեզ համար: Ուշադիր կարդա ամեն մի խնդիր, նախ փորձիր այն լուծել ինքնուրույն, իսկ չստացվելու դեպքում երբեք մի վհատվիր և նայիր լուծումը: Ընտրված յուրաքանչյուր խնդիր մի ամբողջ աշխարհ է: Համարձակորեն մտի՛ր այդ աշխարհները, մտորի՛ր ամեն մի խնդրի շուրջ, և մենք համոզված ենք, որ այնտեղից դուրս կգաս առավել իմաստացած, քան էիր: Դրանից հեղինակները միայն երախտապարտ կլինեն քեզ:

1. Լիցքավորված հաղորդչի էներգիան

Ինչու՞ է լիցքավորված հաղորդիչն օժտված էներգիայով: Հիշենք, որ էներգիան, անկախ իր տեսակից, բնութագրում է մարմնի՝ աշխատանք կատարելու ունակությունը: Դիցուք՝ հաղորդիչը լիցքավորելու համար կատարվել է ինչ-որ աշխատանք, և, հետևաբար, հաղորդիչը ձեռք է բերել էներգիա: Լիցքավորված հաղորդչի էներգիան պայմանավորված է բոլոր լիցքերն անվերջությունից հաղորդչի մակերևույթ տեղափոխելիս կատարված աշխատանքով:

Ենթադրենք՝ հաղորդչին հաղորդվում է դրական լիցք: Լիցքերի առաջին տարրական բաժինն անվերջությունից հաղորդչի մակերևույթ տեղափոխելն աշխատանք չի պահանջում, քանի որ հաղորդչի պոտենցիալն սկզբում զրո է: Հաղորդչին առաջին բաժին լիցքը հաղորդելուց հետո նրա պոտենցիալը դառնում է զրոյից տարբեր (դրական), որի հետևանքով երկրորդ բաժին լիցքի տեղափոխումն արդեն պահանջում է որոշ աշխատանք: Քանի որ հաղորդչի լիցքի մեծացմամբ նրա պոտենցիալն աճում է, ապա յուրաքանչյուր հաջորդ բաժին լիցքը տեղափոխելիս պետք է կատարվի ավելի և ավելի մեծ աշխատանք: Այդ աշխատանքը ծախսվում է հաղորդչի էներգիան մեծացնելու համար:

Դիցուք՝ անհրաժեշտ է հաղորդչին հաղորդել q լիցք: Վերջինս բաժանենք շատ մեծ թվով փոքր q_0 լիցքերի $\left(\frac{q}{n}=q_0\right)$:

1) Ակներև է, որ առաջին բաժին q_0 լիցքը հաղորդչի մակերևույթ տեղափոխելիս աշխատանք չի կատարվում:

2) Երկրորդ բաժին q_0 լիցքը տեղափոխելիս կատարվում է $\Delta A_1 = q_0\varphi_0$ աշխատանք:

3) Երրորդ բաժին q_0 լիցքը տեղափոխելիս կկատարվի $\Delta A_2 = q_0 2\varphi_0$ աշխատանք:

…………………………

n) n-րդ բաժին q_0 լիցք տեղափոխելիս՝

$\Delta A_{n-1} = q_0(n-1)\varphi_0$ աշխատանք:

Ամբողջ աշխատանքը հաշվելու համար անհրաժեշտ է տարրական աշխատանքները գումարել.

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_{n-1} = q_0\varphi_0\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]:$$

Փակագծերի ներսում 1-ից մինչև $(n-1)$ բնական թվերի գումարն է, որը հեշտ է հաշվել՝ օգտվելով փոքրիկ Գաուսի մեթոդից (տե՛ս (1.1) բանաձևը)՝

$$1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$A = q_0\varphi_0\frac{(n-1)n}{2}:$$

Քանի որ n-ը շատ մեծ է, ապա նրա նկատմամբ 1-ը կարելի է անտեսել: Եվ հաղորդչի էներգիայի համար կստանանք՝

$$W = A = \frac{nq_0 \cdot n\varphi_0}{2} = \frac{q\varphi}{2}$$

բանաձևը, որտեղ $\varphi = n\varphi_0$ հաղորդչի պոտենցիալն է՝ պայմանավորված նրա $q = nq_0$ լիցքով:

Հաշվի առնելով հաղորդչի ունակության, լիցքի և պոտենցիալի միջև $C = \frac{q}{\varphi}$ առնչությունը՝ կարելի է գրել՝

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}:$$

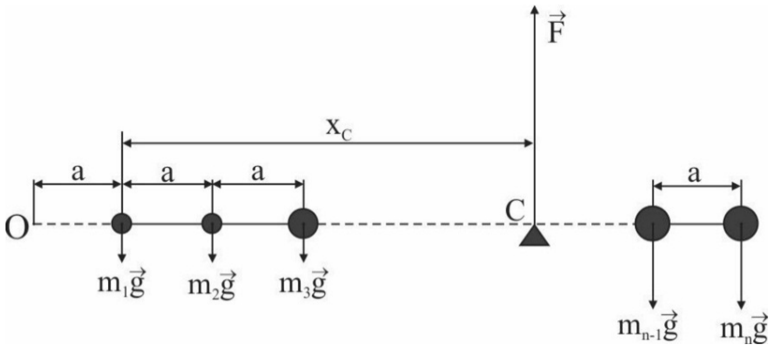
2. Մի գծով դասավորված գնդերի զանգվածների կենտրոնը

n գնդեր, որոնց զանգվածները թվաբանական պրոգրեսիայի՝ իրար հաջորդող անդամներ են, ամրացված են անկշիռ մետաղաձողին այնպես, որ դրանց կենտրոններն իրարից a հեռավորությամբ են: Ապացուցենք, որ համակարգի ծանրության կենտրոնը ամենաթեթև գնդի կենտրոնից հեռու է $\frac{2}{3}L$-ով, որտեղ L-ը մետաղաձողի երկարությունն է:

Ապացուցման համար ենթադրենք, թե գնդերի զանգվածներն են՝ $m_1 = m, \quad m_2 = 2m, \quad m_3 = 3m, \ldots$ $m_{n-1} = (n-1)m, \; m_n = nm,$ որտեղ m-ը՝

$$\div\, m_1, m_2, \ldots, m_n$$

թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունն է՝ $m_2 - m_1 = \cdots = m_n - m_{n-1} = m$: Քանի որ հարևան գնդերն իրարից հեռու են a-ով, ապա ձողի երկարությունը՝ $L = (n-1)a$ (նկ. 3):



Նկ. 3

Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից [12] ընթերցողին հայտնի է, որ եթե իրար հետ կոշտ ամրացված մարմինների համակարգի ծանրության կենտրոնում կիրառենք ուղղաձիգով դեպի վեր ուղղված $\vec{F}$ հավասարակշռող ուժ, ապա համակարգը կգտնվի հավասարակշռության մեջ: Այդ դեպքում բոլոր ուժերի մոմենտների գումարը որևէ կետով (օրինակ՝ ձողի շարունակության վրա գտնվող O կետով) անցնող առանցքի նկատմամբ պետք է հավասար լինի զրոյի: $\vec{F}$ հավասարակշռող ուժը բացարձակ արժեքով հավասար է՝

$$F = m_1 g + \cdots + m_n g = mg + 2mg + \cdots + n \cdot mg = mg(1+2+\cdots+n):$$

Փակագծի ներսի արտահայտությունը 1-ից մինչև n բնական թվերի գումարն է, որը, համաձայն (1.1) բանաձևի, հավասար է $\frac{n(n+1)}{2}$ -ի: Հետևաբար՝

$$F = mg\frac{n(n+1)}{2}: \qquad (3.1)$$

Մյուս կողմից, համաձայն մոմենտների կանոնի՝

$$m_1 g \cdot x_1 + m_2 g \cdot x_2 + \cdots + m_n g \cdot x_n - F \cdot x_C = 0,$$

որտեղից կարող ենք որոշել համակարգի C ծանրության կենտրոնի x_C կոորդինատը՝

$$x_C = \frac{mg(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n)}{F}:$$

Նկատի ունենալով (3.1) առնչությունը՝ x_C -ի համար կունենանք՝

$$x_C = \frac{2mg(a + 2\cdot 2a + 3\cdot 3a + \cdots + n\cdot na)}{n(n+1)mg} = \frac{2a(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{n(n+1)}:$$

(1.5) բանաձևի համաձայն՝

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

հետևաբար՝

$$x_C = \frac{2a \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n(n+1)} = \frac{a}{3}(2n+1):$$

Այսպիսով, ծանրության C կենտրոնի հեռավորությունն ամենաթեթև գնդից կլինի՝

$$l_C = x_C - a = \frac{a}{3}(2n+1) - a = \frac{a}{3}(2n+1-3) =$$
$$= \frac{a}{3}(2n-2) = \frac{2a}{3}(n-1) = \frac{2L}{3},$$

որն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

3. Ծանր զսպանակից կախված ծանրոցի Սեփական տատանումների պարբերությունը

Զսպանակավոր ճոճանակի սեփական տատանումների պարբերության

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.2}$$

բանաձևն արտածելիս (k-ն զսպանակի կոշտությունն է) ենթադրվում էր, որ զսպանակի m' զանգվածն անհամեմատ փոքր է նրանից կախված ծանրոցի m զանգվածից՝ $m' << m$, այլ կերպ ասած՝ զսպանակը համարվում էր անկշռելի: Իսկ եթե զսպանակը ծա՞նր է, այսինքն՝ նրա զանգվածը համեմատելի է ծանրոցի զանգվածի հե՞տ: Այդ դեպքում, բնականաբար, զսպանակավոր ճոճանակի տատանումների պարբերությունն այլևս չի կարելի որոշել (3.2) բանաձևով: (Հիշեցնենք, որ (3.2) բանաձևն արտածված է «ավանդական» մեթոդով՝ Նյուտոնի 2-րդ օրենքի օգտագործմամբ:)

Ծանր զսպանակի դեպքում նրանից կախված ծանրոցի տատանումների պարբերությունը մենք կհաշվարկենք այլ եղանակով, որի հիմքում էներգիայի պահպանման և փոխակերպման օրենքն է: Այդ եղանակը հայտնի է «էներգիական մեթոդ» անվանմամբ, և ավելի մատչելի է, քան ավանդականը, քանի որ, ի տարբերություն վերջինիս, հիմնվում է ոչ թե վեկտորական, այլ սկալյար մեծությունների վրա [12,13]:

Այդ մեթոդով, օրինակ, նկ. 4-ում պատկերված ծանր զսպանակից կախված ծանրոցի սեփական տատանումների հաճախությունը (կամ պարբերությունը) որոշելու համար կատարենք հետևյալ քայլերը: x-երի առանցքն ուղղենք ուղղաձիգով դեպի ներքև: Այդ դեպքում զսպանակավոր ճոճանակի տատանումները կնկարագրվեն

$$x = x(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.3}$$

ներդաշնակ ֆունկցիայով, որտեղ φ_0-ն տատանումների սկզբնական փուլն է, x-ը՝ ծանրոցի (որը համարում ենք նյութական կետ) շեղումն է հավասարակշռության դիրքից:

$x(t)$ ֆունկցիան ածանցելով ըստ t-ի՝ կգտնենք արագության կախումը ժամանակից արտահայտող բանաձևը՝

$$v = v(t) = v_0 cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

որտեղ

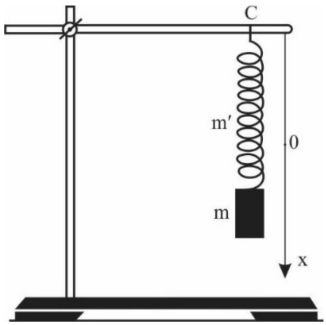
$$v_0 = A\omega_0 \tag{3.4}$$

մեծությունը v արագության ներդաշնակ տատանումների լայնույթն է: (3.3) և (3.4) առնչությունները հնարավորություն են տալիս որոշելու տատանումների հաճախությունը (կամ պարբերությունը):

Իրոք, իրար հավասարեցնելով ճոճանակի պոտենցիալ և կինետիկ էներգիաների առավելագույն արժեքները, ստանում ենք՝

$$E_{\text{պmax}} = E_{\text{կmax}} \Rightarrow \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

կամ $\quad kA^2 = m\omega_0^2 A^2,$



Նկ. 4

որտեղից էլ միանգամից որոշվում է ω_0-ն (կամ T-ն):

Այժմ կրկին վերադառնանք մեր «ծանր» ճոճանակին:

Դիցուք՝ ծանրոցը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ ω_0 սեփական հաճախությամբ և A

լայնույթով: Այդ դեպքում զսպանակի յուրաքանչյուր գալար, որը ճոճանակի դադարի վիճակում կախման C կետից x հեռավորությամբ դիրքում է, ունի

$$a = \frac{x}{l} A$$

տատանումների լայնույթ, որտեղ l-ն ամբողջ զսպանակի երկարությունն է դադարի վիճակում:

Եթե զսպանակն ունի N գալար, ապա, կախման կետից հաշված i-րդ գալարի տատանումների լայնույթը՝

$$a_i = i \frac{A}{N}:$$

Զսպանակի կինետիկ էներգիան, ակներև է, հավասար է բոլոր գալարների կինետիկ էներգիաների գումարին: Քանի որ յուրաքանչյուր գալարի զանգվածը $\frac{m'}{N}$ է, ապա i-րդ գալարի կինետիկ էներգիան կլինի

$$E_{\text{կ}i} = \frac{1}{2} \frac{m'}{N} \upsilon_i^2,$$

որտեղ υ_i-ն i-րդ գալարի արագությունն է:

Երբ ծանրոցն անցնում է հավասարակշռության դիրքով, զսպանակի կինետիկ էներգիան առավելագույնն է՝

$$E'_{\text{կ}\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{m'}{N} \upsilon_{0i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{m'}{N} \omega_0^2 a_i^2 = \frac{m'}{2N} \frac{\omega_0^2 A^2}{N^2} \sum_{i=1}^{N} i^2 :$$

Համաձայն բնական թվերի քառակուսիների գումարի (1.5) բանաձևի՝

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

ուստի՝

$$E'_{\text{կmax}} = \frac{m'\omega_0^2 A^2}{2N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} :$$

Եթե գալարների թիվը շատ մեծ է՝ $N >> 1$, ապա

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \approx \frac{N \cdot N \cdot 2N}{6} = \frac{N^3}{3},$$

և զսպանակի առավելագույն կինետիկ էներգիան՝

$$E'_{\text{կmax}} \approx \frac{1}{2}\frac{m'}{3}\omega_0^2 A^2 :$$

Հետևաբար՝ «բեռ+զսպանակ» համակարգի առավելագույն կինետիկ էներգիան՝

$$E_{\text{կmax}} \approx \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 + \frac{1}{2}\frac{m'}{3}\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 A^2 \left(m + \frac{m'}{3}\right):$$

Առավելագույն ձգման (կամ սեղմման) պահին զսպանակի պոտենցիալ էներգիան՝

$$E_{\text{կmax}} = \frac{kA^2}{2} :$$

$$E_{\text{կmax}} = E_{\text{պmax}} \Rightarrow kA^2 = \left(m + \frac{m'}{3}\right)\omega_0^2 A^2, \text{ կամ } \omega_0^2 = \frac{k}{m + m'/3} :$$

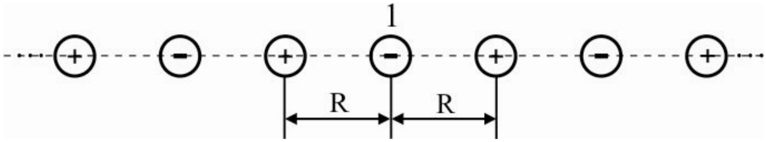
Հետևաբար, տատանումների պարբերությունը՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m'/3}{k}}\,:$$

Ակնհայտ է, որ եթե զսպանակի զանգվածը շատ փոքր է ծանրոցի զանգվածից՝ $m' << m$, ապա կարող ենք օգտվել (3.2) բանաձևից:

4. Բյուրեղում իոնների էլեկտրաստատիկ Փոխազդեցության պոտենցիալ էներգիան

Հայտնի է, որ իոնային բյուրեղներում քիմիական կապը պայմանավորված է տարանուն իոնների միջև էլեկտրաստատիկ (կուլոնյան) փոխազդեցությամբ: Այդպիսի իոններ առաջանում են արժեքական էլեկտրոնների՝ մի ատոմից մյուսն անցնելու հետևանքով: Իոնային բյուրեղի օրինակ է կերակրի աղը ($NaCl$), որի բյուրեղացանցը կազմված է միմյանց հերթագայող դրական և բացասական իոններից, որոնք օժտված են գնդային համաչափությամբ. կերակրի աղի բյուրեղում այդ իոններն են նատրիումի (Na^{+}) և քլորի (Cl^{-}) իոնները: Այժմ պատկերացնենք նմանօրինակ բյուրեղների համակցություն, որը, սակայն, իրենից ներկայացնում է միաչափ, բավականաչափ երկար շղթա (նկ. 5), և հաշվենք այդ շղթայի պոտենցիալ էներգիան:



Նկ. 5

Ֆիզիկայի դպրոցական դասագրքից [14] ընթերցողը գիտե, որ N լիցքից կազմված համակարգի պոտենցիալ էներգիան արտահայտվում է

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i q_i,$$

առնչությամբ, որտեղ φ_i-ն $(i=1,2,\ldots,N)$, բացի i-րդից, մնացած $N-1$ կետային լիցքերի ստեղծած էլեկտրական դաշտի պոտենցիալն է q_i լիցքի զբաղեցրած կետում:

Համաձայն վերադրման սկզբունքի [13]՝

$\varphi_i = \sum_{j\neq i}\varphi_j = \sum_{j\neq i} k\frac{q_j}{r_{ij}},$ հետևաբար՝

$$W = \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}: \tag{3.5}$$

Քանի որ կամայական հարևան իոնների հեռավորությունները նույնն են, ապա կարող ենք կատարել հետևյալ նշանակումը՝ $r_{ij} = Rn, \quad n = 1,2,\ldots:$ Իոնների լիցքերի բացարձակ արժեքներն իրար հավասար են՝

$|q_i| = |q_j| = e \quad (e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Կլ), ուստի, նկ. 5-ին նույնիսկ հպանցիկ նայելուց հետո նկատում ենք, որ $q_i q_j = -e^2$, երբ $n = 1,3,5,\ldots$ և $q_i q_j = e^2$, երբ $n = 2,4,6,\ldots$: Հետևաբար, եթե n-ն իր արժեքներն ընդունում է հերթականորեն, ապա կարելի է գրել, որ.

$$\sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \sum_j \frac{q_i q_j}{Rn} = \frac{2e^2}{R}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots\right) =$$

$$= -\frac{2e^2}{R}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right):$$

2 գործակիցը երևան եկավ այն պատճառով, որ յուրաքանչյուր r_{ij} հեռավորությունում կա նույն նշանի երկու իոն. մեկը՝ տրված 1 իոնից աջ, մյուսը՝ ձախ: Փակագծերի ներսում գումարի փոխարեն գրեցինք անվերջ «գումար» (շարք), քանզի նկատի ունեցանք, որ, ըստ պայմանի, միաչափ շղթան բավականաչափ երկար է, ինչը նշանակում է, որ իոնների թիվը շատ մեծ է: Ինչպես ընթերցողը նկատեց, այդ շարքը նշանափոխ հարմոնիկ շարքն է, ուստի, համաձայն (2.18) բանաձևի՝

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = ln2:$$

Հետևապես՝

$$W=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{2e^2}{R}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\right]=$$

$$=-\frac{ke^2}{R}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)\cdot N=-\frac{ke^2}{R}Nln2:$$

5. Լիցքավորված գնդի սեփական էլեկտրական էներգիան

Դիցուք՝ q լիցքը հավասարաչափ բաշխված է R շառավղով գնդի ողջ ծավալով: Հարկավոր է որոշել գնդի W սեփական էլեկտրական էներգիան, ինչպես նաև գնդի ներսում տեղափակված W_1 էներգիայի հարաբերությունը գնդից դուրս էլեկտրական դաշտի W_2 էներգիային:

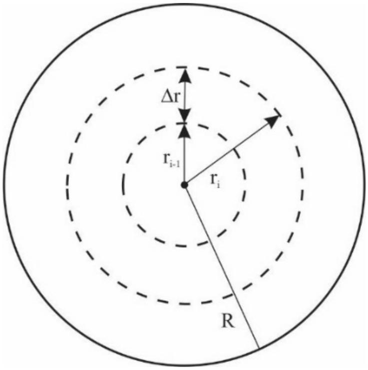
Դպրոցական դասագրքից [14] գիտեք, որ գնդի ներսում և գնդից դուրս էլեկտրական դաշտի լարվածությունները համապատասխանաբար հավասար են՝

$$E_1=k\frac{q}{R^3}r,\qquad r\leq R,$$

$$E_2=k\frac{q}{r^2},\qquad r\geq R:$$

Գնդի ներսում էլեկտրական դաշտի էներգիան հաշվարկելու համար գունդը մտովի բաժանենք հա-

վասար հաստությամբ բավականաչափ բարակ համակենտրոն թաղանթների այնպես, որ յուրաքանչյուր թաղանթի ներսի կետերում էլեկտրական դաշտի լարվածության արժեքը կարելի լինի համարել գրեթե նույնը: Դիցուք՝ թաղանթների թիվը n է: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր թաղանթի հաստությունը՝
$\Delta r = r_i - r_{i-1} = R/n, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, իսկ i-րդ թաղանթի ծավալը՝ $\Delta V_i \approx 4\pi r_i^2 \cdot \Delta r$ (նկ.6):



Նկ. 6

Հետևաբար՝

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{1i}^2 \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(k\frac{q}{R^3} r_i \right)^2 \cdot 4\pi r_i^2 \Delta r :$$

Քանի որ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k}$, $\Delta r = \dfrac{R}{n}$, ապա վերջին արտահայտությունը կարելի է շարունակել այսպես՝

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi k} \cdot \frac{k^2 q^2 r_i^2}{R^6} \cdot 4\pi r_i^2 \cdot \frac{R}{n} = \frac{k}{2} \frac{q^2}{R^5} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^4 =$$

$$= \frac{kq^2}{2R^5 n}(r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_n^4):$$

Նկատի ունենալով, որ

$$r_0 = 0, \qquad r_1 = \frac{R}{n}, \qquad r_2 = 2 \cdot \frac{R}{n}, \ldots, \qquad r_n = n\frac{R}{n},$$

կստանանք՝

$$W_1 = \frac{k}{2} \frac{q^2}{R^5} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{R}{n} \right)^4 + \left(2\frac{R}{n} \right)^4 + \cdots + \left(n\frac{R}{n} \right)^4 \right) =$$

$$= \frac{kq^2}{2R} \frac{1}{n^5} (1^4 + 2^4 + \cdots + n^4):$$

Համաձայն (1.12) բանաձևի՝

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1),$$

ուստի՝

$$W_1 = \frac{kq^2}{2R} \cdot \frac{1}{30} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{n^5} =$$

$$= \frac{kq^2}{60R} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(3 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right):$$

Շատ մեծ n-երի դեպքում՝ $\frac{1}{n} << 1$, հետևապես՝

$$W_1 = \frac{kq^2}{60R} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{kq^2}{10R}:$$

Համապատասխանաբար, W_2-ի համար կունենանք՝

$$W_2 \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{kq}{r_i^2} \right)^2 \cdot 4\pi r_i^2 \Delta r = \frac{kq}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta r}{r_i^2} :$$

Երբ n-ը բավականաչափ մեծ է, իսկ $\Delta r = r_i - r_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $r_0 = R$, r_i^2-ն փոխարինելով $r_{i-1} \cdot r_i$-ով, կստանանք՝

$$W_2 = \frac{kq^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i \cdot r_{i-1}} = \frac{kq^2}{2} \left(\frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} + \cdots + \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1} r_n} \right) =$$

$$= \frac{kq^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_n} \right) :$$

Շատ մեծ n-երի դեպքում՝ $r_n \to \infty$, ուստի՝ $\dfrac{1}{r_n} \to 0$, այնպես որ

$$W_2 = \frac{kq^2}{2R} :$$

Հետևաբար՝

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3}{5} \frac{kq^2}{R}, \quad \frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{5} :$$

Ուշագրավ է, որ W_1/W_2 հարաբերությունը կախված չէ գնդի շառավղից:

6. Հարմոնիկ միջինը ֆիզիկայում (1):

Լիցքավորված հաղորդիչ գնդերի պոտենցիալը

Դիցուք՝ r_1 և r_2 շառավիղներով երկու հաղորդիչ գնդեր ունեն q_1 և q_2 լիցքեր և միմյանցից այնքան հեռու են, որ նրանցում լիցքերի վերաբաշխում տեղի չի ունենում: Միացնելով գնդերը հաղորդալարով՝ հաշվենք համակարգի φ պոտենցիալը, երբ. ա) գնդերի լիցքերը հավասար են, իսկ շառավիղները՝ տարբեր, բ) գնդերի շառավիղները հավասար են, իսկ լիցքերը՝ տարբեր:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից [14], առանձնացված հաղորդչի պոտենցիալը՝ $\varphi_0 = q/C$: Եթե հաղորդիչը r շառավղով գունդ է, ապա նրա էլեկտրաունակությունը՝ $C = r/k$, որտեղ k-ն Կուլոնի հաստատունն է՝ $k = 9 \cdot 10^9$ մ/Ֆ: Հետևաբար՝ $\varphi_0 = kq/r$, այնպես որ գնդերից յուրաքանչյուրի պոտենցիալը, նախքան հաղորդալարով իրար միացնելը, հավասար է՝

$$\varphi_1 = kq_1/r_1, \quad \varphi_2 = kq_2/r_2 : \qquad (3.6)$$

Հաղորդալարով միացնելուց հետո լիցքը վերաբաշխվում է գնդերի միջև այնպես, որ վերջիններիս պոտենցիալները հավասարվեն: Նշանակելով այդ ընդհանուր պոտենցիալը φ-ով և նկատի առնելով, որ գնդերի գումարային լիցքը պահպանվում է, կարող ենք գրել՝

$$\varphi = \frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2},$$

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2', \tag{3.7}$$

որտեղ q_1'-ը և q_2'-ը գնդերի լիցքերն են վերաբաշխումից հետո, որոնք կարող ենք որոշել (3.6) առնչություններից՝

$$q_1' = \frac{r_1\varphi}{k}, \qquad q_2' = \frac{r_2\varphi}{k}: \tag{3.8}$$

ա) դեպքում $(q_1 = q_2 = q, \quad r_1 \neq r_2)$ (3.7) հավասարության փոխարեն, հաշվի առնելով (3.8) առնչությունները, ստանում ենք՝

$$2q = \frac{\varphi}{k}(r_1 + r_2):$$

(3.6) առնչություններից որոշելով գնդերի r_1 և r_2 շառավիղները՝ $r_1 = kq/\varphi_1$, $r_2 = kq/\varphi_2$, վերջին հավասարության փոխարեն կունենանք՝

$$2q = \frac{\varphi}{k} \cdot kq\left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2}\right),$$

որտեղից՝

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}\right),\quad \text{կամ}\quad \varphi=\frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1+\varphi_2}:$$

բ) դեպքում ($q_1 \neq q_2, \quad r_1 = r_2 = r$), ինչպես երևում է (3.8) առնչություններից, վերաբաշխումից հետո գնդերի լիցքերը նույնպես հավասարվում են՝

$$q_1' = q_2' = r\varphi/k:$$

(3.6) առնչություններից որոշելով գնդերի լիցքերը նախքան վերաբաշխումը՝ $q_1 = r\varphi_1/k, \quad q_2 = r\varphi_2/k,$ և նկատի ունենալով վերոգրյալը, (3.7) հավասարության փոխարեն կարող ենք գրել՝

$$\frac{r}{k}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{2r\varphi}{k},$$

որտեղից՝

$$\varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}:$$

Ստացված արդյունքներից հետևում է, որ պայմաններից կախված՝ գնդերի համակարգի φ պոտենցիալը մի դեպքում հավասար է առանձնացված գնդերի φ_1 և φ_2 ***պոտենցիալների հարմոնիկ միջինին,*** մյուս դեպքում՝ ***թվաբանական միջինին:***

Հետաքրքիր է իմանալ

Պատմական ակնարկ

Միջին մեծությունները հայտնի են եղել դեռևս անտիկ շրջանի մաթեմատիկոսներին և, մասնավորապես, մեծ դեր են խաղացել երաժշտության տեսության մեջ: Հույն մաթեմատիկոս Արքիտասի (մ.թ.ա. 428-365 թթ.) աշխատություններում երկու (դրական) թվերի m թվաբանական միջինը, g երկրաչափական միջինը և h հարմոնիկ միջինը սահմանվում էին, համապատասխանաբար, որպես թվաբանական, երկրաչափական և հարմոնիկ համեմատությունների միջին անդամներ՝

$$a - m = m - b,$$

$$a : g = g : b,$$

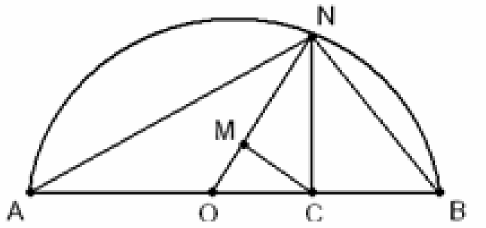
$$(a - h) : a = (h - b) : b :$$

Այս հավասարություններից ստանում ենք՝

$$m = \frac{a+b}{2}, \qquad g = \sqrt{ab}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} :$$

Ավանդության համաձայն, հարմոնիկ միջինը ներմուծել է Պյութագորասը (մ.թ.ա. VI դար):

Հին հույն մաթեմատիկոսներին հայտնի էին նաև տրված a և b հատվածների միջոցով նշյալ միջինների կառուցման մի քանի եղանակներ: Պապպոս Ալեքսանդրացու (մ.թ. III–IV դդ.) «Մաթեմատիկական ժողովածու» աշխատության մեջ, օրինակ, նկարագրված է, թե ինչպես վերոնշյալ միջինները կառուցել միևնույն երկրաչափական պատկերի ներսում, ինչը թույլ է տալիս նաև ապացուցելու այդ միջինների կապն արտահայտող անհավասարությունները: Այդպիսի մի կառուցման օրինակ ցույց է տրված նկ. 7-ում:



Նկ. 7

AB հատվածի՝ որպես տրամագծի, վրա կառուցված է կիսաշրջանագիծ, որի կենտրոնը O կետն է: Տրամագիծը կամայական C կետով տրոհված է երկու հատվածների՝ $AC = a$ և $CB = b$, հետևաբար, շրջանագծի շառավիղը հավասար է AC և CB հատվածների թվաբանական միջինին, այսինքն՝ $\frac{a+b}{2}$-ի: C կետում AB ուղղին տարված է ուղղահայաց, որի հատման կետը շրջանագծի հետ նշված է N-ով՝ $CN \perp AB$:

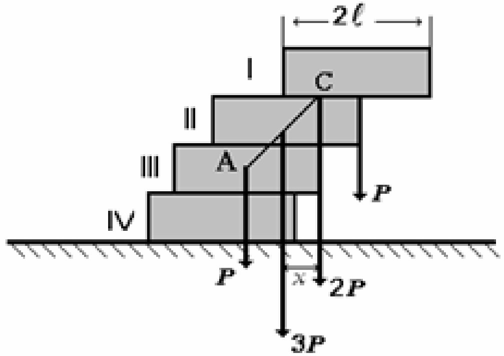
ANB ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ($\angle ANB = 90^\circ$ որպես տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն) NC բարձրությունը AC և CB հատվածների միջին համեմատականն է՝ $NC = \sqrt{ab}$: Դիցուք՝ NM-ը NC-ի պրոյեկցիան է NO-ի վրա: Այդ դեպքում կարող ենք գրել՝ $NC^2 = NM \cdot NO$, այն է՝ $ab = NM \cdot \frac{a+b}{2}$, որտեղից ստանում ենք՝ $NM = \frac{2ab}{a+b}$, ինչը նշանակում է, որ NM-ը AC և CB հատվածների հարմոնիկ միջինն է: Քանի որ որևէ կետից ուղղին տարված ուղղահայացը միշտ փոքր է թեքից, ապա, ինչպես երևում է նկ. 7-ից, $NM < NC < ON$: Եթե $AC = CB$, ապա O և C կետերը համընկնում են, հետևաբար նաև՝ համընկնում են բոլոր դիտարկվող հատվածները՝ $NM = NC = ON$: Այսպիսով, կամայական դրական a և b թվերի համար ճշմարտացի են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$$

ընդ որում՝ հավասարությունները տեղի ունեն այն դեպքում, երբ $a = b$:

7. Հարմոնիկ միջինը ֆիզիկայում (2): Աղյուսների խնդիրը

Որմնադիրը շենքի քիվը շարելու համար պետք է օգտագործի 4 աղյուս, այնպես, որ աղյուսներն իրար վրա դրվելուց ելուստ ունենան: Ինչքա՞ն պետք է լինեն ելուստների առավելագույն երկարությունները, որոնց դեպքում աղյուսները դեռ կգտնվեն հավասարակշռության մեջ, եթե աղյուսի երկարությունը $2l$ է, և շաղախ չի օգտագործվում:



Նկ. 8

Եթե աղյուսները համասեռ են, ապա ծանրության կենտրոնը աղյուսի եզրից ունի l հեռավորություն: Ուստի վերին աղյուսի թույլատրելի ելուստը կլինի l: I և II աղյուսների ընդհանուր ծանրության կենտրոնը կգտնվի II աղյուսի ծայրից $l/2$ չափով հեռացած C

կետում: Վերին երեք աղյուսների ծանրության կենտրոնը կգտնվի AC հատվածի վրա, որտեղ A կետը III աղյուսի կենտրոնն է (անկյունագծերի հատման կետը): AC-ի վրա ծանրության կենտրոնը կարելի է որոշել $P(l-x)=2Px$ առնչությունից (P-ն աղյուսի կշիռն է), որտեղից կստանանք՝ $x=l/3$, հետևաբար՝ III աղյուսի ելուստը կլինի $l/3$ (նկ. 8): Ուշադրություն դարձրեք ստացված l***,*** $l/2$ ***և*** $l/3$ ***թվերին,*** որոնք հարմոնիկ շարքի առաջին երեք անդամներն են, այսինքն՝ $l/2$ ***-ը*** l ***-ի և*** $l/3$ ***-ի հարմոնիկ միջինն է***:

8. Հարմոնիկ թվերը ֆիզիկայում: Անձրևորդի խնդիրը

Անձրևորդը 1 մետր երկարությամբ ռետինե քուղի մի ծայրից մյուսը դանդաղ առաջ է շարժվում՝ 1 սմ-ն անցնելով 1 րոպեում: Ինչ-որ մեկը, որին անվանենք K, և որի միակ նպատակն անձրևորդին խանգարելն է, յուրաքանչյուր 1 րոպեն լրանալուց հետո, ռետինե քուղը ծայրերից ձգում է՝ ակնթարթորեն մեծացնելով քուղի երկարությունը ևս 1 մ-ով: 1-ին րոպեից հետո անձրևորդն անցած է լինում 1 սմ և նրան մնում է անցնելու

99 սմ, իսկ 2-րդ րոպեից հետո նրա անցած ճանապարհը դառնում է 2 սմ, բայց անցնելիքը մեծանում է՝ դառնալով հավասար 198 սմ-ի, և այդպես շարունակ: Այսպիսով, որքան անձրևորդն առաջ է շարժվում, այնքան ավելի է հեռանում նրանից նպատակակետը: Կհասնի՞ արդյոք իր նպատակին անձրևորդը:

Երբ K-ն ձգում է ռետինե քուղը, ապա այն մասը, որտեղ գտնվում է անձրևորդը, մնում է իր տեղում նույնությամբ: Հետևաբար, 1-ին րոպեի ընթացքում անձրևորդը կանցնի ճանապարհի $\frac{1}{100}$ մասը, 2-րդ րոպեի ընթացքում՝ $\frac{1}{200}$ մասը, 3-րդ րոպեի ընթացքում՝ $\frac{1}{300}$ մասը և այդպես շարունակ: Ռետինե քուղի այն մասը, որը կանցնի անձրևորդը n րոպե հետո, հավասար կլինի՝

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 100}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{H_n}{100},$$

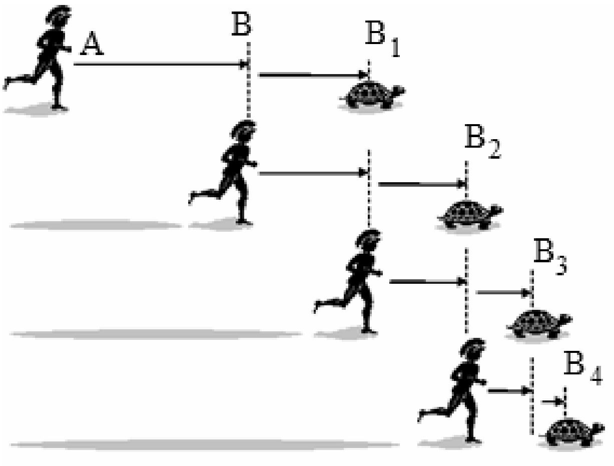
որտեղ H_n-ը հարմոնիկ շարքի n-րդ մասնակի գումարն է: Այսպիսով, անձրևորդը կհասնի իր նպատակին, հենց որ H_n-ը գերազանցի 100-ը:

Նույն դատողությունները կարելի է անել նաև այն թրթուրի համար, որը, ի տարբերություն անձրևորդի , 1 րոպեում անցնում է 50 սմ: Հետևաբար, n րոպե հետո թրթուրը կանցնի ռետինե քուղի $\frac{H_n}{2}$ երկարությունը, այսինքն՝ թրթուրը նպատակին կհասնի նախքան n-ը կգերազանցի 4-ը, քանի որ $H_4 > 2$:

9. Աքիլեսը և կրիան

Այս խնդրի, իրականում՝ պարադոքսի հեղինակն է Զենոն Էլեացին (մ.թ.ա. 490–430), ով, Արիստոտելի բնորոշմամբ, դիալեկտիկայի հայրն է, սակայն դիալեկտիկան ծառայեցնում է ոչ իր նպատակին, այլ սոփեստության (հունարեն σοφισμα – կեղծ եզրահանգում): Զենոնը կասկածանքի է ենթարկում տարածությունը և մերժում շարժումը: Վերջինիս բացասումը հաստատելու համար իբրև ապացույց Զենոնը բերում է Աքիլեսի և կրիայի օրինակը, որը հայտնի է իբրև Աքիլեսի և կրիայի պարադոքս: (Աքիլեսը Տրոյական պատերազմի և, առհասարակ, հունական դիցաբանության մեծագույն հերոսներից է: Պատմում են, որ նա, դեռևս երեխա ժամանակ, այնքան արագ էր վազում, որ կարող էր անցնել եղջերվից, և այնքան ուժեղ էր, որ կարող էր առյուծ սպանել:) Պարադոքսը ներկայացնենք այնպես, ինչպես շարադրել է մ.թ. VI դարի հույն գիտնական Սիմպլիկիոսը:

Արագավազ Աքիլեսը, ըստ Զենոնի տրամաբանության, երբեք չի կարող վազանցել կրիային, որին հետապնդում է, քանի որ նախքան նրան հասնելը, նա պետք է հասնի այն կետին, որտեղից կրիան սկսել է իր շարժումը: Բայց այդ ընթացքում կրիան կանցնի ևս մի որոշ ճանապարհ, որը թեպետ փոքր է այն ճանապարհից, որ անցնում է Աքիլեսը, այդուհանդերձ թույլ է տալիս պնդելու, որ կրիան, միևնույն է, առաջ է ընկել տրոյական հերոսից (նկ. 9): Դիցուք՝ Աքիլեսը երկու անգամ արագ է վազում կրիայից, որը գտնվում է նրանից առաջ: Ենթադրենք, թե Աքիլեսը 100 մետր հետ է մնացել կրիայից. եթե նա անցնի 100 մետր առաջ, ապա կրիան կկտրի 100 մետրի կեսին հավասար հեռավորություն, իսկ եթե Աքիլեսն անցնի այդ հեռավորությունը, կրիան նրանից առաջ կընկնի 100 մետրի քառորդին հավասար հեռավորություն և այդպես շարունակ: Այլ կերպ ասած, արագավազ Աքիլեսը, միևնույն է, երբեք չի կարող հասնել կրիային:



Նկ. 9

Խնդիրը նկարագրենք ավելի պատկերավոր: Եթե Աքիլեսն A դիրքից դուրս գա, այդ պահին կրիան կշարժվի B դիրքից: Եթե Աքիլեսը հասնի B_1 դիրքին, կրիան հասած կլինի B_2 դիրքը, և այսպես շարունակ Աքիլեսը կհետապնդի կրիային, անսահմանորեն կմոտենա, բայց երբեք էլ չի հասնի նրան, քանի որ, ***ըստ Զենոնի, չի կարելի անվերջ հեռավորությունն անցնել վերջավոր ժամանակում:***

Ճի՞շտ էր, արդյոք, տրամաբանում Զենոնը: Ըստ նրա՝ կրիային հասնելու համար Աքիլեսը պետք է հաղթահարեր անվերջ մեծ թվով ճանապարհի տեղամասեր, որոնք անցնելու համար նա պետք է ծախսեր նույնպես անվերջ մեծ թվով ժամանակահատվածներ, որոնց գումարը, ըստ Զենոնի, անվերջ մեծ է: Բայց ի՞րոք այդպես է: Զենոնն անտիկ (ինչու չէ, նաև՝ ժամանակակից) ընթերցողին զգում է «ծուղակը» և կարողանում է նրան համոզել իր տրամաբանության ճշմարտացիությունը, թեպետ ընթերցողը համոզված էր, որ արագավազ Աքիլեսն ի վերջո ոչ միայն կհասնի, այլև նույնիսկ առաջ կանցնի դանդաղաշարժ կրիայից:

Ստացված պարադոքսը հանգուցալուծելու համար այն վերաձևակերպենք՝ «թարգմանելով» ժամանակակից լեզվի, իսկ դրա համար հարկավոր է խնդրի մեջ օգտագործել «արագություն» ֆիզիկական մեծությունը, որն անծանոթ էր Զենոնին (ինչպես նաև անտիկ շրջանի հույն գիտնականներին): Դիցուք՝ Աքիլեսը վազում է հաստատուն v արագությամբ, իսկ կրիան՝ երկու անգամ դանդաղ, այսինքն՝ $\frac{v}{2}$ արագությամբ: Ենթադրենք նաև, որ «մրցման» սկզբնապահին Աքիլեսը կրիայից հեռու է s-ով, որն անցնելու համար Աքիլեսից կպահանջվի $t_1 = \frac{s}{v}$ ժամանակ: Կրիան այդ ընթացքում կանցնի $\frac{s}{2}$ ճանապարհ, որը հաղթահարելու համար Աքիլեսից պահանջվող ժամանակը կլինի՝ $t_2 = \frac{s}{2v}$, և այսպես շարունակ: Հետևաբար, կրիային հասնելու համար անհրաժեշտ ժամանակը հավասար կլինի $\sum_{i=1}^{\infty} t_i$ շարքի գումարին՝

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{s}{v} + \frac{s}{2v} + \frac{s}{4v} + \cdots =$$
$$= \frac{s}{v}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right):$$

Փակագծերի ներսում գրված շարքի անդամները $\frac{1}{2}$ հայտարարով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներն են, հետևաբար, համաձայն (2.12) բանաձևի՝

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2,$$

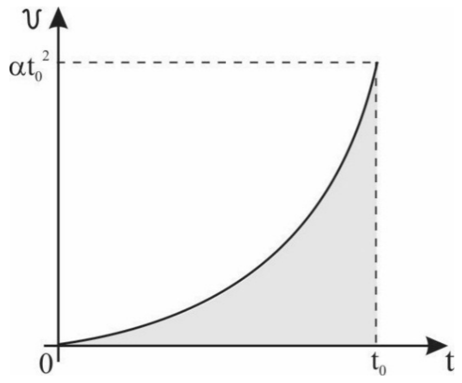
և որոնելի t ժամանակը կլինի՝ $t = \frac{2s}{v}$: Մասնավորապես, եթե $s = 100$ մ, $v = 10$ մ/վ, ապա Աքիլեսը կրիային կհասնի $t = \frac{2 \cdot 100}{10} = 20$ վ-ում: Ահա այսպես: Երբեմն, իրոք, կարելի է անվերջ շատ տեղամասերից կազմված ճանապարհին անցնել վերջավոր ժամանակում:

10. Փոփոխական արագությամբ շարժման ճանապարհի հաշվումը

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, որում նույնպես օգտագործվում է 1-ից մինչև n բնական թվերի քառակուսիների գումարն արտահայտող (1.5) բանաձևը: Իսկ խնդիրն այսպիսին է.

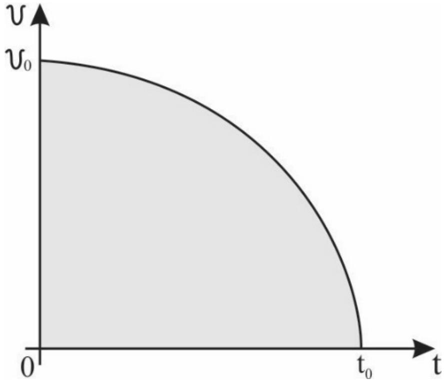
$t=0$ պահին մարմինը, դուրս գալով կոորդինատների սկզբնակետից, շարժվում է x-երի առանցքի դրական ուղղությամբ: Մարմնի արագությունը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է հետևյալ օրենքով.

ա. $v=\alpha t^2$, որտեղ α-ն մի որոշ դրական հաստատուն է: Պահանջվում է որոշել մարմնի անցած s ճանապարհը $t=0$-ից մինչև $t=t_0$ պահին ընկած ժամանակամիջոցում (նկ. 10):



Նկ. 10

բ. $v = v_0 - \alpha t^2$, որտեղ v_0-ն $t = 0$ պահին մարմնի արագությունն է: Այս անգամ անհրաժեշտ է պարզել, թե ի՞նչ ճանապարհ կանցնի մարմինը մինչև կանգ առնելը (նկ. 11):



Նկ. 11

Խնդրի երկու պահանջներում էլ $v(t)$ կախման կորն իրենից ներկայացնում է պարաբոլի մի որոշ աղեղ: Առաջին պահանջին համապատասխանող պարաբոլի աղեղը պատկերված է նկ. 10-ում, իսկ երկրորդին համապատասխանող աղեղը՝ նկ. 11-ում:

Դպրոցական դասընթացից [12] դուք գիտեք, որ եթե տրված է $v(t)$ կախման գրաֆիկը t_1-ից մինչև t_2 ժամանակային միջակայքում, ապա վերջինիս միջոցով կարելի է որոշել մարմնի անցած s ճանապարհն այդ ընթացքում: Դրա համար հարկավոր է հաշվել $v(t)$

գրաֆիկի տակ ընկած պատկերի մակերեսը, որն էլ թվապես հավասար է s ճանապարհին:

10-րդ և 11-րդ նկարներում այդ պատկերները կորագիծ «եռանկյուններ» են (նկարներում այդ եռանկյուններն մգացված են):

Նախ հաշվենք նկ. 10-ում պատկերված կորագիծ «եռանկյան» մակերեսը: Դրա համար դիտարկենք հետևյալ մաթեմատիկական խնդիրը. ***որոշել*** $[0,a]$ ***միջակայքում*** $y=x^2$ ***պարաբոլի աղեղով, աբսցիսների առանցքով և*** $x=a$ ***ուղղով սահմանափակված կորագիծ «եռանկյան» մակերեսը*** (նկ. 12): Դա անելու համար $[0,a]$ միջակայքը

$$x=h,\ 2h\ 3h,\ldots,nh=a$$

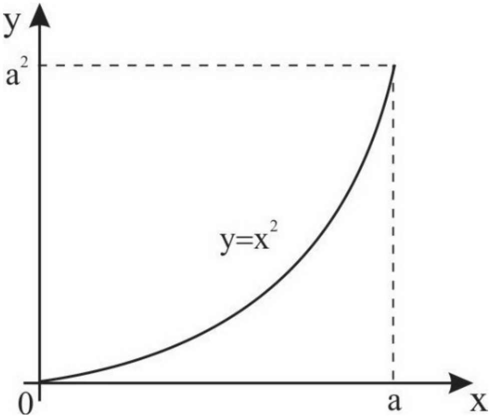
կետերով տրոհենք n թվով բավականաչափ փոքր տեղամասերի և այդ տարրական տեղամասերի՝ որպես հիմքերի, վրա կառուցենք ուղղանկյուններ, որոնց բարձրությունները, հավասար են՝

$$h^2,(2h)^2,(3h)^2,\cdots,(nh)^2=a^2 \text{ (նկ. 13):}$$

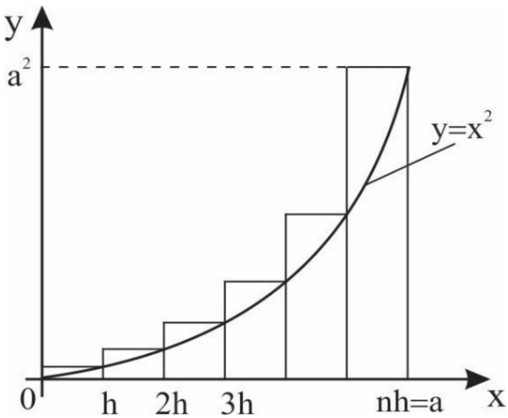
Ակներև է, որ այդ ուղղանկյունների հիմքերը հավասար են h-ի: Կորագիծ «եռանկյան» S մակերեսը մոտավորապես հավասար է բոլոր ուղղանկյունների մակերեսների գումարին՝

$$S \approx S_n = h \cdot h^2 + h \cdot (2h)^2 + h \cdot (3h)^2 + \cdots + h \cdot (nh)^2 =$$

$$= h^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) :$$



Նկ. 12



Նկ. 13

Համաձայն (1.5) բանաձևի՝

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ուստի՝

$$S_n = h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}:$$

Հետևաբար, կորագիծ եռանկյան մակերեսը՝

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a^3 \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{a^3}{3}:$$

Այսպիսով, $y = x^2$ պարաբոլի աղեղի տակ ընկած պատկերի մակերեսը հավասար է $x = a$ և $y = a^2$ կողմեր ունեցող ուղղանկյան մակերեսի $\frac{1}{3}$-ին:

Անցնելով ֆիզիկական խնդրի առաջին պահանջին՝ դժվար չէ եզրակացնել, որ առաջին դեպքում որոնելի s_{I} ճանապարհը թվապես հավասար կլինի t_0 և αt_0^2 երկարություններով կողմեր ունեցող ուղղանկյան մակերեսի $\frac{1}{3}$-ին, այսինքն՝ $s_{\mathrm{I}} = \alpha t_0^3/3$:

2-րդ դեպքում որոնելի s_{II} ճանապարհը կարելի է դյուրավ գտնել: Իրոք, համեմատելով $v = \alpha t^2$ և $v = v_0 - \alpha t^2$ պարաբոլները, նկատում ենք, որ երկրորդը կարելի է ստանալ առաջինից հետևյալ երկրաչափական ձևափոխությունների միջոցով.

$\alpha t^2 \to -\alpha t^2$ (պարաբոլը շրջվում է «գլխիվայր»),

$-\alpha t^2 \to a^2 - \alpha t^2$ (շրջված պարաբոլը զուգահեռ տեղափոխվում է y-ների առանցքի երկայնքով դեպի վեր՝ a չափով):

Այս ձևափոխությունների հետևանքով ստացված պարաբոլի աղեղի տակ ընկած պատկերի (մգացված կորագիծ «եռանկյան») մակերեսը (նկ. 11) հավասար է նկ. 10-ում պատկերված կորագիծ «եռանկյան» (չմգացված) մակերեսին, այսինքն՝ t_0 և αt_0^2 կողմեր ունեցող ուղղանկյան մակերեսի 2/3 -ին՝ $s_{\text{II}} = \dfrac{2}{3}\alpha t_0^3 = \dfrac{2}{3} v_0 \sqrt{\dfrac{v_0}{\alpha}}$:

11. Ջրածնի ատոմի էներգիական մակարդակների այլասերման աստիճանը
(Նրանց համար, ովքեր ծանոթ են քվանտային ֆիզիկայի տարրերին)

Համաձայն քվանտամեխանիկական պատկերացումների՝ էլեկտրոնի վիճակը ջրածնի ատոմում լիովին որոշվում է չորս ֆիզիկական մեծությունների արժեքներով: Այդ մեծություններն են՝ էներգիան (E), իմպուլսի ուղեծրային մոմենտը (L), այդ մոմենտի պրոյեկցիան մի որոշ՝ կամայականորեն ընտրված z առանցքի վրա (L_z) և սպինային մոմենտի պրոյեկցիան այդ նույն z առանցքի վրա:

(Ընթերցողին հիշեցնենք, որ սպինային մոմենտը էլեկտրոնի իմպուլսի սեփական մեխանիկական մոմենտն է և որևիցե կապ չունի միջուկի շուրջն էլեկտրոնի ուղեծրային շարժման հետ:)

Վերոթվարկյալ բոլոր մեծությունների հնարավոր արժեքները ***քվանտացված են*** և որոշվում են համապատասխան քվանտային թվերով՝ n, l, m, m_s: Առաջին երեքը՝ n-ը, l-ը և m-ն ի հայտ են գալիս քվանտային մեխանիկայի ոչ ռելյատիվիստական (Շրյոդինգերի) հավասարումը լուծելիս, իսկ m_s քվանտային թիվը, որը բնութագրում է էլեկտրոնի սպինի L_{sz} պրոյեկցիան՝ ռելյատիվիստական (Դիրակի) հավասարման լուծման ընթացքում:

(Հիշեցնենք, որ Դիրակի հավասարումը Շրյոդինգերի ոչ ռելյատիվիստական հավասարման ռելյատիվիստական ընդհանրացումն է, իսկ սպինը ռելյատիվիստական բնութագիր է, ուստի չի մտնում Շրյոդինգերի հավասարման մեջ:)

n-ը, ինչպես գիտեք, կոչվում է գլխավոր քվանտային թիվ և որոշում է էլեկտրոնի էներգիան՝

$$\boxed{E_n = -E_R \cdot \frac{1}{n^2}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots,} \tag{3.9}$$

որտեղ

$$E_R = \frac{k m_e e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ էՎ:}$$

E_R մեծությունն այն էներգիան է, որն անհրաժեշտ է ջրածնի ատոմն իոնացնելու համար. էներգիայի այդ քանակն անվանում են մեկ ***ռիդբերգ*** (Ry), այսինքն՝ $1Ry = 13,6$ էՎ:

Ուղեծրային (կամ ազիմուտային) քվանտային l թիվը բնութագրում է էլեկտրոնի ուղեծրային իմպուլսի մոմենտը՝

$$\boxed{L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar :} \tag{3.10}$$

Տրված n-ի դեպքում l-ը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները՝

$$l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) :$$

Մագնիսական քվանտային թիվը (m) որոշում է իմպուլսի մոմենտի L_z պրոյեկցիան՝

$$\boxed{L_z = m\hbar :} \tag{3.11}$$

Տրված l-ի դեպքում մագնիսական քվանտային թիվը կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները՝

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l :$$

Սպինային քվանտային թիվը որոշում է սպինային մոմենտի L_{sz} պրոյեկցիան՝

$$\boxed{L_{sz} = m_s \hbar :} \qquad (3.12)$$

m_s քվանտային թվի հնարավոր արժեքները երկուսն են՝

$$m_s = \pm \frac{1}{2} :$$

n, l, m, m_s քվանտային թվերը լիովին որոշում են ջրածնի ատոմում կապված էլեկտրոնի քվանտամեխանիկական վիճակը:

Էլեկտրոնի E_n էներգիան կախված է միայն n գլխավոր քվանտային թվից, ուստի տրված n-ով մեկ էներգիական մակարդակին համապատասխանում են մի քանի տարբեր էլեկտրոնային վիճակներ, որոնք տարբերվում են l, m, m_s քվանտային թվերի արժեքներով:

Այն էներգիական մակարդակը, որին համապատասխանում է լոկ մեկ քվանտային վիճակ, անվանում են չայլասերված, իսկ եթե մեկ էներգիական մակարդակին համապատասխանում են մի քանի տարբեր քվանտային վիճակներ, ապա մակարդակը կոչվում է այլասերված:

Հաշվենք n-ի տրված արժեքով որոշվող E_n էներգիայով մակարդակին համապատասխանող վիճակների $\beta(n)$ թիվը:

Տրված n-ի և l-ի համար վիճակների թիվը կորոշվի m-ի և m_s-ի բոլոր հնարավոր արժեքներով: Քանի որ m-ը տրված l-ի դեպքում կարող է ընդունել $2l+1$ արժեք, իսկ m_s-ը՝ 2 արժեք, ապա վիճակների թիվը կլինի՝

$$2(2l+1):$$

Տրված n-ի դեպքում l-ը կարող է ընդունել 0-ից մինչև $(n-1)$ արժեքները, ուստի տարբեր վիճակների ընդհանուր թիվը ստանալու համար վերոգրյալ արտահայտության արժեքները պետք է գումարենք ըստ l-ի՝

$$\beta(n) = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2(1+3+5+\cdots+2n-1)$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը $\div 1,3,5,\ldots,$ $2n-1$, թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարն է, որը, համաձայն (1.3) բանաձևի, հավասար է n^2-ու: Հետևաբար՝ n գլխավոր քվանտային թվի որևէ մեկ արժեքին համապատասխանող այլասերման աստիճանը (տարբեր քվանտային վիճակների թիվը)՝ $\beta(n) = 2n^2$:

12. Մասնիկների համակարգի վիճակագրական նկարագրությունը

Ներածություն *(ընդհանուր տեղեկություններ քվանտային վիճակագրությունների մասին)*

Ֆիզիկայի բուհական դասընթացից յուրաքանչյուր ուսանող գիտե, որ մեծ թվով շարժվող և փոխազդող մասնիկներից (ատոմներից, մոլեկուլներից, էլեկտրոններից, ֆոտոններից և այլն) կազմված համակարգերի ուսումնասիրման համար անհրաժեշտ են միանգամայն նոր մեթոդներ: Ստեղծված է երկու այդպիսի մեթոդ, որոնցից առաջինի վրա վեր է խոյանում ***ջերմադինամիկայի,*** իսկ երկրորդի վրա՝ ***վիճակագրական ֆիզիկայի*** վեհաշուք շենքը:

Ի տարբերություն ջերմադինամիկայի, որը հիմնված չէ նյութի կառուցվածքի վերաբերյալ որևէ պատկերացման վրա, վիճակագրական ֆիզիկայի մեթոդաբանական հիմքը մարմինների ատոմամոլեկուլային կառուցվածքի հայեցակարգն է՝ մաթեմատիկական վիճակագրության օգտագործմամբ:

Վիճակագրական ֆիզիկայում, կախված պայմաններից, համակարգի մասնիկների շարժումները նկարագրվում են կա՛մ դասական, կա՛մ քվանտային մեխանիկայի օրենքներով: Համապատասխանաբար, տարբերում են ***դասական*** և ***քվանտային վիճակագրություններ:*** Վերջին դեպքում մասնիկների վարքի վիճակագրական նկարագրությունը հետևանքն է այդ մասնիկների ***ալիքամասնիկային երկվության:***

Քվանտային մասնիկների համակարգն օժտված է այնպիսի հատկություններով, որոնցով օժտված չէ ոչ միայն դասական մասնիկների համակարգը, այլև առանձին վերցրած յուրաքանչյուր քվանտային մասնիկ (եթե համակարգի մեջ մտնող մասնիկները, իհարկե, միատեսակ են, այսինքն՝ նրանց զանգվածները, լիցքերը, սպինները և մնացած այլ ներքին բնութագրերը միևնույնն են. միատեսակ են, օրինակ՝ բոլոր էլեկտրոնները և բոլոր ֆոտոնները):

Այստեղից դժվար չէ եզրակացնել, որ քվանտային մասնիկների համակարգի հատկությունները պետք է նկարագրվեն բոլորովին այլ՝ դասական մասնիկներին ոչ բնորոշ օրինաչափություններով: (Ինչպես գիտեք, դասական մասնիկների համակարգը նկարագրվում է Մաքսվել-Բոլցմանի բաշխման օրենքով:) Այդ տարբերությունը պայմանավորված է քվանտային վիճակագրության երկու անառարկելի սկզբունքներով, որոնք են.

- Միատեսական մասնիկների նույնականության սկզբունքը,
- Պաուլիի սկզբունքը:

Համաձայն քվանտամեխանիկական պատկերացումների՝ միատեսակ մասնիկ-ները սկզբունքորեն ***անզանազանելի են:*** Եթե, օրինակ, երկու էլեկտրոններ փոխեն իրենց տեղերը, ապա այդպիսի փոխատեղմամբ նոր վիճակ չի ստեղծվում: Հետևաբար, հնարավոր չէ փորձնականորեն տարբերել միատեսակ (նույնական) մասնիկները: Այս պնդումն անվանում են ***միատեսակ մասնիկների նույնականության (անզանազանելիության) սկզբունք:***

Ի հետևանս նույնականության սկզբունքի՝ քվանտային մասնիկների համակարգի այն վիճակները, որոնք ստացվում են մեկը մյուսից՝ միատեսակ մասնիկների փոխատեղմամբ, հարկավոր է դիտարկել որպես մեկ վիճակ: Բայց այդ դեպքում հնարավոր է, որ նույնական մասնիկների համակարգի լրիվ ալիքային ֆունկցիան կամ փոխի իր նշանը, կամ՝ չփոխի՝ կախված արտաքին մագնիսական դաշտի $\vec{B}$ վեկտորի ուղղությունն ունեցող z առանցքի վրա այդ մասնիկների սպինների L_{sz} պրոյեկցիայից:

Էլեկտրոնները, նուկլոնները և բոլոր այն մասնիկները, որոնց սպինային մեխանիկական մոմենտի L_{sz} ***պրոյեկցիան հավասար է կենտ թվով*** $\hbar/2$ ***-ի, անվանում են ֆերմիոններ:*** Միատեսակ ֆերմիոնների համակարգի վարքը նկարագրող ալիքային ֆունկցիան, մասնիկների փոխատեղումից, փոխում է իր նշանը:

Այն մասնիկները, որոնց L_{sz} ***-ը հավասար է զրոյի կամ էլ զույգ թվով*** $\hbar/2$ ***-ի, անվանում են բոզոններ:*** Միատեսակ բոզոնների համակարգի ալիքային ֆունկցիան, կամայական երկու մասնիկների փոխատեղման հետևանքով, մնում է անփոփոխ:

Միատեսակ (նույնական) ֆերմիոնների համակարգի վարքի առանձնահատ-կությունն արտահայտում է ***Պաուլիի սկզբունքը,*** համաձայն որի՝

միատեսակ ֆերմիոնների տրված համակարգում միևնույն քվանտային վիճակում միաժամանակ չի կարող գտնվել մեկից ավելի ֆերմիոն:

Վիճակագրական ֆիզիկայի հիմնական խնդիրն է.

Որոշել քվանտային մասնիկների ամբողջ համակարգի մակրովիճակը բնութագրող ֆիզիկական մեծությունների (պարամետրերի) միջին արժեքները, ինչի համար անհրաժեշտ է՝

- հաշվել այն քվանտային վիճակների թիվը, որոնք համապատասխանում են համակարգի՝ տրված ընդգրկույթում ընկած էներգիայի արժեքներին,
- գտնել համակարգի մասնիկների բաշխման ֆունկցիան ըստ այս կամ այն պարամետրի՝ իմպուլսի, էներգիայի և այլն:

Ֆերմիոնների և բոզոնների համակարգերի համար այդ խնդիրները լուծվում են համանմանորեն, բայց որոշ տարբերությամբ. չէ՞ որ բոզոնները չեն ենթարկվում Պաուլիի ամենազոր սկզբունքին: Դրան համապատասխան՝ տարբերում են երկու քվանտային վիճակագրություններ՝ Ֆերմի-Դիրակի և Բոզե-Այնշտայնի:

Մասնիկների համակարգի նկարագրման համար վիճակագրական ֆիզիկայում օգտվում են ***փուլային տարածության*** հասկացությունից: Փուլային տարածության չափումների թիվը վեցն է՝ x, y, z, p_x, p_y, p_z: Առաջին երեք չափումները մասնիկի կոորդինատներն են, իսկ վերջին երեքը՝ նրա $\vec{p}$ իմպուլսի պրոյեկցիաները համապատասխան կոորդինատային առանցքների վրա: Դասական մասնիկի վիճակը (մասնիկի կոորդինատները և իմպուլսները) փուլային տարածության մեջ, բնականաբար, պատկերվում է կետով: Բայց եթե մասնիկների վարքը նկարագրվում է քվանտային մեխանիկայի օրենքներով, ապա հարկավոր է հաշվի առնել դրանց հատկությունների երկվությունը:

Ի հակադրություն դասական մեխանիկայի՝ քվանտային մեխանիկայում գոյություն չունի այնպիսի վիճակ, որում մասնիկի կոորդինատը և նրան համապատասխանող իմպուլսի պրոյեկցիան միաժամանակ ունենան ճշգրիտ արժեքներ: Հետևաբար՝ կոորդինատը և իմպուլսի համապատասխան պրոյեկցիան միաժամանակ կարող են որոշվել Δx և Δp_x անորոշություններով, որոնք իրար հետ կապված են Հայզենբերգի անհավասարությամբ՝

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h:$$

Նշանակում է՝ լավագույն դեպքում, երբ վերոգրյալ արտահայտության մեջ անհավասարության նշանի փոխարեն դրված է հավասարման նշան, ապա (x, p_x) փուլային հարթության մեջ վիճակը պատկերվում է ոչ թե կետով, այլ ուղղանկյունով, որի նվազագույն մակերեսը $\Delta x \cdot \Delta p_x = h$ է:

Ընդհանրացնելով՝ կարելի է, բնականաբար, համարել, որ փուլային տարածության մեջ մասնիկի տրված վիճակին կետի փոխարեն պետք է համապատասխանի ***բջիջ,*** որի փուլային ծավալը հավասար է՝ $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ ։ Փուլային տարածության ծավալի $d\Gamma$ տարրն իրենից ներկայացնում է սովորական կոորդինատային տարածության ծավալի $dV = dxdydz$ տարրի և իմպուլսային տարածության ծավալի $dV_{\text{իմպ}} = dp_x dp_y dp_z$ տարրի արտադրյալը՝

$$d\Gamma = dVdV_{\text{իմպ}} = dxdydzdp_x dp_y dp_z \text{ ։} \tag{3.13}$$

Այժմ որոշենք քվանտային վիճակների թիվը, որոնք համապատասխանում են համակարգի այն էներգիաներին, որոնց արժեքները ε-ից մինչև $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ընդգրկույթում են: Վիճակների այդ թիվը նշանակենք $\Delta\Omega = \Omega(\varepsilon)\Delta\varepsilon$-ով: Յուրաքանչյուր վիճակի համապատասխանում է փուլային տարածության h^3-ին հավասար ծավալ: Ուստի վիճակների որոնելի թիվը կգտնենք, եթե հաշվենք ε և $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ ընդգրկույթում ընկած էներգիաներին համապատասխանող փուլային ծավալը և բաժանենք h^3-ի:

Փուլային ծավալը հաշվելիս կհամարենք, որ մասնիկի իմպուլսը փոփոխվում է գրեթե անընդհատորեն, և փուլային տարածության ծավալի տարրը կգրենք (3.13) տեսքով: Փուլային տարածության այն ծավալը, որը համապատասխանում է տրվածից փոքր արժեքներով էներգիաներին, ստացվում է (3.13) արտահայտության ինտեգրմամբ՝ ըստ բոլոր կոորդինատների և բոլոր իմպուլսների, որոնք բավարարում են $0 \le p \le \sqrt{2m\varepsilon_{\max}}$ պայմանը: Անցնելով գնդային կոորդինատների՝ կարող ենք գրել՝

$$d\Gamma = dxdydzdp_x dp_y dp_z = dxdydz \cdot p^2 dp sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

հետևաբար՝

$$\Gamma = \iiint\limits_V dxdydz \iiint\limits_{V_{\text{իմպ}}} dp_x dp_y dp_z = V\int_0^p p^2 dp \int_0^\pi sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= V \cdot \frac{p^3}{3} \cdot (-cos\vartheta)\Big|_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi V p^3 :$$

Համարելով $V = 1$ միավոր՝ իմպուլսների p, $p + dp$ ընդգրկույթին համապատասխանող փուլային տարածության ծավալը կարող ենք ներկայացնել

$$d\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial p} dp = 4\pi p^2 dp$$

տեսքով: Ուստի, այն մասնիկի վիճակների թիվը, որի իմպուլսներն ընկած են p, $p + dp$ ընգրկույթում, հավասար է՝

$$d\Omega = \Omega(p)dp = \frac{1}{h^3}\frac{\partial\Gamma}{\partial p} dp = \frac{4\pi}{h^3} p^2 dp : \qquad (3.14)$$

Եթե տրված է ε էներգիայով մասնիկների միջին թիվը (մասնիկների բաշխման խտություն կամ ֆունկցիա) նշանակենք f-ով, ապա ε և $\varepsilon+d\varepsilon$ ընդգրկույթում էներգիա ունեցող մասնիկների միջին թիվը կլինի՝

$$dn = fd\Omega, \tag{3.15}$$

իսկ այդ մասնիկների միջին էներգիան՝

$$dE = \varepsilon dn = \varepsilon fd\Omega : \tag{3.16}$$

Ստորև դիտարկել ենք երկու տիպի մասնիկներից՝ բոզոններից և ֆերմիոններից, բաղկացած համակարգեր, համապատասխանաբար՝ ***ֆոտոնային գազը*** և «ազատ» էլեկտրոններից կազմված գազը ***(էլեկտրոնային գազը)*** մետաղներում՝ բացարձակ զրոյին մոտ ջերմաստիճաններում: Օգտվելով այդ գազերի բաշխման օրենքն արտահայտող $f_{\text{Բոզե-Այնշտայն}}$ և $f_{\text{Ֆերմի-Դիրակ}}$ ֆունկցիաներից՝ որոշել ենք այդ համակարգերի միջին էներգիան՝ կիրառելով հաշվարկի ընթացքում առաջ եկած շարքերի գումարների՝ մեր կողմից արդեն ստացված բանաձևերը:

12ա. Ֆոտոնային գազ

Ընթերցողին դեռևս դպրոցական դասընթացից [15] հայտնի է, որ արդի քվանտային տեսության պնդմամբ էլեկտրամագնիսական ճառագայթումը, մասնավորապես՝ լույսը, ալիքային հատկությունների հետ մեկտեղ, օժտված է նաև մասնիկային հատկանիշներով, այլ կերպ ասած՝ ճառագայթումը կարելի է պատկերացնել որպես յուրահատուկ մասնիկների՝ ***լույսի քվանտների*** կամ ***ֆոտոնների հոսք:***

Դիցուք՝ փակ խոռոչը լցված է ֆոտոնային գազով: Վերջինս կարելի է համարել իդեալական գազ, քանի որ ֆոտոններն իրար հետ չեն փոխազդում: Այդուհանդերձ ֆոտոնային գազի և սովորական մոլեկուլային իդեալական գազի միջև կան էական տարբերություններ, որոնցից են.

- Նախ՝ փակ խոռոչը լցնող ֆոտոնային գազի մասնիկների թիվը, ընդհանուր առմամբ, հաստատուն չէ, քանի որ պատերի հետ փոխազդելիս կարող են ինչպես ֆոտոններ ծնվել, այնպես էլ՝ անհետանալ:
- Այնուհետև՝ բոլոր ֆոտոնները, ի տարբերություն մոլեկուլների, շարժվում են միատեսակ արագություններով:

Այդուամենայնիվ, ֆոտոնային գազում, ինչպես և մոլեկուլայինում, հնարավոր է ըստ էներգիայի և իմպուլսի մասնիկների հավասարակշիռ բաշխում: Ֆոտոնների փոխազդեցության բացակայությամբ այդպի-սի բաշխում կարող է հաստատվել միայն խոռոչի պա-տերի և խոռոչում առկա այլ մարմինների կողմից ֆո-տոնների կլանմամբ և արձակմամբ: Այդ պրոցեսում, ե-րբ մի ֆոտոնը փոխակերպվում է մեկ ուրիշ ֆոտոնի, փոխվում են նաև նրանց հաճախությունները:

Այժմ ենթադրենք, թե խոռոչի յուրաքանչյուր միա-վոր ծավալում, հաճախություն-ների ν, $\nu + d\nu$ միջա-կայքում (կամ, համապատասխանաբար, էներգիանե-րի ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ ընդգրկույթում) ֆոտոնների տարբեր քվանտային վիճակների թիվը $d\Omega$ է, որտեղ $\Omega = \Omega(\varepsilon)$-ը տրված ε էներգիայով վիճակների թիվն է կամ, այս-պես կոչված, ***վիճակագրական կշիռը,*** այնպես որ $d\Omega = \Omega(\varepsilon) d\varepsilon$: Դիցուք՝ ֆոտոնների միջին թիվը յուրա-քանչյուր էներգիական վիճակում, այսինքն՝ ֆոտոննե-րի բաշխման ֆունկցիան $f = n(\varepsilon)$ է: Այդ դեպքում ε և $\varepsilon + d\varepsilon$ ընդգրկույթում էներգիա ունեցող ֆոտոնների միջին թիվը, համաձայն (3.15)-ի, հավասար կլինի՝

$$dn = f d\Omega :$$

Մեր նպատակն է՝ որոշել խոռոչում ֆոտոնների լրիվ էներգիան (յուրաքանչյուր միավոր ծավալում):

Ֆոտոնային գազի քիմիական պոտենցիալը զրո է [20], հետևաբար, ըստ վիճակների էներգիաների, Բոզե-Այնշտայնի բաշխման օրենքն այդ գազի համար կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\varepsilon=h\nu,$ ապա վերջին առնչությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$n(\nu)=\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}:$$

Սա էլ հենց Պլանկի բաշխման բանաձևն է լույսի քվանտների (ֆոտոնների) համար:

Ֆոտոնի իմպուլսը՝ $p=\frac{h\nu}{c}$, և եթե հաշվի առնենք p իմպուլսով ֆոտոնների բևեռացման երկու ուղղությունները էլ, ապա, ինչպես հետևում է (3.14) բանաձևից, խոռոչի միավոր ծավալում, ν-ից $\nu+d\nu$ հաճախությունների միջակայքին համապատասխանող p իմպուլսով վիճակների վիճակագրական կշիռը՝

$$d\Omega=\Omega(\nu)d\nu=\frac{2\cdot 4\pi\nu^2 d\nu}{c^3},$$

իսկ ֆոտոնների միջին թիվը՝

$$dn(\nu)=\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}:$$

Հետևաբար, ν, $\nu+d\nu$ հաճախությունների միջակայքում հավասարակշիռ ճառագայթման էներգիան՝

$$dE(\nu,T)=h\nu\cdot dn(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1},$$

որտեղից հետևում է, որ ֆոտոնային գազի լրիվ էներգիան՝

$$E(T)=\int_0^\infty dE(\nu,T)d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty\frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}:$$

Վերոգրյալ արտահայտության աջ մասի ինտեգրալը հաշվելու համար կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $\frac{h\nu}{kT}=x$, որտեղից՝ $\nu=\frac{kT}{h}x,\quad d\nu=\frac{kT}{h}dx:$ Հետևաբար՝

$$E(T)=\frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}:$$

$\frac{1}{e^x-1}$-ը ձևափոխենք՝ համարիչը և հայտարարը բազմապատկելով e^{-x}-ով. կունենանք՝ $\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$: Քանի որ, ինչպես հաշվարկն է ցույց տալիս, $x>1$, ապա ստացված կոտորակը $\because e^{-x}$, $e^{-2x},\ldots$ անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարն է՝

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + \cdots :$$

Այսպիսով, ֆոտոնյան գազի լրիվ էներգիան կորոշվի հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$E(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} x^3 (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots)dx :$$

Ինտեգրալի ներսում բացելով փակագծերը և կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք՝

$$E(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \cdot 3!\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right):$$

Արդեն նկատեցիք, որ փակագծերի ներսում մեզ ծանոթ հակադարձ 4-րդ աստիճանների շարքի գումարն է, որը, համաձայն (2.36) բանաձևի, հավասար է՝

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} :$$

Հետևաբար, ֆոտոնային գազի էներգիան խոռոչի միավոր ծավալում հավասար է՝

$$E(T) = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi^5 \cdot k^4}{h^3 c^3} T^4,$$

որն արտահայտում է ջերմային ճառագայթման համար Ստեֆան-Բոլցմանի օրենքը՝

$$E(T) = \sigma T^4,$$

որտեղ σ հաստատունը (Ստեֆան-Բոլցմանի հաստատուն) հավասար է՝

$$\sigma = \frac{8}{15}\cdot\frac{\pi^5\cdot k^4}{h^3c^3} = 7,54\cdot 10^{-16}\,\frac{\text{Ջ}}{\text{մ}^3\cdot\text{Կ}^4}:$$

12բ. Էլեկտրոնային գազ

Այժմ դիտարկենք համակարգ՝ բաղկացած իրար հետ չփոխազդող N ֆերմիոններից (օրինակ՝ էլեկտրոններից), որոնցից յուրաքանչյուրի սպինը $\hbar/2$ է: Այդպիսի համակարգն անվանում են իդեալական ֆերմի-գազ:

Իդեալական ֆերմի-գազի օրինակ կարելի է համարել էլեկտրոնային գազը մետաղներում, շատ ցածր (զրոյին մոտ) ջերմաստիճաններում:

Էլեկտրոնները մետաղի ամբողջ ծավալով բաշխված են հավասարաչափ, և քանի որ էլեկտրոնների թիվը սաստիկ մեծ է, ապա, բնականաբար, էլեկտրոնների համակարգի էներգիայի մակարդակներն առաջացնում են գրեթե անընդհատ սպեկտր: Այն էլեկտրոնի վիճակների թիվը, որի էներգիաներն ընկած են ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ ընդգրկույթում, կարելի է որոշել (3.14) առնչությունից՝ աջ մասը բազմապատկելով 2-ով (քանի որ էներգիայի յուրաքանչյուր մակարդակում միաժամանակ կարող են գտնվել ոչ ավելի, քան երկու էլեկտրոններ՝ սպինների հակադիր կողմնորոշումներով), և p-ն արտահայտելով էլեկտրոնի ε կինետիկ էներգիայի միջոցով. $d\Omega = 2\cdot\frac{4\pi}{h^3}p^2dp$, իսկ $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m\varepsilon}$ ։ Հետևաբար՝ $dp = \frac{2md\varepsilon}{2\sqrt{2m\varepsilon}}$, այնպես որ

$$d\Omega = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon ։$$

Էլեկտրոնների բաշխման ֆունկցիան որոշվում է Ֆերմի-Դիրակի բանաձևով՝

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1},$$

հետևաբար, ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ ընդգրկույթում էներգիա ունեցող էլեկտրոնների միջին թիվը՝

$$dn = fd\Omega = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} ։ \qquad (3.17)$$

Այսպիսով, էլեկտրոնային գազում էլեկտրոնների լրիվ թիվը՝

$$N = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\int_0^\infty\frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} ։ \qquad (3.18)$$

Հաշվելով ինտեգրալը՝ կարող ենք որոշել μ քիմիական պոտենցիալը:

(3.18) առնչության մեջ աջ մասի ինտեգրալը նշանակելով J-ով՝

$$J=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}, \tag{3.19}$$

էլեկտրոնային գազում էլեկտրոնների լրիվ թվի որոշման բանաձևը կարտահայտվի

$$N=4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}V\cdot J \tag{3.20}$$

հավասարությամբ:

Հաշվենք J-ով նշանակված (3.19) ինտեգրալը: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ նշանակելով $\frac{\varepsilon-\mu}{kT}=x$: Այդ դեպքում՝ $\varepsilon=kTx+\mu$ և $d\varepsilon=kTdx$:

Երբ $\varepsilon=0$, ապա $x=-\frac{\mu}{kT}$, իսկ $\varepsilon=\infty$ դեպքում x-ը նույնպես հավասար է անվերջի՝ $x=\infty$, ուստի՝

$$J=kT\int_{-\mu/kT}^{\infty}\frac{(kTx+\mu)^{1/2}}{e^x+1}dx:$$

Վերոգրյալ հավասարության աջ կողմի ինտեգրալը կարելի է ձևափոխել մասերով ինտեգրման միջոցով: Դրա համար կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$u=\frac{1}{e^x+1},\quad du=-\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2},\quad dv=(kTx+\mu)^{1/2}dx$$

$$v=\int(kTx+\mu)^{1/2}dx=\frac{1}{kT}\int(kTx+\mu)^{1/2}d(kTx+\mu)=$$

$$=\frac{1}{kT}\cdot\frac{2}{3}(kTx+\mu)^{3/2}:$$

Հետևաբար, օգտվելով մասերով ինտեգրման $\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$ բանաձևից, կարող ենք գրել՝

$$J=kT\left[\frac{1}{kT}\cdot\frac{2}{3}(kTx+\mu)^{3/2}\cdot\frac{1}{e^x+1}\Big|_{-\mu/kT}^{\infty}+\frac{1}{kT}\cdot\frac{2}{3}\int_{-\mu/kT}^{\infty}\frac{(kTx+\mu)^{3/2}e^x dx}{(e^x+1)^2}\right]:$$

Քանի որ այս հավասարության աջ մասի առաջին գումարելին ինտեգրման և՛ վերին, և՛ ստորին սահմանների դեպքում, հավասար է զրոյի, ապա

$$J=\frac{2}{3}\int_{-\mu/kT}^{\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}(kTx+\mu)^{3/2}dx: \tag{3.21}$$

Համոզվենք, որ $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ ֆունկցիան զույգ է:

Իրոք.

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\left(\frac{1}{e^x}+1\right)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=f(x):$$

Բացի այդ, $f(x)$-ը ցուցչայնորեն նվազում է, երբ x-ն աճում է բացարձակ արժեքով: Քանի որ ըստ պայմանի $\frac{\mu}{kT}>>1$, ապա $f\left(-\frac{\mu}{kT}\right)=f\left(\frac{\mu}{kT}\right)\approx 0$, ուստի (3.21)-ում ինտեգրման ստորին սահմանը կարելի է փոխարինել $(-\infty)$-ով: Ի հետևանս $f(x)$-ի արագ նվազման, երբ $|x|$-ն աճում է, ինտեգրալի արժեքը (3.21) հավասարության մեջ որոշվում է միայն x-ի փոքր արժեքներով: Հետևաբար՝ ենթինտեգրալային արտահայտության երկրորդ բազմապատկիչը՝

$$\varphi(x)=(kTx+\mu)^{3/2}\text{-ը,}$$

կարելի է վերածել x-ի աստիճաններով Թեյլոր-Մակլորենի շարքի՝ սահմանափակ-վելով միայն վերլուծության առաջին մի քանի անդամներով՝

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot x+\frac{1}{2}\varphi''(0)\cdot x^2+\cdots: \quad (3.22)$$

Հաշվելով (3.22) աստիճանային շարքի թվային գործակիցները և ստացված արժեքները հաշվի առնելով՝ $\varphi(x)$-ի վերլուծությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x) = \mu^{3/2}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu}x + \frac{3}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 x^2 + \cdots\right]: \qquad (3.23)$$

Հետևաբար՝ (3.21)-ից, հաշվի առնելով (3.23)-ը, կստանանք.

$$J = \frac{2}{3}\mu^{3/2}\left[\begin{array}{l} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx + \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx + \\ +\frac{3}{4}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx + \cdots \end{array}\right]: \quad (3.24)$$

Առանձին-առանձին հաշվենք (3.24) հավասարության աջ մասի ինտեգրալները:

Առաջին ինտեգրալը՝

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{e^x+1}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1:$$

Երկրորդ ինտեգրալի ներսում ենթինտեգրալային ֆունկցիան կենտ է, ուստի՝

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = 0:$$

Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի վերլուծության բանաձևից [10, բանաձև 9.06]՝

$$(1+z)^{-2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots, \quad \text{երբ} \quad |z| < 1,$$

$\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ (համարիչը և հայտարարը նախապես բազմապատկելով e^{-2x} -ով)՝

$$\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x\cdot e^{-2x}}{(e^x+1)^2\cdot e^{-2x}}=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=e^{-x}(1+e^{-x})^{-2}=$$

$$=e^{-x}(1-2e^{-x}+3e^{-2x}-\cdots)=e^{-x}-2e^{-2x}+3e^{-3x}-\cdots:$$

Երրորդ ինտեգրալի ներսում ենթինտեգրալային ֆունկցիան զույգ է, այդ պատճառով

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}dx:=2\int_0^{\infty}x^2(e^{-x}-2e^{-2x}+3e^{-3x}-\cdots)dx=$$

$$=2\left(\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx-2\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}dx+3\int_0^{\infty}x^2e^{-3x}dx-\cdots\right):$$

Փակագծերի ներսում ինտեգրալները հաշվելու համար օգտվենք մասերով ինտեգրման բանաձևից (տե՛ս վերը): Կստանանք.

$$\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}\cdot 2xdx=2\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=$$

$$=2\left(xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}dx\right)=2\int_0^{\infty}e^{-x}dx=2e^{-x}\Big|_0^{\infty}=2:$$

Երկրորդ ինտեգրալը հաշվելու համար նախապես կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $2x=y$, և արդյունքում կունենանք՝

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{4} :$$

Նշանակելով $3x = z$, հանգույն ձևով կստանանք երրորդ ինտեգրալի արժեքը՝

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-3x} dx = \frac{2}{27} :$$

Այսպիսով՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 2\left(2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{2}{27} - \cdots \right) =$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots \right) = 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \right):$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը ոչ այլ-ինչ է, եթե ոչ հակադարձ քառակուսիների նշանափոխ շարքը, որի գումարը, համաձայն (2.29) բանաձևի, հավասար է՝

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

այսինքն՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 4 \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} :$$

Հետևաբար, (3.24) արտահայտության փոխարեն կունենանք՝

$$J=\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{3}\right]=\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right],$$

որը տեղադրելով (3.18) արտահայտության մեջ, վերջնականապես կստանանք էլեկտրոնների լրիվ թիվը V ծավալում՝

$$N\approx 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}V\cdot\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right], \tag{3.25}$$

որտեղից էլեկտրոնների թիվը միավոր ծավալում՝

$$n=\frac{N}{V}\approx\frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]: \tag{3.26}$$

Նշանակելով $T=0K$ բացարձակ ջերմաստիճանում քիմիական պոտենցիալի արժեքը μ_0-ով՝ կարող ենք գրել՝

$$n\approx\frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu_0^{3/2}, \tag{3.27}$$

որտեղից՝

$$\mu_0=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}: \tag{3.28}$$

Վիճակագրական ֆիզիկայում ցույց է տրվում, որ μ_0-ի վերոգրյալ արժեքը ճշգրտորեն հավասար է բացարձակ 0 ջերմաստիճանում այն առավելագույն $\varepsilon_{\max}$

էներգիային, որ կարող է ունենալ էլեկտրոնը՝ $\mu_0 = \varepsilon_{\max}$: Բացի այդ, ապացուցվում է նաև, որ մետաղներում (և, ընդհանրապես, բյուրեղներում) μ-ն շատ թույլ է կախված ջերմաստիճանից, այնպես որ մետաղներում, բոլոր ջերմաստիճաններում, մեծ ճըշգրտությամբ կարելի է μ-ն համարել հավասար μ_0-ի՝ $\mu = \mu_0$: Ուստի մեծ սխալ չենք գործի, եթե (3.26) հավասարության աջ մասի քառակուսային փակագծերի ներսում μ-ի փոխարեն վերցնենք μ_0 և, այնուհետև, լուծենք ստացված հավասարումն այն μ-ի նկատմամբ, որը գրված է փակագծերի առջևում: Արդյունքում կստանանք՝

$$\mu = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]^{-2/3} : \qquad (3.29)$$

(3.29) հավասարության աջ մասի քառակուսային փակագծերի ներսում կատարենք նշանակում՝

$$\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2 \equiv x,$$

ինչի շնորհիվ քառակուսային փակագիծը կհանգեցվի $(1+x)^{-2/3}$ տեսքի արտահայտության:

Քանի որ, ըստ պայմանի, T -ն շատ փոքր է, ապա կարելի է համարել $x \ll 1$ և ստացված արտահայտությունը վերլուծել շարքի՝ սահմանափակվելով առաջին երկու անդամներով՝

$$(1+x)^{-2/3} \approx 1-\frac{2}{3}x:$$

Հետևաբար՝

$$\mu=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]:$$

Նկատի ունենալով (3.28)-ը՝ μ -ի համար վերջնականապես կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\mu=\mu_0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]: \tag{3.30}$$

Էլեկտրոնային գազի E էներգիան հաշվելու համար նկատենք, որ $dE=\varepsilon dndV$, ուստի

$$E=4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}V\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}I, \tag{3.31}$$

որտեղ

$$I=\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}:$$

I -ով նշանակված ինտեգրալը հաշվվում է նույն կերպ, ինչ J -ով նշանակվածը, և արդյունքում ստանում ենք՝

$$I=\frac{2}{5}\mu^{5/2}\left[1+\frac{5}{8}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right],$$

որտեղ միայն փակագծերի ներսում μ-ն փոխարինված է μ_0-ով (չէ՞ որ էլեկտրոնային գազի ջերմաստիճանը շատ ցածր է, և կատարված սխալը կլինի աննշան): Հետևաբար, (3.31) առնչությունից արդեն կարող ենք որոշել էլեկտրոնային գազի E էներգիան՝ նկատի ունենալով μ-ի ջերմաստիճանային կախումն արտահայտող (3.30) բանաձևը՝

$$\bar{E}=\frac{8\pi}{5}V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\mu_0^{5/2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]^{5/2}\cdot\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]: \quad (3.32)$$

Ստացված արտահայտության աջ մասի երկրորդ փակագիծը վերլուծենք բինոմական շարքի՝ պահելով միայն առաջին երկու անդամները՝

$$\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]^{5/2}\approx 1-\frac{5\pi^2}{24}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2:$$

Բացի այդ, (3.28)-ից ունենք՝

$$\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}=\mu_0^{-3/2}\cdot\frac{3N}{8\pi V}:$$

Նկատի ունենալով վերջին երկու հավասարությունները՝ (3.32) առնչությունից կարող ենք որոշել էլեկտրոնային գազի մեկ մասնիկին ընկնող $\bar{E}$ միջին էներգիան՝

$$\bar{E} = \frac{E}{N} \approx \frac{3}{5}\mu_0\left[1 + \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]:$$

Նրանց համար,

ովքեր ուզում են իմանալ ավելին

Էլեկտրոնային գազի ջերմունակությունը հաստատուն ծավալի դեպքում համեմատական է բացարձակ T ջերմաստիճանին: Իրոք՝

$$C_{\text{էլ}} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{2}\pi^2 Nk\left(\frac{kT}{\mu_0}\right):$$

Քանի որ մետաղի բյուրեղացանցի ջերմունակությունը ցածր ջերմաստիճաններում համեմատական է բացարձակ ջերմաստիճանի խորանարդին, ապա ցածր ջերմաստիճանային ընդգրկույթում, ջերմաստիճանի նվազման հետ մեկտեղ աճում է էլեկտրոնային գազի ջերմունակության դերը: Բարձր ջերմաստիճաններում բյուրեղացանցի ջերմունակությունը, հասնելով իր սահմանային արժեքին $\left(C_{\text{բյուրեղ}} = 3Nk\right)$, դադարում է փոփոխվել, իսկ էլեկտրոնային գազի ջերմունակությունը շարունակում է աճել, այնպես որ

$$\frac{C_{□}}{C_{\text{բյուրեղ}}} = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{kT}{\mu}\right)$$

հարաբերությունը աճում է ջերմաստիճանի բարձրացմամբ (հաշվի ենք առել, որ բարձր ջերմաստիճաններում $\mu \neq \mu_0$):

Օրինակ, նատրիումի (Na) համար, երբ $T = 1000$ Կ,

$$\frac{C_{□}}{C_{\text{բյուրեղ}}} \approx \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{0,138 \cdot 10^{-12}}{5,05 \cdot 10^{-12}} = 0,045,$$

այսինքն՝ էլեկտրոնային գազի ջերմունակությունը բյուրեղացանցի ջերմունա-կության ընդամենը 5%-ն է:

ՎԵՐՋԱԲԱՆ

Իհարկե, ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի կապերն ավելի լայն են, քան միայն գումարների հաշվմամբ ֆիզիկայի մի շարք հարցերի և խնդիրների լուծումն է: Անտարակույս է, որ այնպիսի հասկացություններ, ինչպիսիք են, օրինակ, ակնթարթային արագությունը, արագացումը, հոսանքի ուժը, վեկտորի հոսքը որևէ մակերևույթով և շատ ուրիշ ֆիզիկական մեծություններ ֆիզիկայի տարբեր բաժիններից, հնարավոր չէ ճշգրիտ սահմանել առանց բարձրագույն մաթեմատիկայի լեզվի օգտագործման և, առհասարակ, ֆիզիկան պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի՝ անհեթեթություն է: Այդուհանդերձ՝ ֆիզիկան մաթեմատիկա չէ. ֆիզիկայում գլխավորը ոչ թե բանաձևերն են, այլ դրանց մեկնաբանումը և հասկացումը: Բացի այդ, ինչպես նշվեց նախաբանում, ֆիզիկան զարգանում է ոչ թե մաթեմատիկական տրամաբանության, այլ ֆիզիկական ներըմբռնողության շնորհիվ, իսկ այդ երկուսի միասնությունը ոչ այլինչ է, եթե ոչ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի առավել խոր միջառարկայական կապերի իրականացում:

Հեղինակների նպատակն է եղել ցույց տալ, որ ֆիզիկայի դասընթացը պետք է բաց լինի մնացյալ ուսումնական առարկաների, առաջին հերթին՝ մաթեմատիկայի համար: Ապագա ֆիզիկոսը չպետք է ամփոփվի լոկ ֆիզիկայի հիմնախնդիրների մեջ. շնորհիվ միջառարկայական փոխներթափանցումների նա պետք է յուրացնի այն բոլոր ոչ ֆիզիկական առարկաները, առանց որոնց, ինչպես կարծում ենք, հնարավոր չէ խորությամբ հասկանալ ֆիզիկան:

Չենք կասկածում, որ ընթերցողը, կարդալով իրեն հասցեագրված այս գիրքը, կկարողանա տեսնել այն գեղեցիկը, որ իրենց մեջ թաքցնում են իրար միահյուսված մաթեմատիկան և ֆիզիկան և ընկալել իրեն մատուցված նյութը: Այդպիսի ընթերցողին կարելի է համարել մտավոր կերտվածքով անձնավորություն, ով ունակ է հաղթահարելու նաև կյանքում իր առաջընթացը խոչընդոտող ցանկացած արգելք: Հենց նրան էլ վերաբերում է ժողովրդական այն խոսքը, որ «իսկական հերոսները սիրում են դժվարություններ»: Հեղինակներն իրենց երախտագիտությունն են հայտնում նման ընթերցողներին, որոնց մեծ մասը, հավանաբար, ավագ դպրոցի հոսքային ուսուցմամբ դասարաններից է, կամ էլ առաջին-երկրորդ կուրսերի ուսանող: Այդ ընթերցողների համար մաթեմատիկան միշտ եղել է բնության երևույթները հասկանալու միակ ճշգրիտ և գեղեցիկ լեզուն, իրենց մտքերի արտահայտման և մտածողության լեզուն: Սիրե՛ք մաթեմատիկան, և այդ սերը կդառնա փոխադարձ, ի հետևանս որի ֆիզիկան, այսինքն՝ բնությունը, իր դռները լայնորեն կբացի ձեր առջև: Եվ ամենաբարձրյալ մաթեմատիկան կօգնի ձեզ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Пойа Д.* Математическое открытие: М., «Наука», 1970, 452 с.
2. *Бенджамин А.* Магия математики: М., «Альпина Паблишер», 2016, 342 с.
3. *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М.* О математической индукции: М., «Наука», 1967, 144 с.
4. *Сивашинский И.Х.* Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям: М., «Наука», 1971, 368 с.
5. *Ղազարյան Է.* Պարզ ֆիզիկան բարդ երևույթներում, Եր., «Էդիթ Պրինտ», 2009, 272 էջ:
6. *Маркушевич А.И.* Ряды. Элементарный очерк: М., «Наука», 1979, 192 с.
7. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. Учеб. пособие для студентов ВТУЗ-ов: М., «Наука», 1975, 368 с.
8. *Кречмар В.А.* Задачник по алгебре: М., «Наука», 1964, 388 с.
9. *Митропольский А.К.* Краткие математические таблицы: М., «Наука», 1968.
10. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы: М., «Наука», 1973, 288 с.
11. *Ֆեյնման Ռ.* Ֆիզիկական օրենքների բնույթը, Եր., «Հայաստան» հրատարակչություն, 1975, 276 էջ:
12. *Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան Ա., Մայիլյան Ս.* Ֆիզիկա-10: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար, Եր., «Էդիթ Պրինտ», 2010, 272 էջ:

13. *Ղազարյան Է.* Դպրոցական ֆիզիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ընտրովի հարցեր, Եր., «Էդիթ Պրինտ», 2009, 308 էջ:
14. *Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան Ա., Մայիլյան Ս.* Ֆիզիկա-11: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար, Եր., «Էդիթ Պրինտ», 2010, 368 էջ:
15. *Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան Ա., Մայիլյան Ս.* Ֆիզիկա-12: Ավագ դպրոցի 12-րդ դասարանի դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար, Եր., «Էդիթ Պրինտ», 2011, 264 էջ:
16. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М., «Педагогика», 1989.
17. *Аль-Халили Джим.* Парадокс. Девять великих загадок физики: СПб, «Питер», 2017, 288 с.
18. *Чернин А.Д.* Физика времени: М., «Наука», 1987, 224 с. (Бчка «Квант», Вып. 59.)
19. *Астахов А.В., Широков Ю.М.* Курс физики, т. 3: Квантовая физика, М., «Наука», 1983, 240 с.
20. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М., «Наука», 1977, 552 с.
21. *Кожеуров В.А.* Статистическая термодинамика. М., «Металлургия», 1975, 176 с.

Էդուարդ Ղազարյան, Սոս Մայիլյան
ՖԻԶԻԿԱ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
(ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ԿԱՊԵՐ)

ՌՀՀ Հրատարակչության գլ.խմբագիր – Մ.Է. Ավագյան
Հրատարակչության խմբագիր – Է.Ա. Ռուխկյան
Համակարգչային էջադրում – Ա.Գ. Անտոնյան

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского университета:
0051, г. Ереван, ул. ОвсепаЭмина, 123
тел./факс: (+374 10) 27–70–52, (внутр. 42–02)
e-mail: redaction@gmail.com

Заказ № 4
Подписано к печати 19.03.2018г.
Формат 60x70 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Объем 9.5 усл. п.л. Тираж 200 экз