Ш.А. ГРИГОРЯН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник по высшей математике для нематематических факультетов

Издание второе, дополненное

ЕРЕВАН
2017

Շ.Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Դասագիրք բարձրագույն մաթեմատիկայի
ոչ մաթեմատիկական պրոֆեսորադասախոսական
կազմ

Երկրորդ հրատարակություն, վերանայված

ԵՐԵՎԱՆ
2017

Ш.А. ГРИГОРЯН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник по высшей математике для нематематических факультетов

Издание второе, дополненное

ЕРЕВАН
2017

УДК 510 (07)
ББК 22. 1я73
Г 835

Рекомендовано к изданию
Ученым советом Института математики
и высоких технологий Российско-Армянского университета

Рецезенты: доктор физ.-мат наук, профессор Карапетян Г.А.;
доктор физ.-мат наук, профессор Маркарян В.Н.,
доктор физ.-мат наук, профессор, член-корр. НАН РА Саакян А.А.

Г 835 Григорян Ш.А. Высшая математика // Учебник по высшей математике для нематематических факультетов (Издание второе, дополненное): – Ер.: Изд-во РАУ, 2017. 211 с.

Г $\frac{1602010000}{0180(01)07}$ 2017 ББК 22. 1я73

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Учебник по высшей математике для нематематических факультетов

Книга содержит четыре главы, в том числе: элементы высшей алгебры, элементы аналитической геометрии на плоскости, элементы математического анализа и элементы теории вероятностей.

Отличием настоящего издания от предыдущего является включение главы 4, посвященной элементам комбинаторики и теории вероятностей. Дополнен текст первого издания главы 3: включены функции многих переменных, частные производные, экстремум функции многих переменных, понятие о производных высшего порядка, правила Лопиталя, ряд Тейлора, числовые ряды. Частично переработан и дополнен текст в главах 2 и 3.

Увеличено число задач по всем главам книги, а также добавлено много рисунков для геометрического истолкования некоторых теорем и определений.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору **Карапетяну Гарнику Альбертовичу** за содействие в публикации книги после прочтения рукописи; доктору физ.-мат наук, профессору **Маркаряну Вачагану Николаевичу** за полезные советы при ознакомлении с рукописью; доктору физ.-мат. наук, профессору, член-корреспонденту НАН РА **Саакяну Артуру Артушевич**у за ценные замечания и советы при прочтении рукописи.

Учебник предназначен для студентов и преподавателей университетов для нематематических факультетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1
Элементы высшей алгебры

1.1 Понятие множества. Числовые множества

В математике все понятия делятся на первичные и определяемые через первичные, или уже известные. Первичные понятия не могут быть определены. Они объясняются на примерах. С их помощью определяют другие понятия. Основным понятием в математике, ее фундаментом, является понятие **множества**. Совокупность, семейство, набор, объединение – синонимы слова множество.

Множество – это совокупность обьектов, которые обладают одним и тем же свойством. Объекты, из которых состоит множество, называют ***элементами*** или ***точками.*** Множество обозначают большими буквами, а их элементы – малыми.

Для кратких записей в дальнейшем мы будем пользоваться следующими символами:

$x \in X$ (элемент x из множества X),

$\in$ – принадлежит, $\notin$ – не принадлежит,

$x \notin X$ (элемент x не является элементом множества X)

$\exists$ – существует или найдется,

$\forall$ – любой, каждый, всякий,

$\varnothing$ – пустое множество,

$\Rightarrow$ – следует,

$\Leftrightarrow$ – утверждения эквивалентны,

$\bigcup$ – объединение множеств,

$\bigcap$ – пересечение множеств.

$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – означает, что $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементы множества *X*,

$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, ...\}$ – означает, что

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ элементы множества X.

Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они совпадают и пишут: $X=Y$.

Из элементарной математики известно, что множество вещественных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Из школьного курса известны следующие множества:

$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ldots\}$ – натуральные числа,

$\mathrm{Z}=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots,\ \pm n,\ \ldots\}$ – целые числа,

$Q=\left\{\dfrac{m}{n},\ m\in Z;\ n\in N\right\}$ – множество рациональных чисел,

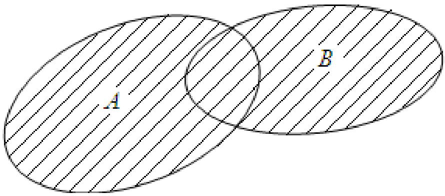
J – множество иррациональных чисел.

R – множество действительных (вещественных) чисел.

1.1.1 Операции над множествами

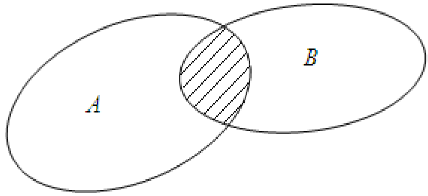
а) Объединение множеств. Объединением двух множеств A и B называется множество $A\bigcup B$, элементами которого являются элементы, принадлежащие хотя бы одному из этих множеств. Символически это выглядит так:

$$a\in A\bigcup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A \\ a\in B \end{array}\right.$$



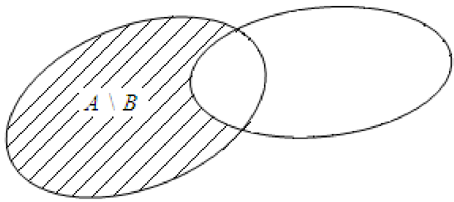
б) Пересечение множеств. Пересечением множеств A и B называется такое множество $A\bigcap B$, элементы которого принадлежат и A и B. Символически это можно записать так:

$$a \in A \bigcap B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ a \in B \end{cases}$$



в) Вычитание множеств. Вычитанием множества B из A называется множество $A \setminus B$, элементы которого принадлежат A и не принадлежат B т.е.

$$a \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ a \notin B \end{cases}$$



г) Говорят, что множество A является **подмножеством** множества B или $A \subset B$, если $A \neq B$, и любой элемент из A является элементом из B. Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

1.1.2 Множество вещественных чисел и действия над ними

Множество вещественных чисел – объединение рациональных и иррациональных чисел. Любое вещественное число представляет из себя бесконечную десятичную дробь. Рациональное число является либо целым, либо конечной или периодической бесконечной дробью. А иррациональное число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью.

Теорема. $\sqrt{2}$ – иррациональное число, или не существует такого рационального числа, квадрат которого равен двум.

Доказательство. Допустим $\sqrt{2}$ рациональное число, тогда его можно представить в виде несократимой дроби, то есть $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$, тогда $2=\dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=2n^2 \Rightarrow m=2k \Rightarrow$ $4k^2=2n^2 \Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n=2l \Rightarrow \sqrt{2}=\dfrac{2k}{2l}=\dfrac{k}{l}$. Получили противоречие, так как дробь сократимая.

Для любой пары a и b вещественных чисел определены, и, притом, единственным образом, два вещественных числа $a+b$ и $a\cdot b$ называемые их суммой и произведением, обладающие следующими свойствами, каковы бы ни были числа a, b, c.

1^0. $a+b=b+a$ (переместительное свойство)

2^0. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сочетательное свойство)

3^0. $a\cdot b=b\cdot a$ (переместительное свойство)

4^0. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (сочетательное свойство)

5^0. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (распределительное свойство)

6^0. Существует единственное число 0 такое, что $a+0=a$ для любого числа $a\in R$.

7^0. Для любого числа $a\in R$ существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$.

8^0. Существует единственное число $1\neq 0$ такое, что для любого числа $a\in R$ имеет место равенство $a\cdot 1=a$.

9^0. Для любого числа $a\in R$ существует такое число a^{-1}, что $a\cdot a^{-1}=1$. Число a^{-1} обозначается также символом $\dfrac{1}{a}$.

1.1.3 Сравнение вещественных чисел

Для любых двух вещественных чисел устанавливается одно из соотношений $a = b$ (a равно b), $a > b$ (a больше b), $a < b$ (a меньше b). Отношение равно (=) обладает свойством, если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$. Отношение больше $(>)$ обладает следующими свойствами.

10^0. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

11^0. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

12^0. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a \cdot b > 0$.

Вместо $a > b$ можно написать $b < a$, а запись $a \geq b$ означает, что либо $a = b$, либо $a > b$.

Соотношения $a \geq b$, $a > b$, $a \leq b$, $a < b$ называют неравенствами, а неравенства $a < b$ или $a > b$ называются строгими неравенствами.

Пусть a и b два любых числа, причем $a < b$. Вот некоторые наиболее употребляемые числовые множества:

$$\{x:\ a \leq x \leq b\} = [a;b]$$

$$\{x:\ a < x \leq b\} = (a;b]$$

$$\{x:\ a \leq x < b\} = [a;b)$$

$$\{x:\ a < x < b\} = (a;b)$$

$$\{x: a \leq x\} = [a;+\infty)$$

$$\{x: a < x\} = (a;+\infty)$$

$$\{x: x \leq b\} = (-\infty;b]$$

$$\{x:\ x < b\} = (-\infty;b)$$

$$\{x: -\infty < x < +\infty\} = (-\infty;+\infty)$$

Первые четыре промежутка ограниченные, а остальные – неограниченные.

Ограниченные: отрезок, полуинтервалы, интервал.

1.1.4 Абсолютная величина числа (модуль)

Определение. Абсолютной величиной или ***модулем*** числа x называется само число x, если $x \ge 0$, или число $-x$, если $x < 0$.

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Другими словами, абсолютная величина любого числа на числовой оси показывает расстояние этого числа до нуля.

Отметим ряд свойств, вытекающих из определения модуля.

1^0. $|x| \ge 0$

2^0. $|x| = |-x|$

3^0. $-|x| \le x \le |x|$

4^0. $|x| \le c \Leftrightarrow -c \le x \le c$

5^0. $|x+y| \le |x| + |y|$ (неравенство треугольника)

6^0. $|x-y| \ge |x| - |y|$

7^0. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

8^0. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, если $y \ne 0$.

Доказательство 5^0. Согласно 3^0, имеют место неравенства: $-|x| \le x \le |x|$ и $-|y| \le y \le |y|$, складывая их почленно, получим

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le (|x|+|y|)$$

Это двойное неравенство, в силу 4^0, равносильно неравенству

$$|x+y| \le |x|+|y|.$$

Доказательство 6^0. Для любых x и y имеем $x = y+(x-y)$. В силу 5^0 следует $|x| = |y+(x-y)| \le |y|+|x-y|$. Откуда $|x-y| \ge |x|-|y|$. Заметим, что

$$|x+y| \ge |x|-|y|.$$

Пусть ε – положительное число, тогда неравенства $|x| \le \varepsilon$ и $-\varepsilon \le x \le \varepsilon$ равносильны, что следует из 4^0.

Определение. Для любого $\varepsilon > 0$ открытый промежуток $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ с центром в точке a называется ε –***окрестностью*** точки a.

1.2 Матрицы. Операции над матрицами

1.2.1 Виды матриц

Определение 1. Прямоугольная таблица, составленная из чисел или выражений, содержащая m строк и n столбцов, называется ***матрицей***.

Числа или выражения, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Матрицы обозначаются заглавными буквами, например A, B, C, … , а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двумя индексами a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Матрицу A сокращенно можно записать так $A=\left(a_{ij}\right)$ или $A=\left\|a_{ij}\right\|, (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Матрица (1) называется ***прямоугольной*** порядка $m\times n$.

Определение **2.** Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной.***

Если число строк равно числу столбцов, т. е. $m=n$, то матрицу называют матрицей n-го порядка.

Определение **3.** Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки, то есть $i=j$, называются ***диагональными*** и образуют главную диагональ матрицы.

Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11},\ a_{22},\ \dots,\ a_{nn}$.

Определение **4.** Если все ***недиагональные*** элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется ***диагональной.***

Определение **5.** Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется ***единичной*** матрицей n-го порядка и обозначается буквой E.

Например, единичная матрица 3-его порядка имеет вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение* 6.** Матрица любого порядка называется ***нулевой или нуль−матрицей, если все ее элементы равны нулю.

Например, нулевая матрица 3-его порядка имеет вид:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 7. Матрица, состоящая из одной строки и m столбцов, называется ***матрицей – строкой***.

Определение 8. Если число столбцов равно единице, а число строк равно m, то одностолбцовая матрица называется ***вектор – столбцом.***

Например, первая матрица строка , а вторая матрица столбец

$$B=\left(b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m\right),\ A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Определение 9. Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ считаются равными, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах, то есть $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех i и j, при этом число строк и столбцов матриц A и B должно быть одинаковым.

Треугольные матрицы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где первая называется ***нижней треугольной*** матрицей, если все элементы выше диагональных равны нулю, а вторая – ***верхней треугольной*** матрицей, если все элементы ниже диагональных равны нулю.

Определение 10. Транспонированной матрицей A' называется матрица, которая получается из данной матрицы переменой местами строк и столбцов с сохранением порядка следования элементов.

Итак, для матрицы вида (1) транспонированная матрица имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

1.2.2 Сложение матриц

Суммой двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ с одинаковым количеством строк и столбцов, называется новая матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

Для обозначения суммы матриц используется запись: $A+B=C$. Операция составления суммы матриц называется их сложением.

Итак, по определению

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Из определения суммы матриц вытекает, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения вещественных чисел.

1^0. Переместительное свойство: $A+B=B+A$.

2^0. Распределительное свойство:

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

1.2.3 Умножение матриц на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij}),(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ на вещественное число λ называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой равны $c_{ij}=\lambda a_{ij},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Для обозначения произведения матрицы на число используется запись: $C=\lambda A$. Операция составления произведения матрицы на число называется ***умножением матрицы на это число.*** Отметим свойства, которым она удовлетворяет.

1^0. Сочетательное свойство: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

2^0. Распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

3^0. Распределительное свойство относительно суммы чисел:

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$

1.2.4 Произведение двух матриц

Произведением матрицы $A = (a_{il})$, $\left(i = \overline{1,m};\ l = \overline{1,k}\right)$ ***порядка*** $m \times k$ ***на матрицу*** $B = \left(b_{lj}\right)$, $(l = \overline{1,k};\ j = \overline{1,n})$ ***порядка*** $k \times n$ называется новая матрица $C = \left(c_{ij}\right)$, $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ порядка $m \times n$ у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на j - ый столбец матрицы B т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

или

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}).$$

При этом, число столбцов матрицы *A* должно быть равно числу строк матрицы *B*. В противном случае произведение не определено. Произведение двух матриц обозначается $A \cdot B = C$. Заметим, что умножение матриц не подчиняется перестановочному свойству: $A \cdot B \neq B \cdot A$. Отметим свойства произведения матриц.

1^0. Сочетательное свойство: $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$

2^0. Распределительное свойство, относительно суммы матриц:

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

или

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C .$$

Единичная матрица n-го порядка обладает свойством, аналогичным числу 1 при перемножении вещественных чисел. А именно: умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу и умножение единичной на квадратную того же порядка не меняет матрицу.

Таким образом, $A\cdot E = E\cdot A = A$. Нулевая матрица удовлетворяет условиям $A\cdot O = O\cdot A = O$ и $A+O = O+A = A$.

1.3 Определители

1.3.1 Вычисление определителей 2-го и 3-его порядков

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу любого порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

С каждой матрицей свяжем вполне определенную числовую характеристику, называемую ***определителем*** соответствующим этой матрице.

Для обозначения определителя используют один из следующих символов:

$$|A|,\ \det A,\ \Delta$$

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента $A=\left(a_{11}\right)$, пределителем 1-го порядка соответствующего такой матрице, мы назовем величину этого элемента, т. е. $|A|=a_{11}$.

Если порядок матрицы равен двум, т. е., если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то определителем 2-го порядка, соответствующим такой матрице, назовем число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ или

$$|A|=\det A=\Delta=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}..$$

Для матрицы 3-го порядка также можно записать, как вычисляется определитель 3 -его порядка, а именно, по формуле:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Как видно, записана алгебраическая сумма из 6 слагаемых. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми входят члены определителя, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется правилом треугольников (правило Сарруса).

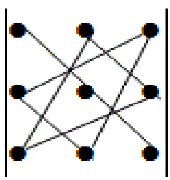


Рис. 1

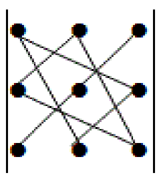


Рис. 2

На рисунке 1 отмечена схема, при помощи которой находим первые три положительных слагаемых, каждое из которых представляет из себя произведение трех элементов, а на рисунке 2, следуя схеме, слагаемые берутся со знаком минус.

1.3.2 Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если строки и столбцы этого определителя поменять ролями (определитель транспонированной матрицы не меняется).

Свойство 2. Перестановка двух строк (двух столбцов) определителя равносильна умножению его на -1.

Свойство 3. Если определитель имеет два одинаковых столбца (строки), то он равен нулю.

Свойство 4. Умножение всех элементов одного столбца (строки) определителя на любое число λ , равносильно умножению определителя на число λ .

Например, $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Свойство 5. Если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то сам определитель равен нулю.

Свойство 6. Если элементы двух строк (двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 7. Если каждый элемент i -го столбца определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в i -ом столбце имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; элементы, стоящие на остальных местах , у всех трех определителей не меняются.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots c_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots c_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots c_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 8. Если к элементам некоторого столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя не изменится.

1.3.3 Вычисление определителей высоких порядков

Пусть имеем матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

При вычислении определителей высоких порядков необходимо ввести новые понятия.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}).$$

Таким образом, алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$–четное число и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$–нечетное число.

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая ***теорема Лапласа***.

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

разложение по элементам i-ой строки, где $i = \overline{1,n}$,

$$\det A = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

разложение по элементам j-го столбца, где $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, вычисление определителя n-го порядка, с помощью теоремы Лапласа можно свести к вычислению определителя $(n-1)$-го порядка, затем спускать порядок до тех пор, пока не получатся определители 3-го или 2-го порядков. Вычисление существенно упростится, если перед разложением определителя по элементам строки или столбца, как можно больше их число будет превращено в нули. Это становится возможным благодаря применению свойств определителей. Используя свойства определителя, можно привести матрицу к треугольной.

Если матрица треугольная, то определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

1.3.4 Обратная матрица. Алгоритм вычисления обратной матрицы

Для каждого числа $a \neq 0$, существует обратное число a^{-1}, такое что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц существует аналогичное понятие.

Определение. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на исходную, как справа, так и слева, получается единичная матрица, т.е.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную, причем обратная матрица является квадратной того же порядка. Однако, не каждая квадратная матрица имеет обратную. Для существования матрицы A^{-1} необходимым и достаточным условием является требование $\det A \neq 0$.

Матрица, определитель которой не равен нулю $(\det A \neq 0)$ называется ***невырожденной***, в противном случае $(\det A = 0)$ – ***вырожденной.***

Для того, чтобы построить обратную матрицу необходимо выполнить следующие действия.

1) Вычисляем определитель исходной матрицы, если $\det A = 0$, то $A -$ вырожденная матрица и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}.

2) Строим транспонированную к A матрицу, которую обозначим через A'.

3) Найдем алгебраические дополнения

$$A'_{ij},\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n})$$

элементов транспонированной матрицы A' и составляем из них матрицу :

$$\tilde{A} = \left(A'_{ij}\right),\ (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$$

Отметим, что

$$A'_{ij} = A_{ji},\ (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$$

4) Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\ \left(|A| \neq 0\right)$$

5) Проверяем правильность построения обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения: $A^{-1}A = AA^{-1} = E.$

1.4 Решение систем линейных уравнений методами Крамера, Гаусса и обратной матрицы

1.4.1 Метод Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Вычисляем вспомогательные определители , следуя формуле:

$$\Delta_{x_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ j = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Для каждого j, элементы j-ого столбца заменяются на свободные члены $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$. Решение можно записать в виде следующих формул:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \qquad (3)$$

Применим метод Крамера для нахождения решения системы из 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными.

Пусть дана система из 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Причем,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Находим вспомогательные определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

где Δ_{x_1} – определитель, получающийся из основного заменой 1-го столбца столбцом из свободных членов $b_1,\ b_2,\ b_3$, с сохранением 2-го и 3-го столбцов, а в определителе Δ_{x_2} 2-ой столбец заменяется столбцом из свободных членов $b_1,\ b_2,\ b_3$ с сохранением 1-го и 3-го столбцов и, наконец, в определителе Δ_{x_3} 3-ий столбец заменяется столбцом из свободных членов $b_1,\ b_2,\ b_3$ сохранив 1-ый и 2-ой столбцы.

Тогда решение (x_1, x_2, x_3) имеет вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \qquad (3)$$

Формулы (3) называются ***общими формулами Крамера***, а метод нахождения решения системы (1) называется ***методом Крамера***.

Следует отметить, что, если $\Delta = 0$, то решение существует, но не единственное или вообще не существует. Исследование этого вопроса требует более глубокие знания (см. литература [1]).

1.4.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса нахождения решения системы (1) основывается на том, что от заданной системы, при помощи эквивалентных преобразований, переходят к системе, которая решается «проще», чем исходная система, эквивалентная заданной. Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются следующие.

1) Перемена местами двух уравнений в системе.

2) Умножение какого−либо уравнения системы на действительное число $c \neq 0$.

3) Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса следует выписать матрицу A из коэффициентов системы, присоединить к ней столбец из свободных членов, для удобства отделенный вертикальной чертой, и все преобразования выполнять над строками этой расширеной матрицы.

Итак, метод Гаусса состоит в следующем: так как не все элементы матрицы A равны нулю, то перестановкой строк можно добиться того, чтобы первый диагональный элемент был отличен от нуля $\left(a'_{11} \neq 0\right)$.

1) Сложением первой строки, умноженной на соответствующий множитель, с другими строками всегда можно добиться, чтобы все элементы первого столбца, стоящие ниже a'_{11} были равны нулю.

2) Теперь или уже получена треугольная матрица или в строках со 2-ой по n-ю имеется по крайней мере один ненулевой элемент во втором столбце, который при помощи перестановки строк может быть поставлен на 2-ое место в главной диагонали. Далее, выполняем операции пункта 2), применяя его к 2-ой строке и получаем, что все элементы 2-го столбца, стоящие ниже 2-го главного диагонального элемента, равны нулю и т.д. Продолжаем, пока через конечное число шагов не получим треугольную матрицу.

1.4.3 Метод обратной матрицы

Метод обратной матрицы так же может быть использован для нахождения решения системы (1). Пусть матрица A составлена из коэффициентов при неизвестных $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ системы (1). Построим обратную матрицу A^{-1} матрицы A. Обозначим одностолбцовые матрицы через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда из определения умножения матриц, систему уравнений (1) можно записать в виде:

$$A \cdot X = B \qquad (4)$$

Умножим (4) слева и справа на A^{-1}, а так как $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, то получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ и } X = A^{-1} \cdot B \qquad (5)$$

Итак, из (5) мы получим решение системы (1), если приравняем соответствующие элементы матриц. Так как матрицы равны, когда их элементы совпадают и совпадает порядок матриц.

Задачи к главе 1

1. Найти $A \bigcup B$, если

а) $A=[5;9]$, $B=[6;7]$. б) $A=(-\infty;7)$, $B=(6;+\infty)$.

в) $A=(5;10)$, $B=\{5;8;9;10\}$. г) $A=[-7;0]$, $B=(-1;2)$.

д) $A=(-13;6)$, $B=\{-13;-10;6\}$.е) $A=(3;12)$, $B=\{3;8;9;12\}$

. ж) $A=\{-5;-4;0;4;5;8\}$, $B=\{-16;-14;1;4;7;8\}$.

з) $A=\{-15;-4;0;4;15;8\}$, $B=\{-6;-4;1;4;7;8\}$. е) $A=[3;+\infty)$,

$B=Z_+$. к) $A=[5;10]$, $B=(4;6)\cup(7;9)$. л) $A=\{-2;0;1;3;7\}$

$B=\{-1;0;1;\sqrt{3};7;9\}$.м) $A=[1;5]$, $B=[2;7)$ н) $A=[2;3)$,

$B=[3;5]$. о) $A(-\infty;1)$, $B=[1;+\infty)$. п) $A=\{2k;k\in N\}$,

$B=\{2k-1;k\in N\}$.

2. Найти $A\bigcap B$, если

а) $A=[-3;+\infty)$, $B=Z_+$. б) $A=(-\infty;-8)$, $B=Z_-$.

в) $A=[5;9]$, $B=[6;7]$. г) $A=(3;12)$, $B=\{3;8;9;12\}$.

д) $A=[5;10]$, $B=(4;6)\cup(7;9)$. е) $A=\{-15;-4;2;4;5;18\}$,

$B=\{-16;-4;11;4;7;18\}$. ж) $A=\{-15;-4;0;4;15;8\}$,

$B=\{-6;-4;1;4;7;8\}$. з) $A=[-7;0]$, $B=(-1;2)$. и) $A=[-13;6]$,

$B=\{-14;-10;6\}$. к) $A=\{-5;-3;0;4;5;9\}$

$B=\{-7;-4;1;4;6;7;8;9\}$.

3. Найти $A\setminus B$, если

а) $A=(-13;8)$, $B=(7;+\infty)$.б) $A=[-11;0]$, $B=(-7;-1)$.

в) $A=[5;10]$, $B=\{5;8;9;10\}$. г) $A=\{-15;-4;0;4;15;8\}$,

$B=\{-6;-4;1;4;7;8\}$. д) $A=(-10;5)$, B=Z. е) $A=[-13;6]$,

$B=\{-13;-10;6\}$. ж) $A=(-\infty;6]$, $B=(5;+\infty)$.

з) $A=[5;10]$, $B=(5;6)\cup(7;10)$.

4. Выполнить действия:

а) $7\begin{pmatrix}1&2\\3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$, б) $4\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&4\\2&-5\end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix}3&2\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\2&5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&4\\2&5\end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix}3&0\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}0&4\\2&1\end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix}0&1\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0&4\\2&5\end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix}3&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&9\\2&5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}5&4\\2&1\end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\2&-5\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}0&4\\-2&5\end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$,

к) $3\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\6&11\end{pmatrix}$

л) $2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&7\\8&9\end{pmatrix}$, м) $3\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$.

5.Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^3$, б) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2$, д) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\\4&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&2\\1&0&7\end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, ж $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$,

и) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 & 31 \\ 1 & 3 & -50 \\ 2 & 1 & 24 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить произведение матриц 2-го и 3-го порядков:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$,

е) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, ж) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

9. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, ж) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

11. Вычислить определители, разложив их по элементам 1-го столбца:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$

12. Вычислить определители, разложив их по элементам столбца или строки, которые содержат наибольшее число нулей:

а) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

13. Вычислить определители, разложив их по элементам строки илистолбца содержащие буквы:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & -1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

14. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

15. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 9 & 5 \\ 11 & 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

ж) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, и) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

к) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, л) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, м) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

16. Найти обратную матрицу для матрицы 2-го порядка:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

17. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$,

б) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$,

в) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$,

г) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Найти обратную матрицу для матрицы 3-го порядка:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$,в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,е) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

19. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. Найти решения систем двух уравнений с двумя неизвестными по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 35 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 = 40 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$.

21. Найти решения систем трех уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$, д) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$, е) $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=3 \\ 4x_1+x_2-7x_3=-2 \\ 11x_1-x_2+2x_3=12 \end{cases}$,

ж) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1-2x_2+x_3=9 \\ x_1-4x_2-2x_3=-12 \end{cases}$, з) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-1 \end{cases}$

22. Найти решения систем трех уравнений с тремя неизвестными по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+5x_3=-10 \\ 3x_1-2x_2+x_3=3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1+5x_2-10x_3=-3 \\ 2x_1-5x_2+3x_3=2 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=6 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=9 \\ 2x_1+3x_2+x_3=10 \\ 2x_1+x_2+3x_3=10 \end{cases}$,

д) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=6 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=12 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$, е) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=-5 \\ x_1+3x_2-x_3=-5 \\ 4x_1-5x_2+3x_3=4 \end{cases}$,

ж) $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=9 \\ 2x_1+x_2-4x_3=1 \\ x_1-2x_2+7x_3=2 \end{cases}$, з) $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=2 \\ 3x_1+3x_2-5x_3=-9 \\ x_1-4x_2+6x_3=15 \end{cases}$,

и) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-12 \\ 6x_1-3x_2+x_3=3 \\ 4x_1+x_2-6x_3=-24 \end{cases}$, к) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=11 \\ 3x_1+x_2-x_3=6 \end{cases}$, л) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=2 \\ -4x_1+2x_2+3x_3=2 \end{cases}$, м) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 6x_1-3x_2+x_3=4 \\ 4x_1+x_2-6x_3=-1 \end{cases}$,

н) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=5 \\ 4x_1+3x_2+3x_3=7 \end{cases}$, о) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$.

23.Найти решение системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+4x_2+5x_3=3 \\ 3x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+x_2-x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=7 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+x_2-x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=10 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ x_1-x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-x_2+5x_3=2 \end{cases}$.

24. Найти решение системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2+5x_3=12 \\ 3x_1-2x_2+x_3=3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ 4x_1+x_2+3x_3=2 \\ x_1+2x_2-3x_3=6 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=6 \\ 2x_1-x_2+5x_3=5 \\ x_1+x_2+4x_3=7 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=7 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 5x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$,

д) $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=8 \\ 2x_1+x_2-4x_3=0 \\ x_1-2x_2+7x_3=4 \end{cases}$, е) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=5 \end{cases}$, ж) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+3x_3=3 \end{cases}$, з) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=-3 \end{cases}$,

и) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=-3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=3 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$, к) $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=4 \\ 3x_1+3x_2-5x_3=5 \\ x_1-4x_2+6x_3=-1 \end{cases}$,

л) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-2 \\ 6x_1-3x_2+x_3=8 \\ 4x_1+x_2-6x_3=-2 \end{cases}$, м) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=12 \\ 3x_1+x_2-2x_3=3 \end{cases}$.

Ответы к задачам главы 1

1. а) $[5;9]$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $[5;10]$; г) $[-7;2)$; д) $[-13;6]$; е) $[3;12]$; ж) $\{-16,-14,-5,-4,01,4,5,7,8\}$; з) $\{-15,-6-4,0,1,4,7,8,15\}$; и) $(Z_+\setminus\{0,1,2\})\cup[3;+\infty)$; к) $(4;10]$; л) $\{-2;-1;0;1;\sqrt{3};3;7;9\}$; м) $[1;7]$; н) $[2;5]$; о) $(-\infty;+\infty)$; п) N. **2.** а) Z_+; б) $Z_-\setminus\{-8,-7,...,-1\}$; в) $[6;7]$; г) $\{8,9\}$; д) $[5,6)\cup(7,9]$; е) $\{-4,4,18\}$; ж) $\{-4,4,8\}$; з) $(-1,0]$; и) $\{-10,6\}$; к) $\{4,9\}$. **3.** а) $(-13,7]$; б) $[-11,-7]\cup[-1,0]$; в) $(5,8)\cup(8,9)\cup(9,10)$; г) $\{-15,0,15\}$; д) $(-10,-9)\cup(-9,-8)\cup(-8,-7)\cup...\cup(4,5)$; е) $(-13,-10)\cup(-10,6)$; ж) $(-\infty,5]$; з) $\{5\}\cup[6,7]\cup\{10\}$.

4. а) $\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 29 & 64 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 13 & -15 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 23 & 20 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 13 & 37 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 10 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, л) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$, м) $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 13 \\ 10 & 3 & 13 \\ 25 & 10 & 27 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

з) $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$,

к) $\begin{pmatrix} -4 & 11 & 34 \\ 5 & 5 & -2 \\ -10 & 4 & -141 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}$

, д) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$, з)

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **7.** а) 5; б) 5; в) 26; г) -36; д) 23; е) 1; ж) 20; з) 1; **8.** а) 6; б) -144;

в) 43; г) -54; д) 4; е) -11; ж) 5; з) -2; и) 3; **9.** а) -10; б) 2а;

в) $-2b^2$; г) 1; д) 2; е) 1; ж) 4; з) 0; **10.** а) $3abc-a^3-b^3-c^3$;

б) $a^3+b^3+c^3-3abc$; в) 0; г) $abc-x^2\left(a+b+c\right)+2x^3$;

11. а) -10; б) 4a; в) 3; г) $yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)$;

12. а) $-2b^2$; б) $-2x$; в) $c\left(2-a-b\right)+\left(a-b\right)^2$;

13. а) $3a-b+2c+d$; б) $-x-y-z+4t$; в) $-b+c-d$;

14. а) 10; б) 100; в) 60; г) $-xyc-yza-xzb$; д) 48;

е) $\left(a-b\right)^2+c\left(c-2a-2b\right)$; **15.** а) 737; б) -39; в) -73; г) 128;

д) -142; е) 25; ж) -58; з) 122; и) 8; к) 251; л) 0; м) 287;

16. а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{b}{bc-ad} \\ \dfrac{c}{bc-ad} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$. **17.** а) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ \dfrac{67}{7} & -\dfrac{16}{7} \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 46 & 17 \\ 8 & -68 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} -\dfrac{55}{7} & \dfrac{86}{7} \\ \dfrac{183}{7} & \dfrac{44}{7} \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} -38 & 25 \\ -8 & 57 \end{pmatrix}$. **18**. а) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -7 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} -\dfrac{7}{24} & \dfrac{11}{24} & -\dfrac{1}{24} \\ \dfrac{11}{24} & -\dfrac{7}{24} & \dfrac{5}{24} \\ -\dfrac{1}{24} & \dfrac{5}{24} & -\dfrac{7}{24} \end{pmatrix}$,в) $\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{9} & -\dfrac{2}{9} & \dfrac{4}{9} \\ -\dfrac{11}{9} & \dfrac{1}{9} & \dfrac{7}{9} \\ \dfrac{7}{9} & \dfrac{1}{9} & -\dfrac{2}{9} \end{pmatrix}$,г) $\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{18} & \dfrac{7}{18} & \dfrac{1}{18} \\ \dfrac{7}{18} & \dfrac{1}{18} & -\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{18} & -\dfrac{5}{18} & \dfrac{7}{18} \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{29} & \frac{9}{29} & \frac{4}{29} \\ \frac{9}{29} & \frac{1}{29} & -\frac{6}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{6}{29} & \frac{7}{29} \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{14} & \frac{11}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

з) $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$, и) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{14} & \frac{11}{14} \end{pmatrix}$, к) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{11}{28} & \frac{1}{28} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{28} & -\frac{5}{28} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

19. а) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}6 & 2{,}4 & 2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$.

20. а) $(3;1)$, б) $(5;4)$, в) $\left(-\frac{116}{7};\frac{75}{7}\right)$, г) $(0;2)$. **21**. а) нет единственного решения; б) (3;1;1); в) $(-67;-32;49)$,

г) $(2;-2;3)$, д) (3;4;5), е) (1;1;1), ж) $(-6;-3;9)$, з) $\left(-\frac{4}{3};4;\frac{5}{3}\right)$.

22. а) $(1;-1;-2)$, б) $(2;1;1)$, в) $(1;2;1)$, г) $(1;2;2)$, д) $(2;2;-1)$, е) $(-1;-1;1)$, ж) $(1;3;1)$, з) $(1;1;3)$, и) $(-1;-2;3)$, к) $(2;1;1)$, л) $(2;2;2)$, м) $(1;1;1)$, н) $(1;-1;2)$, о) $(1;1;-1)$. **23.** а) $(4{,}6;-7{,}8;5)$, б) $\left(\frac{5t-2}{3};\frac{5-7t}{3};t\right)$, $t \in R$, в) нет решения; г) $(-1;0;1)$, **24.** а) $(1;1;2)$, б) $(1;1;-1)$, в) $(1;2;1)$, г) $(1;1;1)$, д) $(1;2;1)$, е) $(1;-1;1)$, ж) $(-1;2;1)$, з) $(-2;1;1)$, и) $(1;1;-2)$, к) $(1;-1;-1)$, л) $(2;2;2)$, м) $(1;2;1)$.

Глава 2
Аналитическая геометрия на плоскости

2.1 Линии первого порядка

2.1.1 Прямоугольная система координат

Две взаимно перпендикулярные числовые оси, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу, образуют прямоугольную систему координат на плоскости. Числовые оси *Ox* и *Oy*, соответственно, называют осью абсцисс и осью ординат, а обе вместе – осями координат. Точка пересечения осей O называется началом координат. Плоскость, в которой расположены оси *Ox* и *Oy*, называется координатной плоскостью и обозначается *Oxy*.

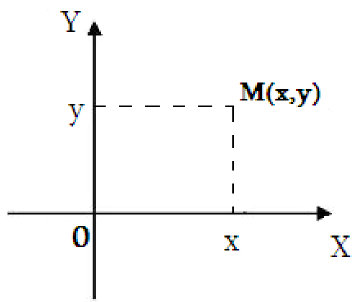


Рис. 3

Пусть точка *M* лежит на плоскости. Опустим перпендикуляры *MA* и *MB* на *Ox* и *Oy*, соответственно.

Прямоугольными координатами *x* и *y* точки *M* будем называть величины *OA* и *OB*: $x = OA,\ y = OB$ взятые с соответствующими знаками. Факт, что точка *M* имеет координаты *x* и *y*, обозначают как $M(x, y)$. Начало координат имеет координаты $O(0,0)$. Координатные оси разбивают плоскость на четыре части: их называют четвертями, квадрантами или координатными углами и нумеруют по определенному правилу.

Расстановка знаков координат точек в зависимости от их расположения в четвертях приведена на рис. 4.

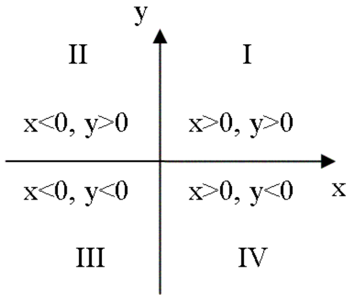


Рис. 4

2.1.2 Расстояние между двумя точками. Серединная точка отрезка.

Для любых точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости расстояние d между ними определяется формулой:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

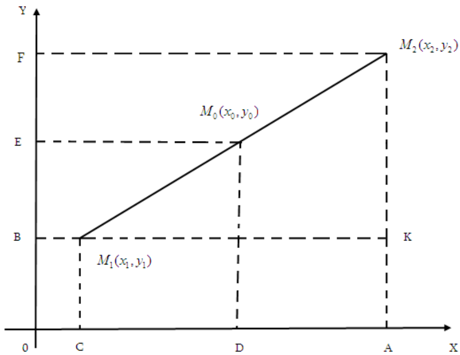


Рис.5

Чтобы убедиться в этом, (см. рис. 5) опустим перпендикуляры из точек M_1 и M_2 на *Oy* и *Ox* и обозначим точки их пересечения, соответственно, через B, F, C и *A*. Кроме того, через *K* обозначим точку пересечения прямых BM_1 и M_2A.

Очевидно,

$$M_1K = BK - BM_1,\ \ M_1B = x_1,\ \ BK = x_2,\ \ M_1K = x_2 - x_1,$$

$$M_2K = M_2A - AK = = M_2A - M_1C = M_2A - BO = y_2 - y_1 .$$

Так как $\Delta\, M_1M_2K$ – прямоугольный, то по теореме Пифагора, имеем:

$$d = \sqrt{\left(M_1K\right)^2 + \left(M_2K\right)^2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\ .$$

Пусть $M_0\left(x_0, y_0\right)$ серединная точка отрезка M_1M_2, тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2)$$

Действительно, опустим из точки M_0 перпендикуляры на оси *Ox* и *Oy* до пересечения с ними в точках D и E, соответственно. Рассмотрим две трапеции M_1CAM_2 и BM_1M_2F. В первой из них M_0D – средняя линия, длина которой равна полусумме длин оснований M_1C и AM_2, а так как $M_1C = y_1,\ AM_2 = y_2$, то

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Во второй трапеции M_0F – средняя линия , ее длина равна полусумме длин оснований M_1B и M_2F , но $M_1B = x_1$, а $M_2F = x_2$, тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Получили (2).

2.1.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана прямая, не перпендикулярная оси *Ox*. Угол α – угол наклона данной прямой к оси *Ox*, на который надо повернуть ось *Ox*, чтобы ее направление совпало с одним из направлений прямой. Угол α принимает множество значений, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где n натуральное число. Обычно берут наименьшее положительное значение угла α , на который надо повернуть против часовой стрелки ось *Ox*. В таком случае $0 < \alpha < \pi$, а $tg\alpha$ называется угловым коэффициентом этой прямой и обозначается через k:

$$k = tg\alpha .$$

Отсюда следует, что если $\alpha = 0$, то $k = 0$, т.е. прямая параллельна оси *Ox*. Если же $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = tg\alpha$ не имеет смысла.

Выведем уравнение прямой с угловым коэффициентом k и отрезком длиной b, который отсекает прямая на *Oy*.

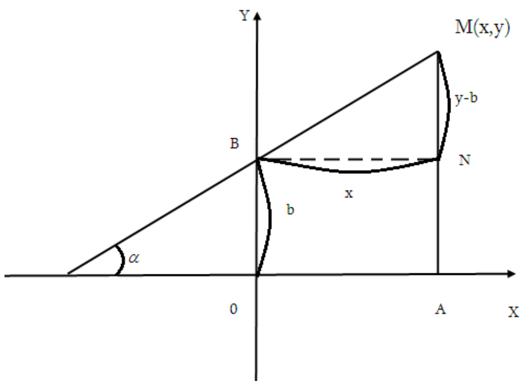


Рис.6

Пусть $M(x, y)$ переменная точка с текущими координатами x и y (см. рис. 6). Рассмотрим точку B с координатами $(0, b)$. Проведем прямые BN и MN параллельные Ox и Oy, соответственно. Получаем прямоугольный треугольник BMN. Очевидно, что $\frac{MN}{BN} = tg\alpha$, $BN = x$, $MN = y - b$. Отсюда получаем: $\frac{y-b}{x} = k$, затем $y - b = kx$ и, наконец, $y = kx + b$. Так как $M(x, y)$ лежит на прямой, то $y = kx + b$ является уравнением прямой с ***заданным угловым коэффициентом***.

2.1.4 Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом

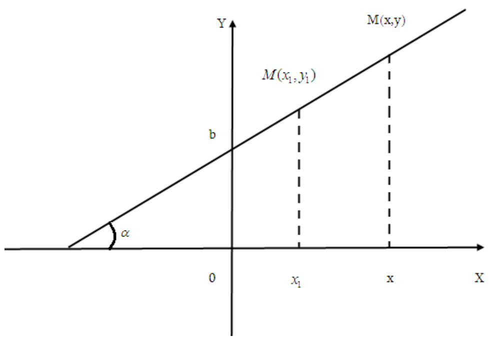


Рис.7

Пусть задана точка $M_1(x_1, y_1)$ и угловой коэффициент k (где $k = tg\alpha$, α −угол между заданной прямой и осью Ox (см. рис.7). Если искомая прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то координаты должны удовлетворять уравнению

$$y = kx + b \qquad (4)$$

т. е. $y_1 = kx_1 + b$, откуда определим $b = y_1 - kx_1$ и подставим в (4), тогда получим $y = kx + y_1 - kx_1$ или

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right) \tag{5}$$

Это уравнение (5) прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.

2.1.5 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1\left(x_1, y_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2\right)$. В уравнении (5) точку $M\left(x, y\right)$ заменим фиксированной точкой $M_2\left(x_2, y_2\right)$ и получим:

$$y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right)$$

Определим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и подставим в уравнение (5), то получим уравнение прямой:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \tag{6}$$

Это уравнение, если $y_1 \neq y_2$, можно записать в виде:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{7}$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой будет $y = y_1$, т.е. проходящая параллельно оси *Ox*, а если $x_2 = x_1$, то прямая проходящая через M_1 и M_2 параллельна оси *Oy*, и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

2.1.6 Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке *M*. Уравнение l_1 будет иметь вид $y = k_1 x + b_1$, где $k_1 = tg\alpha_1$, а урвнение l_2: $y = k_2 x + b_2$, где $k_2 = tg\alpha_2$.

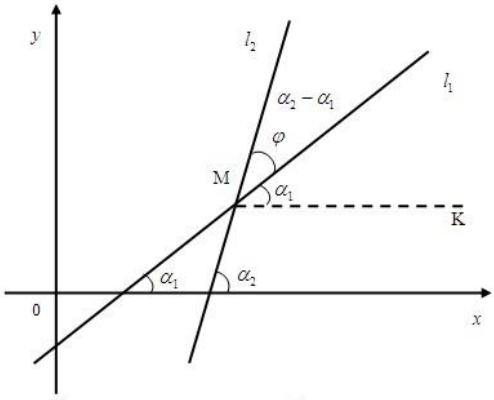


Рис.8

Пусть φ – угол между прямыми l_1 и l_2 $\left(0 < \varphi < \pi\right)$.

Из геометрии известно, если прямая *MK* параллельна *Ox*, то $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, отсюда

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

или

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (8)$$

Формула (8) определяет один из углов между прямыми l_1 и l_2, другой угол равен $\pi - \varphi$.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если l_1 и l_2 **параллельны**, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$. В этом случае числитель в правой части формулы (8) равен нулю, т.е.

$k_2 - k_1 = 0$, значит $k_2 = k_1$.

Итак, условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Если прямые l_1 и l_2 **перпендикулярны**, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \; tg\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}.$$

Итак, условием перпендикулярности двух прямых является то, что их коэффициенты взаимно обратны и с противоположными знаками.

2.1.7 Общее уравнение прямой

Теорема. В прямоугольных координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9)$$

И обратно, уравнение (9) при произвольных коэффициентах *A, B, C* (*A, B* не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси *Ox*, то она определяется уравнением (4) $y=kx+b$, т.е. уравнением вида (9), где

$$A = k, \; B = -1, \; C = b.$$

Если прямая перпендикулярна оси *Ox*, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине отрезка, отсекаемого прямой на оси *Ox,* т.е. $x=a$, что так же является уравнением вида (9), где

$$A = 1, \; B = 0, \; C = -a.$$

Теперь рассмотрим случай, когда прямая параллельна оси Ox, тогда ее уравнение: $y=b$ является уравнением вида (9), где

$$A=0,\ B=1,\ C=-b.$$

Итак, первое утверждение доказано.
Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (9). Если $B\neq 0$, то (9) можно записать в виде:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Если предположить, что $k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}$, то получим уравнение (4), которое определяет прямую.

Если $A\neq 0, B=0$ и (9) примет вид

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Обозначим $a=-\frac{C}{A}$, получим $x=a$, т.е. уравнение прямой, перпендикулярной к оси Ox.

Если $B\neq 0, A=0$, то уравнение (9) примет вид

$$y=-\frac{C}{B},$$

и если обозначить $b=-\frac{C}{B}$, то получим $y=b$, т.е. уравнение прямой параллельной оси Ox.

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется ***общим уравнением прямой.***

2.1.8 Геометрический смысл неравенства и системы неравенств первой степени с двумя и более неизвестными

Рассмотрим уравнение оси Ox

$$y=0 \qquad (1)$$

Эта прямая делит всю плоскость Oxy на две полуплоскости – нижнюю и верхнюю. Для нижней полуплоскости $y<0$, а для верхней полуплоскости $y>0$. Неравенству $y<0$ удовлетворяют координаты всех точек нижней полуплоскости, тогда как для $y>0$ удовлетворяют координаты всех точек верхней полуплоскости.

Рассмотрим уравнение прямой:

$$x=a \qquad (2)$$

Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости: левую и правую. Для точек левой полуплоскости $x<a$, а для правой $x>a$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0) \qquad (3)$$

Эта прямая делит плоскость Oxy на две полуплоскости. Равенство (3) выполняется для координат точек, которые лежат на прямой (3). Если подставить координаты точки $M(x,y)$, которая лежит в одной из полуплоскостей, то равенство (3) перейдет в одно из неравенств

$$Ax+By+C<0\ , \quad Ax+By+C>0\,.$$

Определение. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $Ax+By+C<0$ или $Ax+By+C>0$ называются областью его решений.

Областью решений является полуплоскость. Для неравенств $Ax+By+C\leq 0$ или $Ax+By+C\geq 0$ в область решений входит и разделяющая прямая.

Правило. Чтобы построить область решений неравенства, необходимо выполнить следующие действия.

1) Построить прямую

$$Ax+By+C=0 \qquad (4)$$

2) Вместо текущих координат x и y подставить в (4) координаты точки $O(0,0)$. Если неравенство удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая точку $O(0,0)$. Если неравенство не удовлетворяется, то областью решений служит другая полуплоскость. Проще говоря, если C совпадает со смыслом неравенства, то полуплоскость, содержащая точку $O(0,0)$, является областью решений неравенства, а если $C=0$, то область решения неравенства строится аналогично, только вместо координат точки $O(0,0)$, надо подставить координаты точки, лежащей в одной из полуплоскостей.

Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1>0 \\ A_2x+B_2y+C_2<0 \\ A_3x+B_3y+C_3>0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_nx+B_ny+C_n<0 \end{cases} \qquad (5)$$

Определение. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам (5) называется ***областью решений системы***.

Область решений – это общая часть всех полуплоскостей, определяемых каждым неравенством отдельно, т. е. система неравенств вида (5) определяет пересечение полуплоскостей. В этом состоит геометрический смысл системы (5).

2.2 Понятие вектора

2.2.1 Координаты и длина вектора

Определение. Вектором называется ***направленный от-***

резок.

Вектор обозначают как двумя заглавными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой над буквами. Например: $\overline{AB}$ или $\overline{a}$, где A – начальная, а B – конечная точка вектора. Длиной вектора $\overline{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор. Если начало и конец вектора совпадает, например, $\overline{AA}$, то такой вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}=\overline{AA}$, а его длина равна нулю.

Противоположным вектором вектору $\overline{AB}$ будет вектор $\overline{BA}$, в этом случае пишут $\overline{AB}=-\overline{BA}$.

Определим длину вектора $\overline{AB}$. Пусть на плоскости заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

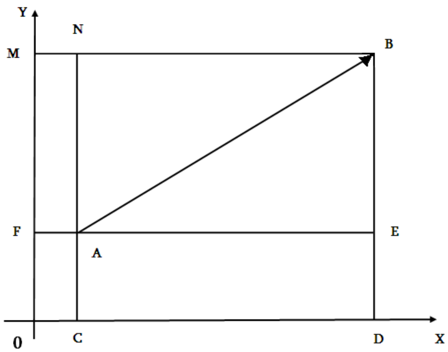


Рис. 9

Проведем прямые, параллельные осям Ox и Oy, проходящие через точки A и B (см. рис. 9). Так как
$|AE|=|CD|=|x_2-x_1|$, $|MF|=|BE|=|y_2-y_1|$.

По теореме Пифагора, имеем: $|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2$ и

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

В прямоугольной системе координат выберем два единичных вектора $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$, причем направление вектора $\overline{e_1}$ совпадает с направлением оси *Ox*, а направление вектора $\overline{e_2}$ – с направлением оси *Oy*.

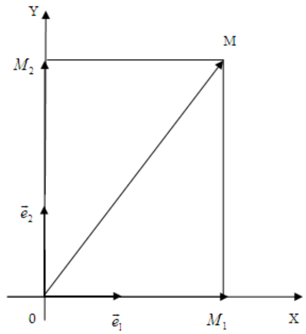


Рис.10

Векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ называют ***координатными векторами***. Пусть точка $M(x, y)$ задана на плоскости (см. рис. 10). Проведем MM_1 параллельно оси *Oy* и MM_2 параллельно оси *Ox*, где M_1 и M_2 точки пересечения с *Ox* и *Oy*, соответственно. Ясно, что $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ и надо заметить, что OM_1 и OM_2 являются проекциями вектора $\overline{OM}$ на оси *Ox* и *Oy*, соответственно. Вектор $\overline{OM}$ называется ***радиус-вектором*** точки M.

Из школьного курса геометрии, известно, что любой вектор можно разложить и представить в виде суммы двух векторов. Поскольку $\overline{MM_1} = x \cdot \overline{e_1}$, а $\overline{MM_2} = y \cdot \overline{e_2}$ и $\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$, то получим разложение вектора по координатным векторам:

$$\overline{OM} = x \cdot \overline{e_1} + y \cdot \overline{e_2} \qquad (2)$$

Числа x и y называются координатами вектора $\overline{OM}$ и этот факт записывается так: $\overline{OM}(x, y)$. Очевидно, что координаты вектора совпадают с проекциями вектора на оси Ox и Oy и совпадают с координатами точки M, а его длина вычисляется по формуле:

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad (3)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что любой вектор разлагается по координатным векторам и это разложение будет единственно.

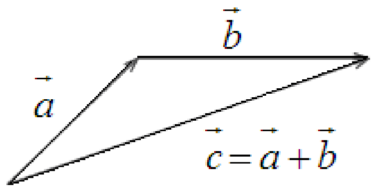
Для вектора $\overline{AB}$ с началом в $A(x_1, y_1)$ и концом в $B(x_2, y_2)$ координатами будут его проекции на оси Ox и Oy, соответственно, а именно: $\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)$.

2.2.2 Действия над векторами

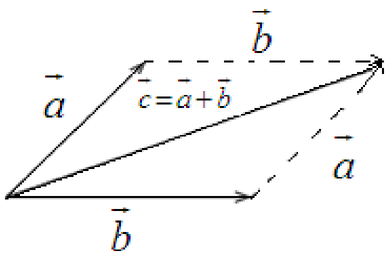
1^0. Произведением вектора $\overline{a}(a_1, a_2)$ на число λ называется вектор $\overline{p} = \lambda\overline{a}$ с координатам $\overline{p}(\lambda a_1, \lambda a_2)$, имеющий длину $\left|\overline{p}\right| = |\lambda|\left|\overline{a}\right|$, с направлением, совпадающим с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположным ему при $\lambda < 0$. Противоположным вектором вектору $\overline{a}$ будет $-\overline{a}$, т.е. вектор $\overline{a}$ умноженный на число (-1). Геометрически это означает, что векторы $\overline{a}$, $-\overline{a}$ лежат на одной прямой, имеют противоположное направление и имеют одинаковую длину, т.е. $|\bar{a}| = |-\bar{a}|$.

2^0. Суммой двух векторов $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ является вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ с координатами $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Геометрически получить вектор $\bar{c}$ можно следующим образом: начало вектора $\bar{c}$ совпадает с началом $\bar{a}$, а конец с концом $\bar{b}$ при условии, что начало $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$. Сложение векторов таким образом называется ***сложением по правилу треугольника***.

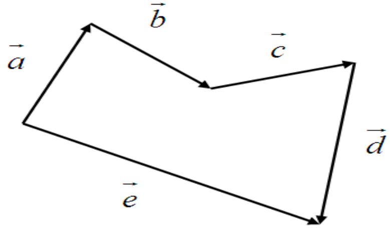


Если отложить из одной точки векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, достроить до параллелограмма и провести диагональ, которая является вектором $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, а сложение таким образом называется ***правилом параллелограмма***.

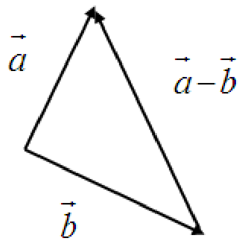


Аналогично складывают несколько векторов, например, четыре вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Сначала строим $\bar{a}$ затем от его конца строим вектор $\bar{b}$, а от его конца $\bar{c}$ и аналогично $\bar{d}$, а затем соединим начало $\bar{a}$ с концом $\bar{d}$ и получаем векто

$\overline{e}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}$, а сложение называется ***правилом многоугольника***.



3^0. Разностью двух векторов $\overline{a}(a_1,a_2)$ и $\overline{b}(b_1,b_2)$ называется вектор $\overline{d}$ с координатами $\overline{d}\left(a_1-b_1,a_2-b_2\right)$. Геометрически вектор $\overline{d}$ можно получить сложением вектора $\overline{a}$ с вектором $-\overline{b}$, противоположного вектору $\overline{b}$ или отложить оба вектора из одной точки и взять вектор начало которого совпадает с концом $\overline{b}$ и конец совпадает с концом $\overline{a}$. Вектор $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$ можно получить, если отложить векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из одной точки, тогда их разностью будет вектор, начало которого совпадает с концом $\overline{b}$ и конец совпадает с концом $\overline{a}$.



Отметим, что векторы можно перемещать параллельно самим себе. Те векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***. Так как направление нулевого вектора произвольно, то он коллинеарен любому вектору.

2.2.3 Скалярное произведение

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними и обозначается символом:

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi \qquad (1)$$

Если векторы заданы своими координатами $\overline{a}(a_1,a_2)$ и $\overline{b}(b_1,b_2)$, то скалярное произведение определяется формулой:

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2 \qquad (2)$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство:

$$a_1b_1+a_2b_2=0 \qquad (3)$$

Заметим, что при $\overline{a}=\overline{b}$ угол между векторами равен нулю, т. е. $\cos\varphi=1$ и $\left(\overline{a}\cdot\overline{a}\right)=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}$, а так как $\left(\overline{a}\cdot\overline{a}\right)=\left|\overline{a}\right|^2$, то $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}$. Учитывая (1) и (2), угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}.$$

Отметим ***алгебраические свойства*** скалярного произведения.

1^0. Перестановочное свойство: $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\left(\overline{b}\cdot\overline{a}\right)$.

2^0. Сочетательное свойство относительно умножения на число: $\left(\lambda\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$.

3^0. Распределительное свойство относительно сложения:

$$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)\ .$$

Отметим ряд важных ***геометрических свойств*** скалярного произведения.

1^0. Если ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ составляют острый угол, то скалярное произведение: $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)>0$.

2^0. Если ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ составляют тупой угол, то скалярное произведение: $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)<0$.

3^0. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны друг другу, то $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=0$.

4^0. Если скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю,то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

5^0. При скалярном произведении вектора самого на себя получается квадрат его модуля: $\left(\overline{a}\cdot\overline{a}\right)=\left|\overline{a}\right|^2$.

Задачи к главе 2

1. На плоскости построить точки $A(-7;-2)$ и $B(2;1)$ и найти координаты точек, симметричных с *A* и *B* относительно осей: а) *Ox*, б) *Oy*.

2. Найти расстояние между точками $A(-3;2)$ и $B(1;4)$ и координаты серединной точки отрезка *AB*.

3. Найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2;5)$, а) на оси ординат, б) на оси абсцисс.

4. Построить треугольник с вершинами $A(-4;2)$, $B(0;-1)$ и $C(3;3)$ и определить его периметр.

5. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если даны координаты $A(0;0)$, $B(5;0)$ и $C(12;-1)$.

6. Найти расстояние точки $M(3;-2)$

а) до оси Ox; б) до оси Oy; в) до начала координат $O(0;0)$

7. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек

а) $A(-3;5)$ и $B(6;4)$; б) $C(4;-3)$ и $D(8;1)$.

8. На оси абсцисс найти точку, одинаково удаленную от начала координат $O(0;0)$ и от точки $A(8;4)$.

9. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$ и составляющую с осью Ox угол: а) 60^0; б) 120^0; в) 30^0.

10. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат $O(0;0)$ и точку $A(-2;3)$.

11. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;3)$ и $B(4;-2)$.

12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;6)$ и составляющую угол α с осью Ox:

а) $\alpha = 30^0$; б) $\alpha = 60^0$; в) $\alpha = 135^0$; г) $\alpha = 45^0$.

13. Даны две точки $A(-2;0)$ и $B(0;4)$. Найти уравнения прямых проходящих через точки A и B и перпендикулярных к отрезку AB.

14. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$.

Найти а) $\angle ABC$; б) длину медианы AM; в) уравнение высоты AK.

15. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;6)$ и $C(4;2)$.

а) написать уравнение сторон треугольника ABC;

б) найти длину и уравнение медианы AM.

16.Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла *C*(3;- 1) и уравнение гипотенузы $x-y+2=0$.

17. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;6)$ и $C(4;2)$.

а) написать уравнение стороны *AC* и высоты *BH*; б) написать уравнение стороны *AB* и высоты *CK*.

18. Найти угол ∠BAC в треугольнике с вершинами $A(0;7)$, $B(6;-1)$ и $C(2;1)$, используя скалярное произведение векторов.

19. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$.

а) найти угол ∠BAC; б) написать уравнение стороны *BC*; в) найти уравнение высоты *AH*.

20. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если даны их координаты: а) $\vec{a}(3;4)$ и $\vec{b}(5;12)$; б) $\vec{a}(12;5)$ и $\vec{b}(8,6)$; в) $\vec{a}(8;6)$ и $\vec{b}(5;12)$; г) $\vec{a}(6;8)$ и $\vec{b}(3;4)$; д) $\vec{a}(5;12)$ и $\vec{b}(3;4)$;
е) $\vec{a}(3;4)$ и $\vec{b}(8;6)$; ж) $\vec{a}(12;5)$ и $\vec{b}(8;6)$.

21. Прямая $2x-y+8=0$ пересекает оси *Ox* и *Oy* в точках *A* и *B*. Написать уравнения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *B* перпендикулярно отрезку *AB*.

22. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ угол между которыми α. Определить длину вектора $\vec{c}$, если: а) $\alpha=60^0, \vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$;

б) $\alpha=120^0$, $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=8$ в) $\alpha=30^0$, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|=8$ и $|\vec{b}|=6$. г) $\alpha=60^0$, $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$, д) $\alpha=60^0, \vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$, б) $\alpha = 120^0$, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 8$ в) $\alpha = 30^0$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 8$ и $|\vec{b}| = 6$. г) $\alpha = 60^0$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$, д) $\alpha = 60^0$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$. е) $\alpha = 45^0$, $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$.

ж) $\alpha = 120^0$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$, з) $\alpha = 60^0$, $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$ и $|\vec{b}| = 3$, и) $\alpha = 60^0$, $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 4$, k) $\alpha = 45^0$, $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 6$.

23. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними а) 45^0, б) 90^0, в) 135^0, г) 60^0, д) 120^0.

24. Дан правильный треугольник *ABC* с длиной стороны a, *BD* высотой.Найти скалярное произведение а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$; в) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; г) $\overline{AC} \cdot \overline{AC}$;
д) $\overline{AO} \cdot \overline{OD}$; е) $\overline{AO} \cdot \overline{AC}$; ж) $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$; з) $\overline{BO} \cdot \overline{OC}$.

25. В треугольнике с вершинами $A(5;3)$, $B(3;4)$ и $C(-2;1)$.

а) написать уравнение стороны *AB*.
б) написать уравнение медианы *CM* и найти ее длину.
в) написать уравнение высоты *CH* и найти ее длину.
г) найти периметр треугольника *ABC*.

26. В треугольнике с вершинами $A(3;1)$, $B(11;3)$ и $C(5;9)$

а) написать уравнение стороны *AB*.
б) написать уравнение медианы *CM* и найти ее длину.
в) написать уравнение высоты *CH*.
г) найти периметр треугольника *ABC*.

27. В треугольнике с вершинами $A(4;2)$, $B(-2;9)$ и $C(9;8)$

а) написать уравнение стороны *BC*.

б) написать уравнение медианы AD и найти ее длину.

в) написать уравнение высоты AP и найти ее длину

г) найти периметр треугольника ABC.

28. В треугольнике с вершинами $A(-3;-1)$, $B(7;2)$ и $C(-1;7)$.

а) написать уравнение стороны AC.

б) написать уравнение медианы BK и найти ее длину.

в) написать уравнение высоты BN и найти ее длину.

г) найти периметр треугольника ABC.

29. В треугольнике с вершинами $A(2;-4)$, $B(6;4)$ и $C(-2;1)$.

а) написать уравнение стороны AC.

б) написать уравнение медианы BM и найти ее длину.

в) написать уравнение высоты BH и найти ее длину.

г) найти периметр треугольника ABC.

30. В треугольнике с вершинами $A(-4;3)$, $B(-1;-3)$ и $C(5;4)$.

а) написать уравнение стороны BC.

б) написать уравнение медианы AD и найти ее длину.

в) написать уравнение высоты AK и найти ее длину.

г) найти периметр треугольника ABC.

Ответы к задачам главы 2

1. а) $(-7;2)$, $(2;\ -1)$; б) $(7;-2,)$, $(-2;1)$; **2.** $2\sqrt{5}$; $(-1;3)$;

3. а) (0;2,9); б) $\left(-\frac{29}{4};0\right)$; **4.** $10+5\sqrt{2}$; **5.** $(7;-1)$; **6.** а) 2;

б) 3; в) $\sqrt{13}$; **7.** а) $(0;-9)$; б) $(0;5)$; **8.** $(5;0)$; **9.** $y=\sqrt{3}x+3$,

$y=-\sqrt{3}x+3$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$; **10.** $y=-\frac{3}{2}x$; **11.** $y=-x+2$;

12. $y=x+10$; **13.** $y=-\frac{x}{2}+4$, $y=-\frac{x}{2}-1$;

14. а) $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, б) $\sqrt{29}$; **15.** а) (*AB*) $y=\frac{3}{2}x+3$;

(*BC*) $y=-2x+10$; (*AC*) $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$; б) $\sqrt{41}$,

$y=0,8x+1,6$;**16.**(- 3; - 1); (3;5); **17.**(*AC*) $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$;

(ВН) $y=-3x+12$; **18.** $\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$; **19.** а) 45^{o};

б) $y=-2x+8$; в) $y=\frac{x}{2}+1$; **20.** а) $\alpha=\arccos\frac{63}{65}$;

б) $\alpha=\arccos\frac{63}{65}$; в) $\alpha=\arccos\frac{56}{65}$; г) $\alpha=0$;

д) $\alpha=\arccos\frac{63}{65}$; е) $\alpha=\arccos\frac{24}{25}$; ж) $\alpha=\arccos\frac{63}{65}$.

21. $y=-\frac{x}{2}+8$, $y=-\frac{x}{2}-2$; **22.** а) $2\sqrt{19}$; б) 14;

в) $2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$; г) $2\sqrt{19}$; д) $\sqrt{97}$; е) $3\sqrt{17+4\sqrt{2}}$; ж) $2\sqrt{7}$;

з) $\sqrt{133}$; и) $3\sqrt{13}$; к) $6\sqrt{17-4\sqrt{2}}$. **23.** а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$;

г) 3; д) -3. **24.** а) $\frac{a^2}{2}$; б) $-\frac{a^2}{2}$; в) 0; г) a^2; д) $-\frac{a^2}{12}$; е) $\frac{a^2}{2}$;

ж) $\frac{a^2}{6}$; з) $\frac{a^2}{6}$. **25.** а) (*AB*) $y=-\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$; б) (*CM*) $y=\frac{5}{12}x+\frac{11}{6}$;

7,5; в) (*CH*) $y=2x+5$, $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\sqrt{5}+\sqrt{53}+\sqrt{34}$.

26. а) (AB) $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$; $\sqrt{53}$; (CM) $y=-\frac{7}{2}x+12\frac{1}{2}$;

(CH) $y=-4x+29$; $4\sqrt{17}+6\sqrt{2}$. **27.** (BC) $y=-\frac{x}{11}+\frac{97}{11}$,

(AD) $y=-13x+54$, $\frac{\sqrt{170}}{2}$, (AP) $y=11x-40$.

Глава 3
Элементы математического анализа

3.1 Числовые последовательности

3.1.1 Арифметические действия над числовыми последовательностями

Определение. Если, по некоторому закону, каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Числа $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$ называются членами последовательности, а число x_n – общим или n-ым членом данной последовательности.

Из школьного курса нам известны числовые последовательности : арифметическая и геометрическая прогрессии. Вообще, последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Последовательность отличается от числового множества тем, что мы можем одновременно определить как сам элемент последовательности, так и его порядковый номер.

Введем понятие арифметических действий над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведенением последовательности $\{x_n\}$ ***на число*** λ назовем последовательность

$$\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \dots\lambda x_n,\ \dots$$

Суммой данных последовательностей назовем последовательность

$$x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \dots,\ x_n+y_n,\ \dots$$

Разностью – последовательность

$$x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \dots,\ x_n-y_n,\ \dots$$

Произведением данных последовательностей – последовательность

$$x_1y_1,\ x_2y_2,\ \dots,\ x_ny_n,\ \dots$$

Частным – последовательность

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \dots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \dots,$$

если все члены последовательности, на которую мы делим, отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$\lambda\{x_n\}=\{\lambda x_n\}$$

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$$

$$\{x_n\}-\{y_n\}=\{x_n-y_n\}$$

$$\{x_n\}\{y_n\}=\{x_ny_n\}$$

$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ y_n\neq 0,\ \forall n\in N.$$

3.1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (m) такое, что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$x_n\leq M\ (x_n\geq m)$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, то есть существуют числа m и M такие, что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенствам:

$$m \le x_n \le M$$

Обозначим $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде: $|x_n| \le A$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной , если для любого положительного числа *A* (сколь бы большим оно не было) существует хотя бы один элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству: $|x_n| > A$

Примеры: $\{x_n\} = \{-n\}$, $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{x_n\} = \left\{(-1)^n n\right\}$.

3.1.3 Сходящиеся последовательности

Определение 1. Число *a* называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

При этом последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, а факт сходимости последовательности к пределу *a*, записывают так: $\lim\limits_{n\to a} x_n = a$.

Предел числовой последовательности имеет вполне четкое геометрическое истолкование. Неравенство (1) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a$, а последнее означает, что элемент находится в ε – окрестности числа a (см. пункт 1.1.4).

Определение 2. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε (сколь бы малым его ни взяли) существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого $A > 0$ (сколь, бы большим оно не было) существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Приведем теорему, устанавливающую связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Теорема 1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность и все члены отличны от нуля $(x_n \neq 0)$, то $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть бесконечно малая, и обратно, если $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ бесконечно малая последовательность, то $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ есть бесконечно большая последовательность.

3.1.4 Основные свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 2. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Предположим, что $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Тогда для заданного положительного числа ε существует номер N_1, начиная с которого (т.е. при $n > N_1$) выполняется условие $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, для данного ε найдется номер N_2, начиная с которого (т.е.при $n > N_2$) выполняется условие $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n > N$, неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ будут выполняться одновременно (учитывая свойство 5^0 пункта 1.1.4) и имеют место неравенства:

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Отсюда следует, что $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ –бесконечно малые последовательности. Докажем, что их произведение также является бесконечно малой последовательностью. Для любого положительного числа ε существует номер N_1, начиная с которого (т.е.при $n > N_1$) имеет место неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Для второй последовательности можно взять $\varepsilon = 1$ и для этого ε найдется номер N_2, начиная с которого (т.е. при $n > N_2$) выполняется неравенство $|\beta_n| < 1$. Возьмем

$N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n > N$ выполняются неравенства:

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

Это означает, что $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

Теорема 4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а $\{\beta_n\}$ – ограниченная последовательность. Докажем, что $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Действительно, для любого n натурального числа существует число A такое, что выполняется условие $|\beta_n| < A$, а для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{A}$ существует номер N, начиная с которого (т.е. при $n > N$) $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$, тогда

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon,$$

при $n > N$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу a, если $\alpha_n = x_n - a$, то $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Таким образом, любой элемент x_n сходящейся последовательности можно представить в виде:

$$x_n = a + \alpha_n \tag{1}$$

3.1.5 Основные свойства сходящихся последовательностей

Лемма. Если все элементы бесконечно малой последовательности равны одному и тому же числу c, то $c = 0$.

Доказательство. Предположим обратное, что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, тогда, по определению бесконечно малой последовательности, существует номер N такой, что при $n > N$, $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как, $\alpha_n = c$, а $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, то последнее неравенство можно переписать в виде $|c| < \frac{|c|}{2}$, откуда $1 < \frac{1}{2}$. Противоречие показывает, что предположение $c \neq 0$ не может иметь место.

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Предположим, что сходящаяся последовательность имеет два предела a и b. Тогда элементы x_n сходящейся последовательности, имеющей пределом число a, можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – элемент бесконечно малой последовательности (см.(1), пункт 3.1.4).

Аналогично, $x_n = b + \beta_n$, где β_n является элементом бесконечно малой последовательности .

Итак, имеем $x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$, вычитая одно из другого, найдем $\alpha_n - \beta_n = a - b$. Так как все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n - \beta_n\}$ имеют одно и то же, постоянное значение $a - b$, то по лемме $a - b = 0$, т.е. $a = b$. Теорема доказана.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность сходящаяся , а число a – ее предел.

Пусть, далее, ε – произвольное положительное число и N – номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Тогда,

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$$

для всех $n > N$. Возьмем $A = \max\{|a| + \varepsilon, |x_1|, ..., |x_N|\}$. Очевидно, $|x_n| < A$ для всех номеров n что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

Замечание. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся.

3.1.6 Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Теорема 3. Алгебраическая сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Предположим, что a и b – пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, соответственно. Тогда, в силу (1) (см.пункт 3.1.4) можно записать

$$x_n = a + \alpha_n, \; x_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Следовательно, $\left(x_n \pm y_n\right)-\left(a \pm b\right)=\alpha_n \pm \beta_n$, где (см. теорема 2, пукт 3.1.4) $\left\{\alpha_n \pm \beta_n\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

Таким образом, $\left(x_n \pm y_n\right)-\left(a \pm b\right)$ также бесконечно малая и потому, последовательность $\left\{x_n \pm y_n\right\}$ сходится и имеет своим пределом число $\left(a \pm b\right)$.

***Теорема* 4.** Произведение сходящихся последовательностей $\left\{x_n\right\}$ и $\left\{y_n\right\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\left\{x_n\right\}$ и $\left\{y_n\right\}$.

Доказательство. Пусть a и b – пределы последовательностей $\left\{x_n\right\}$ и $\left\{y_n\right\}$, соответственно. Тогда $x_n = a+\alpha_n$, $x_n = b+\beta_n$, где $\left\{\alpha_n\right\}$ и $\left\{\beta_n\right\}$ – бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$$

Согласно теоремам 2, 3 и 4 (см.пункт 3.1.4) последовательность $\left\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\right\}$ – бесконечно малая.

Таким образом, $\left\{x_n y_n - ab\right\}$ – последовательность бесконечно малая и потому, последовательность $\left\{x_n y_n\right\}$ сходится и имеет пределом число ab .

***Теорема* 5.** Частное двух сходящихся последовательностей $\left\{x_n\right\}$ и $\left\{y_n\right\}$ при условии, что предел $\left\{y_n\right\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\left\{x_n\right\}$ и $\left\{y_n\right\}$.

Доказательство. Если a и b – пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, соответственно, то $x_n = a+\alpha_n$, $x_n = b+\beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\left\{\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right\}$ есть бесконечно малая последовательность. Представим разность следующим образом:

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{by_n}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right)$$

В силу теорем 2, 3, 4 (см. 3.1.4) о бесконечно малых последовательностях, множитель $\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$ есть бесконечно малая последовательность. Остается показать, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограниченная последовательность. Так как $y_n \to b$, $b \neq 0$ при $n \to \infty$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ существует номер N, такой, что для любого $n > N$ $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Тогда, в силу цепочки неравенств будем иметь:

$$|y_n| = |b-(b-y_n)| \ge |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Таким образом, для любого $n > N$ следует $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ и $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$, следовательно последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограниченная.

По теореме 4 (см. пункт 3.1.4) $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ – бесконечно малая последовательность, поэтому $\left\{ \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right\}$ – также бесконечно малая. Следовательно $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ сходится и имеет своим пределом число $\frac{a}{b}$.

3.2 Функция одной переменной

3.2.1 Понятие функции и способы задания функции

Пусть X и Y – некоторые множества и каким-либо способом f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда соответствие f называется функцией с областью определения $D(f) = X$. Множество всех значений функции $y = f(x)$, которые она принимает на $D(f)$ обозначают $E(f)$ $\left(E(f) \subseteq Y\right)$ и называют областью значений функции. При этом y называют ***зависимой переменной***, x – ***независимой переменной*** или аргументом. Кроме буквы f для обозначения функций употребляются и другие буквы: $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ и т. д.

Определение 1. Множество всех значений независимой переменной, для которых определена функция, называется ***областью определения*** или областью существования этой функции.

Определение 2. Функция $f(x)$, определенная на множестве X называется ***ограниченной,*** если существует такое число M, что для любого $x \in X$ выполняется условие $\left| f(x) \right| \le M$.

Определение 3. Функция, все значения которой равны между собой, называется ***постоянной.***

Определение 4. Функция $y = f(x)$ заданная на интервале $(-l;\ l)$, называется ***четной,*** если $f(-x) = f(x)$, для любого $x \in (-l;\ l)$.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ заданная на интервале $(-l;\ l)$, называется ***нечетной,*** если $f(-x) = -f(x)$, для любого $x \in (-l;\ l)$.

График четной функции симметричен относительно оси *Oy*. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***) в промежутке X , если для любых $x_1,\ x_2 \in X$ при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2)\big(f(x_1) \le f(x_2)\big)$$

Определение 7 **.** Функци $y = f(x)$ называется ***убывающей (невозрастающей)*** в промежутке X , если для любых $x_1,\ x_2 \in X$ при $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$f(x_1) > f(x_2)\big(f(x_1) \ge f(x_2)\big).$$

Перейдем к рассмотрению способов задания функции.

1. Аналитический способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, которая указывает, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Например: 1) $y = x^2$; 2) $y = 2x^3 + 3$.

Соответствие между переменными величинами не всегда удается записать в виде формулы. Во многих случаях искать или писать формулу бывает нецелесообразно. Для функциональной зависимости могут оказаться более удобными другие способы.

2. *Табличный способ*

Этот способ является наиболее простым. В одном столбце записывают все значения аргумента x (числа) , а во втором – значения функции y, соответствующие каждому значению аргумента . Табличный способ удобен для использования, он широко применяется при регистрации результатов опытов, лабораторных анализов и т.д. Примером табличного способа задания функции можно взять расписание движения поезда, по которому можно определить местоположение поезда в отдельные промежутки времени.

Недостаток этого способа состоит в том, что представление о функциональной зависимости не является полным, так как невозможно поместить в таблицу все значения аргумента. Но иногда полезно представлять функцию как бесконечное множество столбцов или строк такой таблицы.

3. *Графический способ* задания функций часто используется в практике физических измерений, когда соответствие между x и y задается посредством графика. Можно наблюдать работу приборов – самописцев, регистрирующих величины атмосферного давления, температуры воздуха, его влажности в любой момент времени суток. Прибор электрокардиограф также чертит график – кривую электрических импульсов сердца, по которой можно проследить изменения импульсов и найти их значение в тот или иной момент времени. Графический способ нагляден, но точность его невелика, поэтому графический способ задания функции часто применяют в сочетании с аналитическим и табличным.

Есть еще один способ задания функции, который возник в результате развития и внедрения в производство компьютерной техники. Этот способ состоит в указании программы для ***вычисления значений функций на компьютере***.

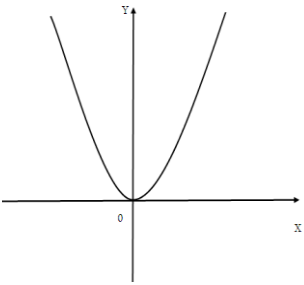
3.2.2 Простейшие функции и их краткаяхарактеристика

Из школьного курса известны следующие ***простейшие*** функции, краткое описание которых приведем ниже.

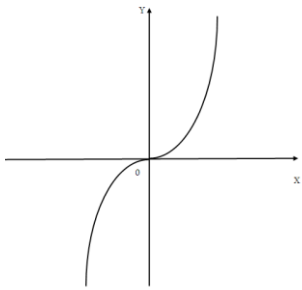
1. ***Степенная функция*** $f(x)=x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$. Рассмотрим случай когда $x>0$, если $\alpha>0$, то $f(x)$ –возрастающая функция, если $\alpha<0$, то $f(x)$ – убывающая функция. Рассмотрим несколько частных случаев степенной функции:

а) $f(x)=c$, *c - постоянная*

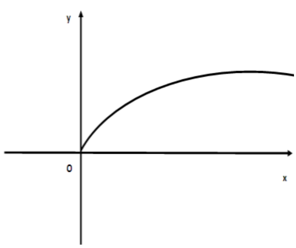
б) $f(x)=x^2$



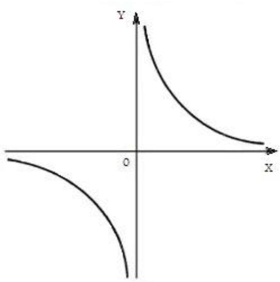
в) $f(x)=x^3$



г) $f(x)=\sqrt{x}$



д) $f(x)=\dfrac{1}{x}$



е) Рассмотрим ***квадратичную функцию*** $y = ax^2 + bx + c$ (парабола). Попробуем построить эскиз графика параболы , для этого надо

1) вычислить координаты вершины $\left(x_в; y_в\right)$;

2) отметить направление ветвей (если $a > 0$, то ветви параболы идут наверх, а если $a < 0$, то вниз) ;

3) найти координаты вершины параболы, ее абсциссу $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ и ординату $y_в = ax_в{}^2 + bx_в + c$.

4) найти точки пересечения параболы с осями координат. Это можно сделать следующим образом: если $x = 0$, то $y = c$, то точкой пересечения с осью *Oy* будет точка $(0;c)$, а если $y = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

и остается решить это квадратное уравнение.

Рассмотрим три случая для дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

а) $D > 0$, тогда $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, корни уравнения (1), парабола пересекает ось *Ox* в точках x_1, x_2.

б) $D = 0$, тогда $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, так как корни совпадают , то парабола касается вершиной оси *Ox* в точке $\left(x_в; 0\right)$.

в) $D < 0$, тогда уравнение (1) не имеет решения и парабола не пересекает ось *Ox*, парабола находится выше оси *Ox*, если $a > 0$ и ниже, если $a < 0$.

Теперь отметим на координатной плоскости координаты вершины $\left(x_в; y_в\right)$ и точки пересечения с осями координат. Ось симметрии проходит через точку $\left(x_в; y_в\right)$ параллельно оси Oy. Этого достаточно, чтобы нарисовать эскиз графика.

2. ***Показательная функция.*** Показательной функцией называется функция вида: $y = a^x$, $a \neq 1,\ a > 0$.

Очевидно, что $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$. Отметим основные свойства показательной функции:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

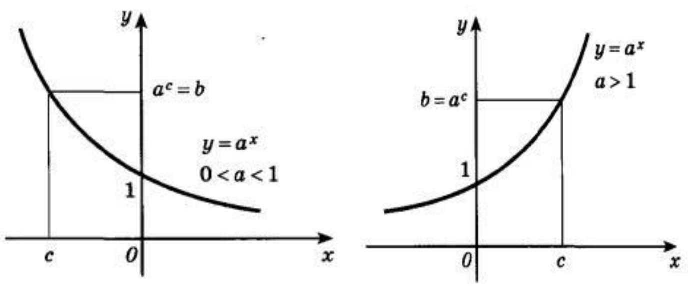
3) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$; 4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;

5) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$; 6) $x < y,\ a > 1$, то $a^x < a^y$;

7) $x < y,\ 0 < a < 1$, то $a^x > a^y$.

Рассмотрим два случая:

а) $0 < a < 1$; б) $a > 1$.



Графики функций будут выглядеть так. В первом случае функция убывает, а во втором возрастает. Это следует из основных свойств показательной функции.

3. ***Логарифмическая функция.*** Логарифмической функцией называется функция вида: $y = \log_a x$, где $a > 0,\ a \neq 1$ Отметим, что $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Определение. Логарифмом от b по основанию a называется число c, удовлетворяющее условию: $a^c = b$.

Отметим основные свойства логарифмической функции:

1) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$,

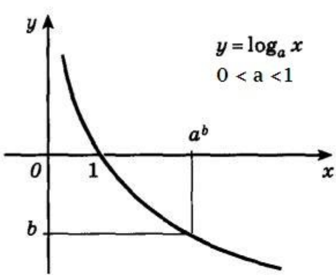
2) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, 3) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

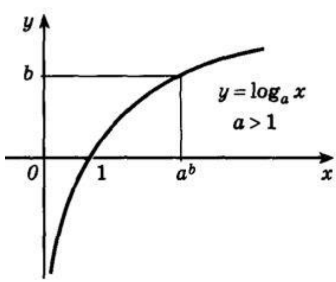
Натуральным логарифмом назывется логарифм по основанию e, где $e = 2,7182818284...$,иррациональное число – непериодическая десятичная дробь и записывается так: $\ln x$.

Число e является пределом последовательности:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ т.е. } \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (2)$$

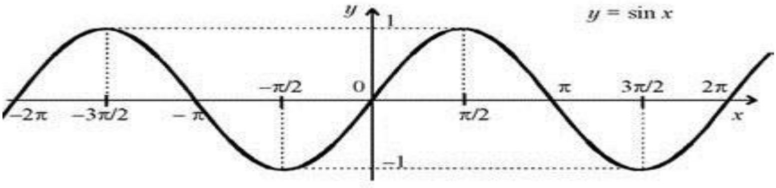
Десятичный логарифм – логарифм по основанию 10, записывается так: $\lg x$.Могут быть два случая: а) $0 < a < 1$; $a > 1$. Графики в этих случаях будут выглядеть так:





4. ***Тригонометрические функции***

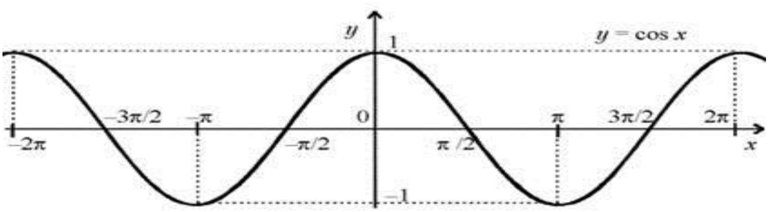
1) $f(x)=\sin x$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=[-1;1]$



а) $\sin x=0,\ x=\pi k,\ k\in Z$; б) $\sin x=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

в) $\sin x=-1,\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$

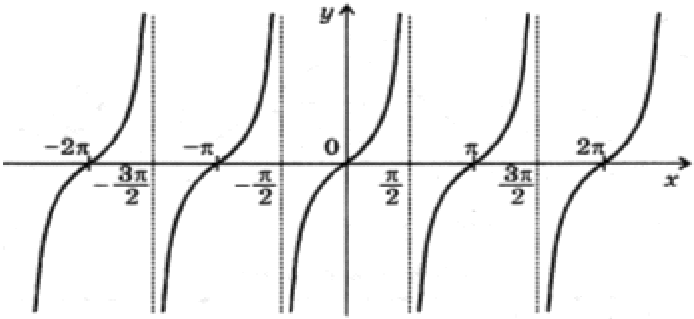
2) $f(x)=\cos x, D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=[-1;1]$



а) $\cos x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; б) $\cos x=1,\ x=2\pi k,\ k\in Z;$

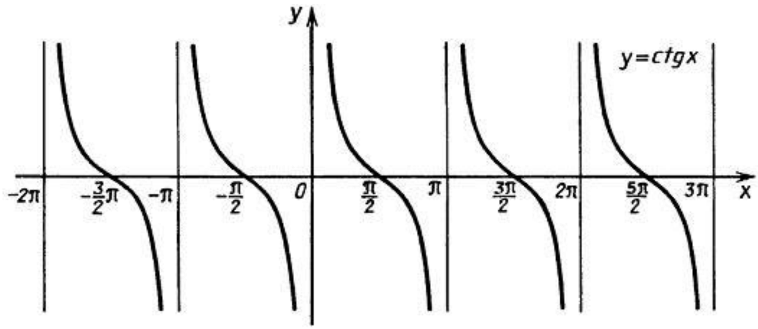
в) $\cos x=-1,\ x=\pi+2\pi k,\ k\in Z.$

3) $f(x)=tgx,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$



а) $tgx = 0,\ x = \pi k,\ k \in Z$; б) $tgx = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

4) $f(x) = ctgx,\ x \neq \pi k, k \in Z$



а) $ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; б) $ctgx = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

5) Обратные тригонометрические функции:

$f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = arctgx$, $f(x) = arcctgx$.

3.2.3. Классификация функций

1) Перечисленные в предыдущем пункте ***простейшие функции***: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и т.д.

2) Функции, получаемые посредством конечного числа арифметических действий над простейшими функциями, а так же путем суперпозиции этих функций, составляют класс ***элементарных функций.***

3) Функция вида: $P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x + a_0$,

где $m \geq 0$ – целое число, $a_0,\ a_1,\ ...,a_m\ (a_0 \neq 0)$ – любые вещественные числа, коэффициенты, называется ***целой рациональной*** функцией или алгебраическим многочленом степени m.

4) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций:

$$R(x)=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x + b_0}$$

называется ***дробно-рациональной*** функцией.

5) Функция, полученная путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями, как с целыми, так и с дробными показателями, называется ***иррациональной*** функцией.

6) Всякая неиррациональная функция называется ***трансцендентной*** функцией.

Примеры: $f(x)=\sin x + x$, $f(x)=tgx+\sqrt{x^2+1}$ и т.д.

3.2.4 Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от x_0:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...\ ,\ x_n,\ ... \qquad (1)$$

которая сходится к x_0 (предположим существует предел $\{x_n\} \to x_0$). Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots \qquad (2)$$

по отношению к которой можно ставить вопрос о существовании предела.

Определение 1 (по Гейне). Число A называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (1) значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к числу A.

Символически, этот факт записывается так:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

Определение 2 (по Коши). Число A называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Используя определение предела функций по Гейне, можно перенести теоремы о пределах последовательностей на функции.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(C \neq 0)$, имеют в точке x_0 пределы равные, $B \pm C$, $B \cdot C$ и $\dfrac{B}{C}$, соответственно.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ –произвольная, сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют пределы B и C. Но тогда, в силу теорем 3, 4, 5 (см. пункт 3.1.5) последовательности $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$, $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ имеют пределы, соответственно, равные $B \pm C$, $B \cdot C$ и $\dfrac{B}{C}$ $(C \neq 0)$. В силу определения 1 предела функций это означает, что

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = B \pm C, \quad \lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = B \cdot C, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{C}.$$

3.2.5 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $f(x)$ назыается бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Так же, как и бесконечно малые последовательности, функции играют существенную роль в том, что предел функции можно свести к понятию бесконечно малой функции.

Теорема 1. Для выполнения условия $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\alpha(x) = f(x) - A \qquad (1)$$

была бесконечно малой при $x \to x_0$.

То есть, для функции $f(x)$, имеющей в точке $x = x_0$ предел, равный A, имеет место представление:

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции обладают теми же свойствами, что и бесконечно малые последовательности.

Теорема 2. Алгебраическая сумма и произведение бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

3.2.6 Первый и второй замечательные пределы. Следствия

Отметим теорему, которая нами приводится без доказательства.

Теорема. Если между соответствующими значениями трех функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$.

Первый змечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Рассмотрим тригонометрическую окружность единичного радиуса.

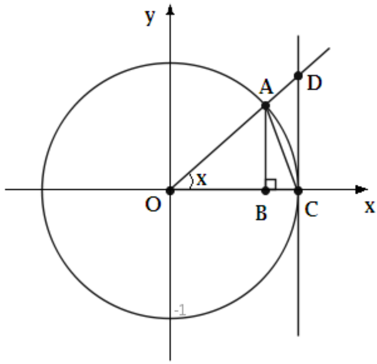


Рис.11

На рисунке11, отметим угол $x\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, измеряемый в радианах, и отметим, что для данного угла: $\sin x = \dfrac{AB}{OA} = AB$, $tgx = \dfrac{CD}{OA} = CD,$ в силу того, что $OA = 1$. Так же воспользуемся неравенствами

$$\sin x < x < tgx\,, \qquad (2)$$

где использован тот факт, что длина перпендикуляра AB меньше длины дуги AC , а длина дуги AC меньше длины CD (см. рис 11). Из (2) имеем:

$$\frac{\sin x}{x} < 1\ ,\ x\cos x < \sin x \qquad (3)$$

Таким образом, при данном значении угла из (3) получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (4)$$

Так как слева имеем $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, а справа $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то отношение $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ заключено между двумя функциями, имеющими один и тот же предел, равный 1. Тогда, в силу теоремы, приведеной выше имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (5)$$

Учитывая, что функция $\sin x$ нечетная, т. е. выполняется условие $\sin(-x) = -\sin x$, будем иметь

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

а это значит, что справедливо тождество и для отрицательных x

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует справедливость (1).

Второй замечательный предел

Ранее (см. пункт 3.2.2, формула (2)), нами была приведена последовательность, которая сходится к числу e, а именно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Из курса математического анализа известно, что предел функции $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, при $x \to \infty$, также равен e, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad (7)$$

Причем, переменная x может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Полагая $x=\frac{1}{\alpha}$, будем иметь $\alpha\to 0$ и получим другую форму записи второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \qquad (8)$$

Следствия 1.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$; (9)

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$ (10)

В силу свойства логарифма имеем: $\log_a(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}$, поэтому достаточно доказать предел (10). На самом деле из следующей цепочки равенств мы имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

Следствия 2.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; (11)

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$ (12)

Перейдем к доказательству следствий 2. Обозначим $a^x-1=t$, отсюда $a^x=1+t$, $x=\log_a(1+t)=\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$, тогда (11) , в силу (10), принимает вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{\ln(1+t)}=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=\ln a$$

Очевидно, если $a=e$, учитывая, что $\ln e=1$, мы получаем (12).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=e^3.$$

3.2.7 Задача о непрерывном начислении процентов

Пусть первоначальный вклад в банк составляет D_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Необходимо найти размер вклада через t лет. Если использовать ***простые проценты***, то размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\frac{p}{100}D_0$, т.е.

$$D_1=D_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ \mathrm{D}_2=D_0\left(1+\frac{2p}{100}\right),\ \ldots,\ \mathrm{D}_t=D_0\left(1+\frac{tp}{100}\right).$$

Но часто применяются ***сложные проценты***. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $1+\frac{p}{100}$ раз, т. е.

$$D_1 = D_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ \mathrm{D}_2 = D_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \dots,\ \mathrm{D}_t = D_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один , а n раз в году, то при том же ежегодном приросте $p\%$ начисления за $\frac{1}{n}$ – ю часть года составит $\frac{p}{n}\%$, а размер вклада за t лет при nt начислениях составит

$$D_t = D_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \qquad (1)$$

Допустим , что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие $(n=2)$, ежеквартально $(n=4)$, ежемесячно $(n=12)$, ежедневно $(n=365)$, каждый час $(n=8760)$, и т. д. непрерывно $(n\to\infty)$. Тогда размер вклада за t лет будет составлять

$$D_t = \lim_{n\to\infty}\left[D_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = D_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} \qquad (2)$$

или с учетом (6) (см. пункт 3.2.5) $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, так как при $n\to\infty$, очевидно, что $x=\frac{100n}{p}\to\infty$, с переходом к пределу из (2) будем иметь

$$D_t = D_0 e^{\frac{pt}{100}} \qquad (3)$$

Формула (3) выражает показательный (экпоненциальный) закон роста (при $p > 0$) или убывания (при $p < 0$). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

Пример. Первоначальный вклад, положенный в банк под 5% годовых, составил 6000$. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов: а) ежегодном; б) поквартальном; в) непрерывном. Решить самостоятельно.

3.2.8 Непрерывность функции и основные теоремы о непрерывных функциях

Пусть на некотором промежутке X определена функция $f(x)$ и точка x_0 принадлежит этому промежутку (мы не требовали условия $x_0 \in X$ при определении предела функции $f(x)$ в точке x_0).

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots \qquad (2)$$

сходится к $f(x_0)$.

Это определение непрерывности ***по Гейне.*** Другими словами, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если предел функции в этой точке и ее значение совпадают, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (3)$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то соотношению (3) можно придать следующую форму:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

т. е. для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции.

По аналогии с определением предела функции, можно сформулировать определение непрерывности функции ***по Коши***.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Пусть имеем непрерывную в точке x_0 функцию $f(x)$.

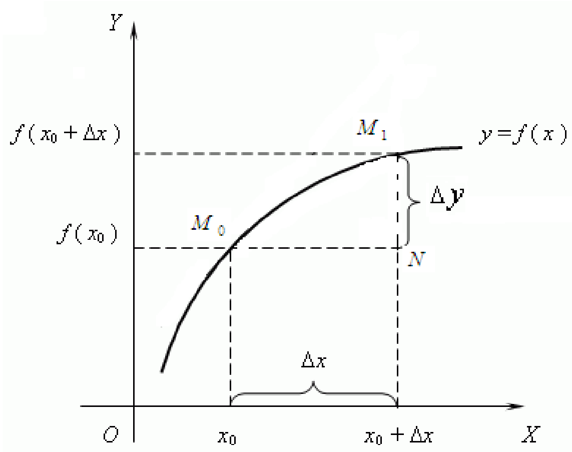


Рис. 12

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ − приращением функции в точке x_0, вызванным приращением аргумента Δx и обозначается Δy.

Таким образом, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и ее приращение Δy в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x_0) \neq 0$).

Доказательство. Так как непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы, равные $f(x_0)$, $g(x_0)$ то, по теореме 1 о пределах функций (см.пункт 3.2.3), существуют пределы функций $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и равны, соответственно, $f(x_0)\pm g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$ и $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Но эти величины как раз и равны значениям соответствующих функций в точке x_0. Следовательно, по определению 1, функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке x_0.

Отметим несколько **важных теорем о непрерывных функциях.**

Первая теорема Больцано-Коши. Пусть задана непрерывная функция $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$, на концах которого она принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $c\in(a,b)$, где $f(c)=0$.

Вторая теорема Больцано-Коши. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a)=A,\ f(b)=B.$ Пусть число C – любое число, заключенное между A и $B.$ Тогда на $[a,b]$ найдется такая точка c, что

$$f(c)=C.$$

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает своих максимального и минимального значений. Другими словами, существуют точки x_1, x_2, такие, что $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$, где M – наибольшее, а m – наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Доказательства этих теорем приводятся в литературе по математическому анализу (см. литература [1], [5]).

3.3 Производная функции

3.3.1 Понятие производной и ее геометрический смысл

Пусть на некотором промежутке X определена функция $f(x)$. Возьмем любое значение $x_0 \in X$ и зададим аргументу x в точке x_0 приращение Δx – такое, что $(x_0 + \Delta x) \in X$. Это вызовет соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

Символы производной имеют следующий вид: y', $y'(x)$, $f'(x)$.

Итак, по определению, имеем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a,b). Точка M на графике функции соответствует некоторому значению аргумента x_0 (см.рис.13), а точка P – значению $x_0+\Delta x$, где Δx – приращение аргумента. Проведем через точки M и P прямую и назовем ее секущей. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью Ox. Очевидно, что этот угол зависит от Δx. Касательной S к графику функции $f(x)$ в точке M будем называть предельное положение секущей MP при приближении точки P по графику к точке M или, что то же самое, при $\Delta x\to 0$.

Ясно, что

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{PN}{MN}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Переходя к пределу в (2), при $\Delta x\to 0$ секущая MP переходит в касательную S, получаем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\varphi(\Delta x)=tg\varphi_0$, где φ_0 – угол, который образуют касательная S с осью Ox, но

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

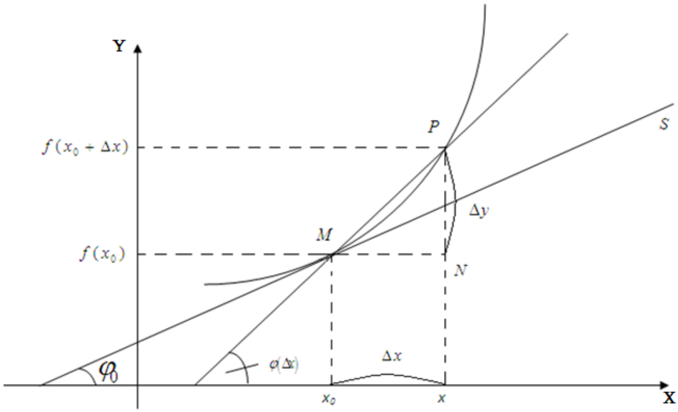


Рис. 13

Следовательно, $f'(x_0)=tg\varphi_0$. Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$.

Пример производной функции из экономики

Рассмотрим функцию, определяющую соответствие между величиной затрат x и величиной получаемого продукта: $y=f(x)$. Для некоторого значения x через Δx обозначим изменение затрат до $x+\Delta x$. Новое значение массы продукта, соответствующее затратам в размере $x+\Delta x$, будет равно $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, а $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ – добавочный продукт, полученный в результате роста затрат на величину Δx. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения величины количества продукта или среднее изменение функции, соответствующее величине затрат Δx.

Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=f'\left(x\right).$$

Этот предел определяет скорость изменения массы продукта при данной величине затрат (массу продукта, получаемую на единицу затрат). В экономической литературе $f'\left(x\right)$ называют предельным продуктом, считая $f\left(x\right)$ – массой продукта, x – затраты на его производство.

Пример производной из биологии.

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и времени t их размножения задана уравнением $y=p\left(t\right)$.

Пусть Δt – промежуток времени от некоторого времени t до $t+\Delta t$. Тогда $y+\Delta y=p\left(t+\Delta t\right)$ – новое значение численности популяции соответствующее моменту $t+\Delta t$, а $\Delta y=p\left(t+\Delta t\right)-p\left(t\right)$ – изменение числа особей микроорганизмов.

Отношение $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ является средней скоростью размножения или средней производительностью жизнедеятельности популяции.

Вычисляя $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$, получаем $p'\left(t\right)$ –производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени t.

3.3.2 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и сложной функции

Если $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ дифференцируемы в точке x , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место формулы

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2) $(uv)'=u'v+uv'$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

4) $(k(u))'=k(u)'$

5) Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $F(t)=f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем для ее производной в этой точке справедлива формула:

$$F'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Доказательство. 1)

$$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)-(u(x)\pm v(x))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)\pm v'(x)$$

2) $$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-(u(x)\cdot v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)\cdot v(x)+u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u\left(x+\Delta x\right)-u\left(x\right)\right)\cdot v\left(x\right)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x\right)\left(v\left(x+\Delta x\right)-v\left(x\right)\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v\left(x\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}u\left(x\right)=u'\left(x\right)v\left(x\right)+u\left(x\right)v'\left(x\right),$$

3) $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u\left(x+\Delta x\right)}{v\left(x+\Delta x\right)}-\frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\cdot v\left(x+\Delta x\right)}{\Delta x\cdot v\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\cdot v\left(x+\Delta x\right)+u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)}{\Delta x\cdot v\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u\left(x+\Delta x\right)-u\left(x\right)\right)\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\left(v\left(x+\Delta x\right)-v\left(x\right)\right)}{\Delta x\cdot v\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u\cdot v\left(x\right)-u\left(x\right)\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v\left(x\right)+u\left(x\right)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v\left(x+\Delta x\right)\cdot v\left(x\right)}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

4) $$\left(k\left(u\right)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ku\left(x+\Delta x\right)-ku\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\left(u\left(x+\Delta x\right)-u\left(x\right)\right)}{\Delta x}=$$

$$=k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u\left(x+\Delta x\right)-u\left(x\right)\right)}{\Delta x}=ku'\left(x\right)$$

3.3.3 Вычисление производных элементарных функций

1)Производная постоянной функци $y=f\left(x\right)=C$, где $C-$ постоянная и выражается формулой $y'=0.$ Так как для любых x и Δx, $f\left(x+\Delta x\right)=C$,

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = C - C = 0\,,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0\,.$$

Следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

2) $y = x^2, y' = 2x$

Составим приращение функции:

$$\Delta y = \left(x+\Delta x\right)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

Тогда, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$.

3) $y = x^3$, $y' = 3x^2$

Аналогично предыдущему, составим приращение функции:

$$\Delta y = \left(x+\Delta x\right)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\left(\Delta x\right) + \left(\Delta x\right)^2 = 3x^2$$

4) $y = \sin x$, $y' = \cos x$

$$\Delta y = \sin\left(x+\Delta x\right) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

5) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x = -\sin x$$

6) $y = tgx$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Так как $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то по правилу 3), из 3.3.2 о производной отношения двух функций, получим

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7) $y = ctgx$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n, n \in Z$.

Так как $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то аналогично предыдущему имеем:

$$(ctgx)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

8) $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$, тогда $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

В силу свойства логарифмов имеем:

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \ln x$, поэтому, учитывая правило дифференцирования произведения постоянной на функцию (см. правило 4), пункт 3.3.2), достаточно найти производную функции $\ln x$.

Очевидно, что $\dfrac{1}{\ln a}$ является постоянной. Итак, получаем

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Таким образом, так как $\Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Положим $\dfrac{\Delta x}{x} = h$, будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

Здесь используется предел из следствия 1 пункта 3.2.5.

Отсюда следует утверждение: $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

9) $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$, то $y' = a^x \ln a$.

Отметим, что , если $a = e$, то $y = e^x$, $y' = e^x$.

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$, (см. следствие 2), пункт 3.2.5), то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

Следующие две формулы приведем без доказательства.

10) $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\left(|x| < 1\right)$.

11) $y = arctgx$, $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

3.3.4 Дифференциал функции и его геометрический смысл

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f\left(x\right)$ на интервале $\left(a;b\right)$ и точка $x_0 \in \left(a,b\right)$. Даем приращение Δx аргумента в точке x_0, получаем точку $x_0 + \Delta x$, которая также из $\left(a;b\right)$. Так как дифференцируемая функция имеет производную в точке x_0 и, по определению, она равна пределу отношения приращения функции $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ к приращению аргумента Δx, будем иметь:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

При малых приращениях Δx отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ мало отличается от $f'\left(x_0\right)$, поэтому можно сказать, что $f'\left(x_0\right) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (производная приближенно равна отношению приращения функции к приращению аргумента) или

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x, \; \Delta y \approx f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Это приближенное значение приращения функции, называется **дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy, поэтому

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

Определение. Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение аргумента.

Если $y = x$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$ и $dy = \Delta x$, т. е. приращение независимой переменной и ее дифференциал совпадают. Окончательно имеем:

$$dy = f'(x_0)dx \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy$ или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Можно сказать, что приращение функции приближенно равно дифференциалу функции. Для того , чтобы вычислить дифференциал надо вычислить производную и умножить ее на дифференциал аргумента.

Геометрический смысл дифференциала. Пусть дана

$$y = f(x)$$

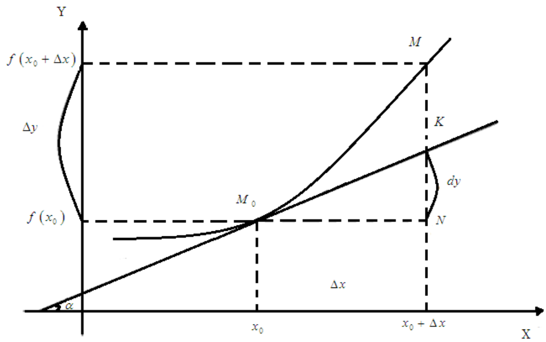


Рис. 14

Даем приращение Δx аргументу и отметим на оси Ox точки x_0, $x_0+\Delta x$. Через эти точки проведем прямые перпендикулярные оси Ox до пересечения с графиком функции, получим точки $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$, $M\left(x_0+\Delta x;\ f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Проведем касательную к графику нашей функции в точке $M_0\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ и, угол который составляет касательная с осью Ox, обозначим через α. Опустим из точек M_0 и M перпендикуляры к Ox, затем прямые перпендикулярные к оси Oy. Обозначим через K, N точки пересечения, как указано на рисунке 14. Отметим, что геометрический смысл производной заключается в том, что $tg\alpha = f'\left(x_0\right)$. На рисунке 14, легко заметить, что треугольник M_0KN – прямоугольный , где $\angle KM_0N=\alpha$ (убедиться самостоятельно). Далее, так как $tg\alpha=\dfrac{KN}{M_0N}=\dfrac{KN}{\Delta x}$, то, по определению, дифференциала мы имеем $KN = f'\left(x_0\right)\Delta x$, а это значит, что $KN = dy$.

Таким образом, ***дифференциал – это изменение ординаты касательной, проведеной к графику функции в точке при приращении аргумента на*** Δx.

Подобно таблице производых можно составить таблицу дифференциалов:

1) $d\left(c\right)=c'dx=0$

2) $d\left(u\pm v\right)=\left(u'\pm v'\right)dx=u'dx\pm v'dx=du\mp dv$

3) $d\left(u\cdot v\right)=\left(u\cdot v\right)'dx=\left(u'v+uv'\right)dx=vu'dx+uv'dx=vdu+udv$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\left(\dfrac{u}{v}\right)'dx=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}dx=\dfrac{vu'dx-uv'dx}{v^2}=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

3.3.5 Основные теоремы дифференциального исчисления и их геометрическое истолкование

***Теорема Ферма* (*необходимое условие экстремума*).** Пусть функция $f\left(x\right)$ определена на интервале $\left(a;b\right)$ и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение, тогда, если в точке x_0 существует конечная производная, то она равна нулю, т. е.

$$f'\left(x_0\right)=0$$

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке x_0 функция имеет наибольшее или наименьшее значение и $f'\left(x_0\right)=0,$ то в точке $M\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$ касательная к графику функции параллельна оси *Ox.*

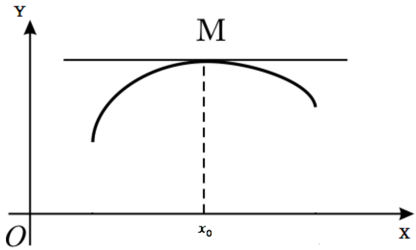


Рис.15

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, причем

1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$
2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$
3) $f(a)=f(b)$

Тогда существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a,b)$, где

$$f'(c)=0$$

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том , что на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и принимает одинаковые значения на концах, тогда существует точка $(c, f(c))$ на графике функции $f(x)$, в которой касательная параллельна оси Ox . Точка c не единственная.

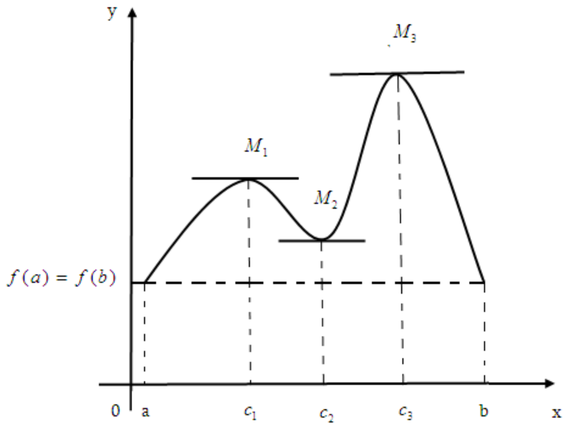


Рис.16

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$ и

1) $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$

2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$

Тогда существует точка $c \in (a,b) -$ такая, что имеет место формула:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (3)$$

или $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ – ***формула Лагранжа*** или ***формула конечных приращений.***

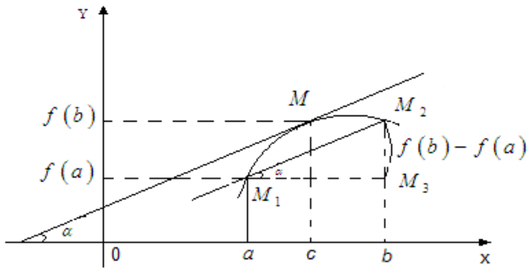


Рис.17

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Из (3) следует, что угловой коэффициент секущей, проведенной через точки $M_1(a; f(a))$ и $M_2(b; f(b))$, который совпадает с угловым коэффициентом касательной к кривой в точке $M(c; f(c))$, параллельной секущей M_1M_2. Таких точек может быть несколько, но одна точно существует. Итак, из сказанного выше имеем: $f'(c) = tg\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, где $\alpha -$ угол между касательной и осью Ox.

Теорема Коши. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$ и $g'(x) \neq 0$, тогда существует точка $c \in [a;b]$ такая, что справедлива формула:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{4}$$

Формула (4) называется ***формулой Коши*** или обобщенная формула конечных приращений.

3.3.6 Определение производных высших порядков. Производные высших порядков некоторых элементарных функций. Дифференциалы высших порядков

Легко заметить, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента. Следовательно, возможно, что функция $f'(x)$ сама может иметь производную. Производная от производной функции называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$.

Производная от второй производной некоторой функции называется производной функции третьего порядка и так далее.

Производная n-го порядка получается от производной $(n-1)$-го порядка, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные, начиная со второй, называются производными высшего порядка и обозначаются следующим образом:

$$y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \ldots,\ y^{(n)}\ ,\ \ldots \text{или}$$

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),\ \ldots$$

Вычисление n-ой производной некоторых функций

1) $y = x^{\alpha}$, $(x > 0), \alpha \in R$.

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ldots$, $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}$.

Если $\alpha = m$, $m \in N$, то $\left(x^m\right)^{(m)} = m!$, тогда $\left(x^m\right)^{(m+1)} = 0$.

2) $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

$y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x(\ln a)^2$, $y''' = a^x(\ln a)^3, \ldots,$

$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

В частности, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

3) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,…,

$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $y = \cos x$.

Аналогично 3^0 получим: $y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Существует ***формула Лейбница*** для нахождения производной n-го порядка от произведения двух функций. Пусть $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции от переменной x, имеющие производные любого порядка. Тогда будем иметь:

$y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$,

$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$,

а $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (C_n^m – сочетание из n по m, а $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, тогда ее дифференциал, определенный по формуле (2) (см. пункт 3.3.4)

$$dy = f'(x)dx$$

называется дифференциалом 1-го порядка. Дифференциал от дифференциала называется дифференциалом 2-го порядка функции $f(x)$ и обозначается d^2y и так далее. Дифференциал от дифференциала $d^{(n-1)}y$ называется дифференциалом n -го порядка и обозначается $d^n y$.

Таким образом, мы получаем

$$dy = f'(x)dx,\ d^2y = f''(x)(dx)^2,\ \dots, d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n,\ \dots$$

3.3.7 Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя

Рассмотрим несколько видов неопределенностей.

1^0. ***Неопределенность вида*** $\dfrac{0}{0}$.

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad (1).$$

Раскрыть эту неопределенность значит $-$вычислить $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

***Теорема 1 (правило Лопиталя 1*)**.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, исключая саму точку. Пусть выполняется условие (1) и $g'(x) \neq 0$ в окрестности a, тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем они равны, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Замечание* 1.** Если $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют теореме 1, то к ним можно применить ту же теорему.

***Замечание* 2.** Теорема верна при $x\to\pm\infty$.

2^0.***Неопределенность вида*** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Здесь выполняется условие:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty \qquad (2).$$

***Теорема 2 (правило Лопиталя 2*).** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением самой точки a. Пусть выполняется условие (2), тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и они равны.

Замечание. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^∞ часто удается свести к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований и правил Лопиталя.

Первая неопределенность сводится к теореме 1 или 2 следующим образом. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением самой точки a, и выполняются условия:

$$\lim_{x\to a}f(x)=0;\ \lim_{x\to a}g(x)=+\infty,$$

тогда неопределенность сводится к теореме 1.

Действительно,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

или , записав другим способом, к теореме 2:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вторую неопределенность можно свести к теореме 1 . Допустим функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, за исключением самой точки a, и выполняется условие:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,$$

тогда будем иметь:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Как видим, остается использовать теорему 1.

Последние три неопределенности возникают при рассмотрении функции $y=f(x)^{g(x)}$, если $x\to a$ функция $f(x)$ стремится к 1, ∞, 0, а $g(x)$ стремится, соответственно, к ∞, 0, ∞. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$ или $f(x)\to\infty$, $g(x)\to 0$ и последний случай, когда $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$. Чтобы найти предел вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ можно представить функцию

$y = f(x)^{g(x)}$ в виде $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}$. Остается применить одну из теорем: 1 или 2.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{tgx}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

3.3.8 Формула Тейлора

Формула Тейлора – одна из главных формул математического анализа, имеющая многочисленные применения в анализе.

Итак, пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные $(n+1)$-го порядка. Пусть x – любая точка из окрестности точки a, тогда справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right). \qquad (1)$$

Эта формула называется ***формулой Тейлора***, а выражение $o\left((x-a)^n\right)$ – остаточным членом в форме ***Пеано***.

Функция $\varphi(x)=o\left((x-a)^n\right)$ представляет из себя бесконечно малую функцию более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$, что означает:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=0$$

Формула Маклорена

Формулу Тейлора (1) при $a=0$ называют формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left((x)^n\right),$$

где $o\left((x)^n\right)$ – остаточный член в форме ***Пеано.***

Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

1) $f(x)=e^x$.

Поскольку, $f'(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x$,

$$f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n+1)}(0)=1,$$

то для любых x и n формула Маклорена имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

2) $f\left(x\right)=\sin x$.

Поскольку $f^{(n)}\left(x\right)=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}\left(0\right)=\begin{cases}0 & ,\ n=2k\\ \left(-1\right)^{\frac{n-1}{2}}, & n=2k-1\end{cases},$$

То формула Маклорена имеет вид:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+o\left(x^{2n}\right).$$

3) $f\left(x\right)=\cos x$.

Так как $f^{(n)}\left(x\right)=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}\left(0\right)=\begin{cases}0 & ,\ n=2k\text{-}1\\ \left(-1\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k\end{cases},$$

Отсюда формула Маклорена имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Приведем пример, при решении которого используется разложение элементарной функции в ряд Маклорена

Пример 1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\right)-x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots}{x^3}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\cdots=-\frac{1}{6}$$

3.3.9 Исследование функций

Признак монотонности.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и $f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$ на $(a;b)$, то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на $(a;b)$.

Определение 1. Точка x_0 называется ***точкой строгого локального максимума (минимума)*** функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ - окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)< f(x_0)$ $\left(f(x)> f(x_0)\right)$ при $x\neq x_0$ (см. рис. 18, 19). Локальный максимум и локальный минимум обьединяются общим названием $-$ ***локальный экстремум.***

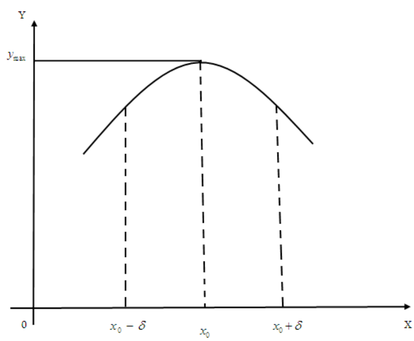


Рис. 18

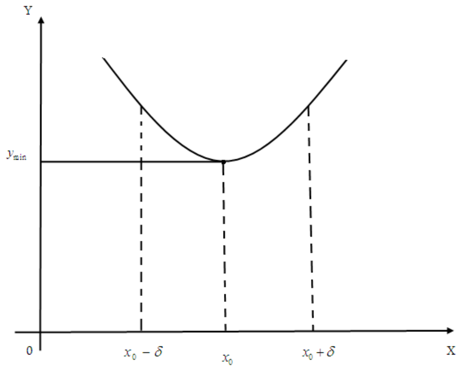


Рис.19

Теорема 2 **(*необходимое условие локального экстремума*).** Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$f'(x_0)=0 \qquad (2)$$

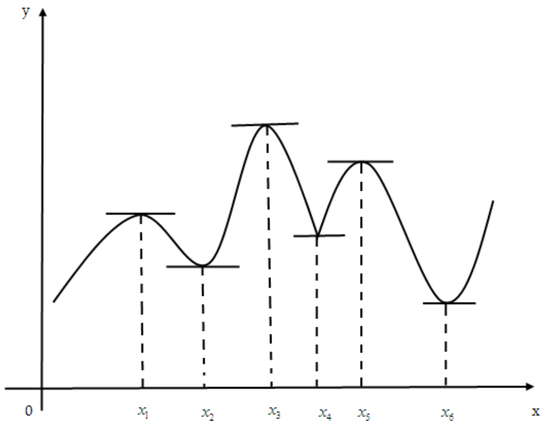


Рис. 20

Геометрический смысл состоит в том, что если $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ – точки локального экстремума и в соответствующих точках графика существуют касательные, то эти касательные параллельны оси Ox (см. рис. 20).

Такие точки называются ***стационарными (критическими)*** или же точками возможного экстремума. Условие (2) необходимое, но не достаточное условие локального экстремума.

***Теорема 3* (*достаточное условие локального экстремума*).** Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 – точка локального максимума, если же $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 – точка локального минимума, а если $f'(x)$ не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.

Отметим, каким образом можно найти наибольшее и наименьшее значение функции.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ заданной на отрезке $[a;b]$, необходимо выполнить следующие действия.

1) Найти все критические точки: $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$.
2) Найти значения функции в критических точка $f(x_1), f(x_2),\ \dots,\ f(x_n)$.
3) Вычислить значения функции на концах отрезка $[a,b]$: $f(a),\ f(b)$.
4) Сравнить значения функции в критических точках и на концах отрезка $f(x_1), f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b)$ и выбрать $f_{наиб},\ f_{наим}$.

Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке $(a;b)$, тогда существует касательная к графику функции $f(x)$, проходящая через любую точку $M\left(x; f\left(x\right)\right)$ этого графика $\left(a < x < b\right)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy, потому что ее угловой коэффициент, равный $f'\left(x\right)$, – конечен.

Определение 2. Будем говорить, что график функции $f\left(x\right)$ имеет на $\left(a,b\right)$ выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на $\left(a,b\right)$.

Определение 3. Скажем, что график функции $f\left(x\right)$ на $\left(a;b\right)$ имеет выпуклость вниз (вверх) если для любых $x_1,\ x_2 \in \left(a,b\right)$, выполняется условие:

$$f\left(\frac{x_1+x}{2}\right) \le \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2} \left(f\left(\frac{x_1+x}{2}\right) \ge \frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}\right).$$

Теорема 4. Если функция $f\left(x\right)$ имеет на интервале $\left(a,b\right)$ конечную $f''\left(x\right)$ и $f''\left(x\right) \ge 0$ $\left(f''\left(x\right) \le 0\right)$ во всех точках $\left(a;b\right)$, то график функции $f\left(x\right)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх) на $\left(a;b\right)$.

Определение 4. Точка $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $f\left(x\right)$, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $f\left(x\right)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Теорема 5 **(*необходимое условие точки перегиба*).** Пусть дважды дифференцируемая в точке x_0 функция $f\left(x\right)$ имеет точку перегиба $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$, тогда вторая производная в точке x_0 равна нулю, т. е.

$$f''(x_0)=0.$$

***Теорема 6* (*достаточное условие точки перегиба*).** Если при переходе через точку x_0 вторая производная функции $f(x)$ меняет свой знак, то $M(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба ее графика.

Схема исследования графика функции и его построение

1) Определить область определения функции.

2) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

3) Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции.

4) Определить направления выпуклости и точки перегиба.

5) Построить график.

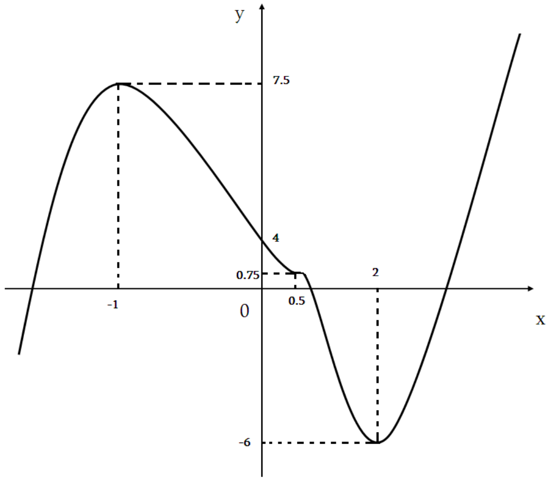
Пример 1. Построим график функции

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4.$$

Областью определения этой функции будет вся числовая ось. В точке (0; 4) график функции пересекает ось ординат. Теперь найдем производную данной функции $f'(x)=3x^2-3x-6=3\left(x^2-x-2\right)$ и, приравнивая нулю, найдем критические точки: $x^2-x-2=0, \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}.$

Очевидно, что $f(x)\uparrow(-\infty;-1]$ и $[2;+\infty)$, $f(x)\downarrow[-1;2]$. Легко заметить, что $x_{\min}=2$, $x_{\max}=-1$, тогда $y_{\min}=-6$, $y_{\max}=7\frac{1}{2}$.

Теперь найдем точку перегиба. Для этого найдем $f''(x)$ и приравняем нулю, т. е. $f''(x)=6x-3=0$, $x=\dfrac{1}{2}$. Так как $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$, то точкой перегиба является точка $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$ Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, то можно начертить эскиз графика функци



3.4 Числовые ряды

3.4.1 Понятие ряда и условие его сходимости

Пусть имеем некоторую последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

Определение 1. Бесконечная сумма всех элементов последовательности

$$a_1+a_2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ . \qquad (1)$$

называется ***рядом.***

Числа $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ называются членами ряда, а член a_n с произвольным номером – общим членом ряда.

Обозначим через

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (2)$$

сумму первых n элементов ряда , называют ***частичной суммой ряда*** (1).

Из (2) будем иметь:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (3)$$

Определение 2. Ряд (1) называется сходящимся, если его частичные суммы имеют конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

В противном случае ряд – расходящийся. Предел S является ***суммой*** ряда (1).

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится. Действительно,

рассмотрим частичную сумму: $S_m = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{m\cdot(m+1)}$

, которую можно записать в виде:

$$S_m = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{m+1}\right) = 1.$

Итак, последовательность частичных сумм сходится к 1, а это значит, что ряд сходится, и его сумма равна 1.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Доказательство. По условию, ряд (1) сходится. Обозначим его сумму через S. Рассмотрим частичные суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Очевидно, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как , $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S,$ следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Обратное утверждение неверно, то есть из условия $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда (1).

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится так как

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

т.е. частичные суммы не ограничены, хотя $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Теорема 2. Для сходимости ряда (1) с положительными членами, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм (3) была ограничена .

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что последовательность его частичных сумм (3) имеет конечный предел. В силу теоремы об ограниченности сходящейся последовательности (см. теорема 2, пункт 3.1.5).

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – с неотрицательными членами, то его частичные суммы образуют неубывающую монотонную последовательность:

$0 \le S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n \le S_{n+1} \le \ldots$. В силу теоремы о существовании предела у монотонной и ограниченной последовательности, последовательность $\{S_n\}$ сходится, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Что и требовалось доказать.

3.4.2 Некоторые признаки сходимости рядов

Приведем основные признаки сходимости рядов и начнем с признаков сравнения.

***Теорема 3* (*признак сравнения 1*).** Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таковы, что $0 \le a_n \le b_n$ при всех *n*. Тогда из сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а также из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

***Теорема 4* (*признак сравнения* 2).** Пусть члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны. Если существует предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K\left(0 \le K \le +\infty\right),$$

тогда:

1) при $0 < K < +\infty$ оба ряда сходятся или расходятся одновременно;

2) при $K = +\infty$ из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

3) при $K = 0$ из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 5 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда

а) если $q < 1$, то ряд (1) сходится;

б)если же $q > 1$, то ряд (1) расходится;

в) если $q = 1$, то ответа нет.

Теорема 6 (признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда

а) если $q < 1$,то ряд (1) сходится,

б) если же $q > 1$,то ряд (1) расходится,

в) если $q = 1$, то ответа нет.

Теорема 7 (теорема Лейбница). Пусть имеем знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (5)$$

для которого выполняются условия:

а) $0 \le a_{n+1} \le a_n,\ n = 1, 2, \cdots$, б) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд (5) сходится.

3.5 Неопределенный интеграл и его основные свойства

3.5.1 Первообразная функция

Одной из основных задач интегрального исчисления является восстановление функции по известной производной этой функции.

Другими словами, найти функцию $F(x)$, производная которой равнялась бы функции $f(x)$, т. е.

$$(F(x))' = f(x).$$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка, выполняется равенство $(F(x))' = f(x)$.

Так как эта задача решается неоднозначно, в силу того, что производная постоянной равна нулю, то функция $F(x)+C$ также будет первообразной для $f(x)$. В этом легко убедиться: $(F(x)+C)' = f(x)$ для любого числа C.

Определение 2. Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $\{F(x)+C\}$, где C − произвольная постоянная, называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

3.5.2 Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов

Приведем формулы, некоторые из которых следуют из определения интегрирования, а справедливость остальных формул можно проверить дифференцированием.

$1^0. \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

$2^0. \int F'(x)dx = F(x)+C$

$3^0.$ Постоянный множитель можновынести из под знака интеграла, т.е. если константа $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$4^0. \int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов:

1) $\int kdx = kx + C$

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1)$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \sin xdx = -\cos x + C$

9) $\int \cos xdx = \sin x + C$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$

14) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Доказательство **12).** Докажем для случая, когда

а) $\frac{x-a}{x+a} > 0$, тогда

$$\left(\ln \frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{x+a}{x-a} \cdot \left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{2a}{x^2 - a^2}$$

б) если $\frac{x-a}{x+a} < 0$, то

$$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \left(\ln \frac{a-x}{x+a}\right)' = \frac{x+a}{a-x} \cdot \left(\frac{a-x}{x+a}\right)' = \frac{x+a}{a-x} \cdot \frac{-x-a-a+x}{(x+a)^2} = \frac{2a}{x^2 - a^2}$$

Доказательство. **13).**

$$\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm k}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 \pm k}\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm k}}}{x + \sqrt{x^2 \pm k}} =$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 \pm k}}{x + \sqrt{x^2 \pm k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}}.$$

Аналогично можно доказать формулы 14), 15).

3.5.3 Методы интегрирования неопределенного интеграла

1. *Непосредственное интегрирование.* Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием.

2. *Метод подстановки* (*замена переменной*). Введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла. Этот метод основан на следующей теореме:

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке Т и пусть X – множество значений функции, на котором определена функция $f(x)$, т.е. на Т определена сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то справедлива формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C \qquad (1)$$

3. Метод интегрирования по частям

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)v(x)$ интегрируема на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)v'(x)$ так же интегрируема и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \qquad (2)$$

Доказательство. Так как по правилу дифференцирования произведения двух функций мы имеем:

$$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(см. 3.3.2 свойство 1^0) Отсюда получаем:

$$u(x)v'(x)=\left[u(x)v(x)\right]'-u'(x)v(x),$$

А поскольку, первообразной для функции $\left[u(x)v(x)\right]'$ является функция $u(x)\cdot v(x)$, а функция $u'(x)v(x)$ интегрируема по условию теоремы, функция же $u(x)v'(x)$ интегрируема как разность интегрируемых функций (см. пункт 3.4.2, свойство 4^0), следовательно, интегрируя последнее равенство, получим формулу (2).

4. Интегрирование простейших рациональных дробей

Задача интегрирования рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и интегрированию рациональной функции (см. п. 3.2.3), что сводится к нахождению интегралов четырех типов:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C,$

2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^r}dx=\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}}+C,(r>1)$

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x+2px+q}dx$

4) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}dx,(r>1).$

Третий интеграл часто встречается на практике. Во-первых, из трехчлена выделяем полный квадрат:

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+p-q^2,$$

затем делаем подстановку $x+p=t,$ а отсюда получаем $x=t-p,\ dx=dt$, далее положим $q-p^2=h>0$ и перейдем к переменной t.

Итак, с помощью табличных интегралов получаем:

$$\int \frac{Ax+B}{x+2px+q}dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+h} + (B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|t^2+h\right| + \frac{(B-Ap)}{\sqrt{h}} arctg\frac{t}{\sqrt{h}} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+2px+q\right| + \frac{B-Ap}{\sqrt{q-p^2}} arctg\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C$$

Интеграл типа 4) требует более глубоких знаний, поэтому решение не приводится.

3.6 Определенный интеграл

3.6.1 Определение определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Разобьем этот отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

Обозначим это разбиение через τ, а точки

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n$$

будем называть точками разбиения. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую будем называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

которую назовем интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a;b]$, соответствующей данному разбиению $[a;b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i. Геометрический смысл суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(\zeta_1), f(\zeta_2), ..., f(\zeta_n)$, если $f(x) \geq 0$ (см. рис. 21).

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения τ : $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$.

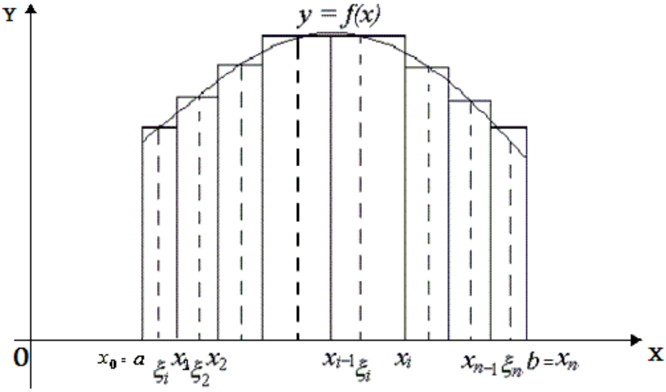


Рис 21

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

В этом случае функция называется ***интегрируемой*** на $[a,b]$. Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Следует отметить следующую важную теорему.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.

3.6.2 Основные свойства определенного интеграла

1^0. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ т.е если в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $a = b$, если $a < b$,

$$\int\limits_a^b f(x) = -\int\limits_b^a f(x) \quad (4)$$

2^0. Каковы бы ни были числа a, b, c всегда имеет место равенство:

$$\int\limits_a^b f(x) = \int\limits_a^c f(x) + \int\limits_c^b f(x) \quad (5)$$

Доказательство. Допустим $a < c < b$. Так как $\sigma -$ интегральная сумма, не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$, то возьмем за точку разбиения точку с, если $c = x_m$, то интегральную сумму σ (см. пункт 3.6.1 формула (1)) можно разбить на две суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Перейдя к пределу в этом равенстве, при $\lambda \to 0$, получим равенство (5). Если a, b, c расположены по - другому, например $a < b < c$, тогда

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

учитывая (3),

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

т.е. приходим к равенству (5).

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (6)$$

Составим интегральную сумму

$$\sigma' = \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Перейдя к пределу, получим

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx,$$

т.е. получим (6).

4^0. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$, так как

$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ и $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5^0. **Формула среднего значения.** Если функция непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (7)$$

3.6.3 Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Если изменять, например, верхний предел, не выходя из $[a;b]$, то величина интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ будет меняться, т.е. интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела:

$$\int_a^x f(t)dt, \ (a \le x \le b).$$

Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, т.е.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (8)$$

и назовем ее ***определенным интегралом с переменным верхним пределом.***

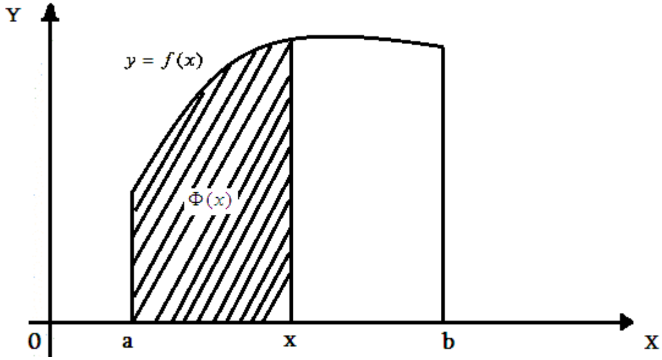


Рис. 22

Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции (см. рис. 22), если $f(x) > 0$.

Теорема. Производная определенного интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе, т.е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \text{ или } (\Phi(x))' = f(x). \qquad (9)$$

Доказательство. Возьмем любое значение $x \in [a;b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $x + \Delta x \in [a;b]$. Тогда функция $\Phi(x)$, определенная выражением (8), получит новое значение:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

В силу свойства 2^0 (см. пункт 3.6.2) определенного интеграла будем иметь

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Отсюда находим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Из теоремы о среднем значении (см. свойство 5^0, пункт 3.6.2),

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x$$

где c – число, заключенное между числами x и $x + \Delta x$. Разделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c)$$

Если $\Delta x \to 0$, то $c \to x$ и тогда, в силу непрерывности функции

$f(x)$ на $[a;b]$, $f(c) \to f(x)$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{x \to c} f(c) = f(x)$$

или $\left(\Phi(x)\right)' = f(x)$. Таким образом, мы установили, что любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную.

3.6.4 Формула Ньютона -Лейбница

Как было установлено, непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная для функции $f(x)$ на этом же отрезке $[a;b]$. Так как первообразные $\Phi(x)$ и $F(x)$ отличаются на постоянную, то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \ (a \le x \le b)$$

где C – некоторое число. Подставляя в это равенство значение $x = a$ и используя формулу (3) (свойство 1^0, см.пункт 3.6.2), имеем

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C, \ 0 = F(a) + C, \ C = -F(a)$$

Итак, для любого $x \in [a;b]$, имеем

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Полагая $x = b$, получаем соотношение

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

являющееся основной формулой интегрального исчисления, которая называется формулой ***Ньютона-Лейбница***, ее можно записать так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

3.6.5 Методы интегрирования определенного интеграла

1.Метод замены переменной (метод подстановки).

Правило замены переменной под знаком определенного интеграла часто используется при вычислении определенных интегралов.Удобно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ строго монотонная и имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда, если $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

2. ***Метод интегрирования по частям***

Теперь сформулируем правило интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (2)$$

Формулу (2) можно записать в виде:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \quad (3)$$

Отметим, что иметь непрерывную производную на отрезке $[a;b]$, это значит, что функция дифференцируема и ее производная непрерывна в любой точке $[a;b]$.

3.6.6 Некоторые приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции. Пусть на плоскости Oxy задана фигура ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, самим отрезком $[a,b]$ на оси Ох, прямыми $x = a$, $x = b$. Такую фигуру называют ***криволинейной трапецией***, площадь которой можно вычислить по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Если фигура ограничена снизу и сверху графиками функций $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$, $a \le x \le b$, соответственно, и прямыми $x = a$, $x = b$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ – непрерывные функции, то площадь данной фигуры равна

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

2. Длина дуги кривой. Пусть задана плоская кривая AB, уравнение которой $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $\left[a,b\right]$. Если функция $f\left(x\right)$ имеет непрерывную производную $f'\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;b\right]$, то длина дуги AB вычисляется по формуле:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx$$

3.Обьем тела вращения. Пусть дана функция $y=f\left(x\right)$ непрерывная на отрезке $\left[a;b\right]$. Построим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную графиком $y=f\left(x\right)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и будем вращать ее вокруг оси Ox. Получим тело, которое называется ***телом вращения***. Обьем можно вычислить по формуле:

$$V=\int_a^b\pi\left[f\left(x\right)\right]^2dx$$

3.7 Функции нескольких переменных

3.7.1 Понятие функции двух переменных и ее геометрическая интерпретация

Определение 1. Функцией двух переменных определенной на множестве A, называется правило f, которое сопоставляет каждой упорядоченной паре чисел x и y (т.е. $\left(x,y\right)\in A$) одно определенное число z $\left(z\in B\right)$.

В этом случае пишут $z=f\left(x,y\right)$.

Определение 2. Множество пар $\left(x,y\right)$ на котором определена функция $z=f\left(x,y\right)$ называется ***областью определения*** функциии и обозначается: $D\left(f\right)$.

Приведем примеры функций нескольких переменных.

1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (уравнение сферы с центром в точке $K(a,b,c)$ и радиусом R), здесь зависимая переменная z неявно зависит от x и y;

2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (уравнение конуса);

3) $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом R)

Найти области определения следующих функций:

Пример 1.

$z=x^2+y^2$,

Пример 2 .

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Областью определения функции может быть вся плоскость или ее часть. Для первой функции областью определения будет вся плоскость, а для второй замкнутый круг с центром в начале координат и единичным радиусом: $x^2+y^2\le 1$.

Множество A будет областью определения функции, а множество B $-$областью значений функции. Переменные x и $y-$независимые переменные, а $z-$зависимая переменная.

Дадим геометрическую интерпретацию функции двух переменных. Для этого введем трехмерную прямоугольную систему координат $Oxyz$, которая образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ox , Oy и Oz. Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками $Ox-$ось абсцисс, Oy $-$ось ординат, Oz $-$ось аппликат (см.рис. 23).

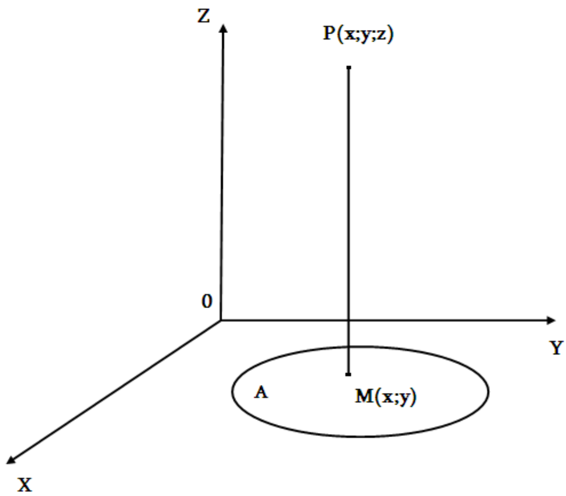


Рис.23

Пусть имеем функцию $z = f(x, y)$ заданную на множестве A. Каждой точке $M(x; y)$ из A соответствует одно значение $z = f(x, y)$. Таким образом, определяется точка $P(x, y, z)$ в пространстве *Oxyz*. Если точку $M(x; y)$ передвигать в плоскости *Oxy*, совмещая с множеством A, соответствующая точка $P(x, y, z)$ будет описывать в пространстве некоторую поверхность или кривую.

Итак, можно сказать, что соотношение $z = f(x, y)$ в системе координат *Oxyz* в общем случае определяет какую-либо поверхность или кривую.

3.7.2 Предел функции двух переменных

Пусть $M(x;y)-$точки на плоскости с координатами x и y, а точка $M_0(x_0;y_0)-$фиксированная точка с координатами x_0 и y_0.

Определение 1. Множество точек $\{M(x;y)\}$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

(или короче $\rho(M,M_0)<\delta$) называется δ-окрестностью точки $M_0(x_0;y_0)$.

Другими словами, δ - окрестность точки M_0-это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 и радиусом δ.

Рассмотрим последовательность точек
$M_1,\ M_2,\ ...\ ,M_n,\ ...$ с их координатам $M_n(x_n;y_n),\ n=1,2,...$

Определение 2. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется ***сходящейся к точке*** M_0**,** если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для любого $n>N$ выполняется неравенство $\rho(M_n;M_0)<\varepsilon.$ При этом точка M_0 называется пределом последовательности $\{M_n\}$.

Символически это можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$.

Определение предела функции будет аналогично определению предела функции одной переменой.

Определение 3. Число C называется ***пределом*** функции $z=f(M)$ в точке M_0, если для любой последовательности

$\{M_n\}$ сходящейся к M_0 $\left(M_n \in \{M\}, M_n \neq C\right)$, соответствующая последовательность значений функции $\left\{f\left(M_n\right)\right\}$ сходится к C.

Этот факт можно записать двумя способами:

а) $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) = C$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right) = C$

Определение 4. Число C называется пределом функции $z = f\left(M\right)$ в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho\left(M, M_0\right) < \delta$, выполняется неравенство:

$$\left|f\left(M\right) - C\right| < \varepsilon .$$

Используя определение предела функции двух переменных, можно перенести основные теоремы от одной переменной на функции двух переменных.

Теорема. Пусть функции $f\left(M\right)$ и $g\left(M\right)$ определены на одном и том же множестве $\{M\}$ и имеют в точке M_0 пределы B и C. Тогда функции $f\left(M\right) \pm g\left(M\right)$, $f\left(M\right) \cdot g\left(M\right)$ и $\dfrac{f\left(M\right)}{g\left(M\right)}$ $\left(C \neq 0\right)$ имеют в точке M_0 пределы, равные, соответственно, $B \pm C$, $B \cdot C$, $\dfrac{B}{C}$.

3.7.3 Непрерывность функции двух переменных

Понятие непрерывности функции двух переменных вводится на основе понятия предела.

Определение 1. Функция $z = f\left(M\right)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке.

Этот факт можно записать двумя способами:

а) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(M_0)$.

Определение 2. Функция $z = f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если для любой последовательности $\{M_n\}$ сходящейся к M_0 ($M_n \in \{M\}$) соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к $f(M_0)$.

Определение 3. Функция $z = f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon .$$

Определение 4. Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если бесконечно малому изменению значений x и y соответствует бесконечно малое изменение значения $f(x, y)$.

3.7.4 Производные функций от двух переменных

Пусть на некотором множестве $\{M\}$ плоскости задана функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ из $\{M\}$. Придадим значению x_0 приращение Δx, оставляя неизменным y_0, т. е. от точки $M_0(x_0; y_0)$ перейдем к точке $M_1(x_0 + \Delta x, y_0)$. Причем

Δx берем таким, чтобы точка $M_1\left(x_0+\Delta x, y_0\right)$ была из $\{M\}$, тогда функция получит приращение

$$\Delta_x z = f\left(x_0+\Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right),$$

которое назовем частным приращением по x в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$.

Аналогично определяется частное приращение по y

$$\Delta_y z = f\left(x_0, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$$

Назовем ***частной производной*** функции $z = f\left(x, y\right)$ по x в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ следующий предел:

$$f'_x\left(x_0, y_0\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}$$

Аналогично, определяется частная производная функции $z = f\left(x, y\right)$ по y в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$:

$$f'_y\left(x_0, y_0\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y}$$

Введем понятие ***полного дифференциала***. Для этого придадим обоим переменным $x,\ y$ приращения Δx и Δy, тогда функция $z = f\left(x, y\right)$ получит полное приращение:

$$\Delta z = \Delta f\left(x_0, y_0\right) = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right) =$$

$$= f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y, \qquad (1)$$

где α, β зависят от Δx и Δy и вместе с ними стремятся к нулю. Формула (1) имеет место, если существуют непрерывные частные производные $f'_x\left(x, y\right)$, $f'_y\left(x, y\right)$ не только в точке

$M_0(x_0;y_0)$, но и в некоторой ее окрестности.

Выражение

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

называется ***полным дифференциалом*** функции $z=f(x,y)$, а

$$d_x f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx,\ d_y f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)dy$$

– ***частными дифференциалами.***

3.7.5 Частные производные высших порядков. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$, определеная на множестве $\{M\}$, имеет частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, которые существуют всюду в $\{M\}$. В этом случае частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ представляют собой функции двух переменных x и у определенные на $\{M\}$. Эти производные называются ***частными производными 1-го порядка.***

В свою очередь, частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в точке $M\in\{M\}$, если они существуют, то называются ***частными производными 2-го порядка*** и обозначаются символами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=f_{x^2}^{(2)}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=f_{y^2}^{(2)}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=f_{yx}^{(2)}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=f_{xy}^{(2)}(x,y).$$

Производные $f''_{yx}(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$ – называются ***смешанными частными производными.***

Пример 1. Вычислить частные производные 1-го и 2-го порядка следующей функции: $z = 2x^2y + xy^3$.

Решение. $z'_x = 4xy + y^3$, $z'_y = 2x^2 + 3xy^2$, $z''_{xx} = 4y$,

$$z''_{yy} = 6xy,\ z''_{xy} = 4x + 3y^2,\ z''_{yx} = 4x + 3y^2.$$

Как видим, смешанные производные совпадают. Чтобы понять почему, приведем следующую теорему.

***Теорема* (*о смешанных производных*).** Если функция $z = f(x, y)$, определенная и непрерывная на $\{M\}$, имеет непрерывные смешанные производные $f''_{xy}(x, y)$, $f_{yx}''(x, y)$ в $\{M\}$, то значения смешанных частных производных во всех точках $\{M\}$ совпадают, т. е.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y). \tag{1}$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на множестве $\{M\}$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ из $\{M\}$.

Определение. Скажем , что функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет локальный максимум (минимум), если для некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ $\left(f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\right)$

Такие точки называются ***точками экстремумов***.

***Теорема 1* (*необходимое условие экстремума*).** Если точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, тогда частные производные 1-го порядка в этой точке равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{2}$$

Точки, в которых частные производные 1-го порядка равны нулю, называются ***стационарными*** или ***критическими***.

Теорема 2 **(*достаточные условия экстремума*).** Если точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – критическая точка функции $z = f\left(x, y\right)$ (т.е. имеет место условие (2)) и в некоторой ее окрестности функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка.

Обозначим значения частных производных 2-го порядка в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ таким образом:

$$f''_{xx}\left(x_0, y_0\right) = A,\ f''_{yy}\left(x_0, y_0\right) = B,$$

$$f''_{xy}\left(x_0, y_0\right) = f''_{yx}\left(x_0, y_0\right) = C.$$

Тогда если,

1) $\Delta = AB - C^2 > 0$, то в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ – экстремум, причем при $A < 0$ – максимум, а при $A > 0$ – минимум.

2) Если $\Delta = AB - C^2 < 0$, функция не имеет экстремума.

3) Если $\Delta = AB - C^2 = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Пример 2. Найти стационарные точки функции:

$$z = x^3 + y^3 - 3\left(x + y\right).$$

Решение. Вычислим частные производные 1-го порядка $z'_x = 3x^2 - 3$, $z'_y = 3y^2 - 3$ и решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Получаем четыре точки с координатами (1,1); (–1,1); (–1;–1) и (1;–1) .

Ответ: (1,1); (–1,1); (–1;–1) и (1;–1) .

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$$

Решение. Вычислим частные производные 1-го порядка: $z'_x = 2x - y - 2$, $z'_y = -x + 2y + 1$. Приравняем их нулю и решив систему уравнений: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$, получим одну стационарную точку $M(1;0)$. Далее, найдем частные производные 2-го порядка и их значения в точке $M(1;0)$. Получаем: $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = -1$. И, наконец, вычислив $\Delta = 3 > 0$, имея $z''_{xx} = 2 > 0$, мы можем сказать, что точка $M(1;0)$ является точкой минимума нашей функции.

Ответ. $M(1;0)$ – точка минимума.

3.8 Приближенное решение нелинейных алгебраических уравнений

Метод половинного деления (***метод вилки***).

Пусть $x = c$ является корнем уравнения $f(x) = 0$ и внутренней точкой отрезка $[a;b]$, при условии, что других корней на $[a;b]$ нет. Относительно функции $f(x)$ мы предположим, что она непрерывна на $[a;b]$ и имеет на концах этого отрезка значения разных знаков. Для определенности будем считать $f(a) < 0,\ f(b) > 0.$ Разделим $[a;b]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки. Обозначим его $[a_1, b_1]$ (если значение $f(x)$ в середине $[a;b]$ равно нулю, то искомый корень найден). Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset\ ,...$$

обладающих тем свойством, что для любого n, на их концах $[a_n,b_n]$ выполняются условия $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0.$ Отметим, что длина отрезка $[a_n;b_n]=\dfrac{b-a}{2^n}$, и она стремится к нулю при $n\to\infty$, а, по известной теореме математического анализа, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности, т. е. такая, что $a_n\le c\le b_n$ и каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремится к c. Искомым корнем будет $x=c$. За приближенное значение корня можно взять середину отрезка $[a_n;b_n]$, т. е. Точку $\dfrac{a_n+b_n}{2}$. Поскольку длина $[a_n,b_n]$ равна $\dfrac{b-a}{2^n}$, то число $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ отличается от точного значения корня не более, чем на $\dfrac{b-a}{2^n}$. Таким образом, описанный выше метод отыскания корня уравнения $f(x)=0$ позволяет вычислить искомый корень с любой точностью.

Метод касательных **(** *метод Ньютона* **)**

Метод касательных является одним из самых эффективных приближенных методов вычисления корней уравнения $f(x)=0$. Пусть $x=c$ корень, являющийся внутренней точкой отрезка $[a;b]$. Предположим на $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$ одного знака, а ее значения $f(a)$, $f(b)$ – разных знаков. Постоянство знака $f'(x)$ указывает на то, что функция $f(x)$ на $[a;b]$ либо возрастает, либо только убывает, и в обоих случаях график функции $f(x)$ пересекает ось только в одной точке, т. е. $x=c$ будет единственным корнем на $[a;b]$. Постоянство же знака $f''(x)$ указывает на то, что направление выпуклости на этом отрезке не меняется.

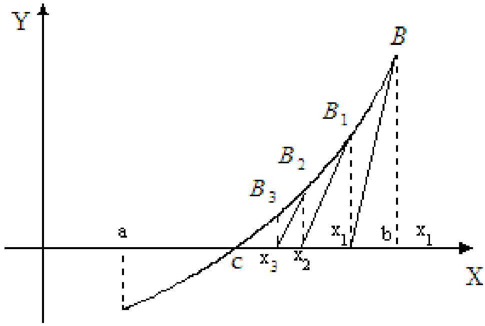


Рис 23

Для определенности рассмотрим случай, когда $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. Проведем через точку $B(b; f(b))$, касательную к графику функции $f(x)$ (см. рис. 23) и составим ее уравнение: $f(x)-f(b)=f'(b)(x-b)$. Положив $f(x)=0$, найдем точку пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

Возьмем за первое приближенное значение корня точку x_1 . Далее, проведем касательную через точку $B_1(x_1; f(x_1))$ и возьмем за второе приближенное значение корня точку x_2:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим для любого n формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1)$$

выражающую x_{n+1} через x_n. При этом получается последовательность приближенных значений корня c:

$$x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > x_{n+1} > ... > c \qquad (2)$$

Формула (1) является основной рекурентной формулой метода касательных, представляющий из себя метод последовательных приближений, которые строятся при помощи формулы (1). Последовательность (2) сходится к c. Это был случай $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$. Возможны еще три случая: $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$;

2) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$; 3) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ в каждом из которых приближение проводится в полной аналогии с рассмотренным случаем.

Задачи к главе 3

1. Написать последовательность значений следующих последовательностей:

а) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n - 1}{2n+3}$, б) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n + 1}{2n+1}$ в) $x_n = 1 - \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

г) $x_n = 1 - \frac{(-1)^n \cdot 2}{2n+1}$, д) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n + 1}{3n+3}$, е) $x_n = 1 - \frac{(-1)^n \cdot 2}{2n+1}$,

ж) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n \cdot 3}{2n+4}$, з) $x_n = 1 - \frac{(-1)^n + 1}{5n+1}$, и) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n + 1}{2n+5}$.

2. Написать последовательность значений следующих последовательностей и показать их ограниченность сверху , снизу и по модулю:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2 + 1}{3n+1}$, б) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n \cdot 2 + 1}{5n+1}$, в) $x_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$,

г) $x_n = 2 - \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$, д) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n \cdot 3}{2n+3}$, е) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{3n+2}$,

ж) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n \cdot 2 + 1}{2n+1}$, з) $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n + 1}{2n+5}$.

3. Написать последовательность значений последовательности и найти, с какого номера N выражение: $|x_n - 2|$ будет меньше 0,01.

а) $x_n = 2 + \dfrac{(-1)^n \cdot 3}{3n+2}$, б) $x_n = 2 - \dfrac{(-1)^n}{3n+3}$.

4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 + n^2 - 7n + 1}{4n^4 + 5n^3 + 1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 - 7n^3 + 1}{7n^4 + 5n^3 + 1}$,в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4 - 7n^3 + n - 1}{6n^4 + 5n^3 + 1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4 - 5n^3 + n^2 - 1}{6n^4 + 3n^3 + 1}$, д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 - 5n^3 + n^2 - 1}{6n^5 + 3n^4 + 1}$,

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 3n^3 - n + 3}{4n^4 + n^2 - n + 1}$, ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^5 - 3n^3 - n + 4}{4n^5 + n^4 - n + 1}$,

з) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 3n^3 - n + 3}{4n^4 + n^2 - n + 1}$,и) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 2n^3 + n}{4n^4 + n^2 - 1}$,

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5 + n^2 - n + 4}{6n^5 + n^4 - n^3 + 1}$, л) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4 + n^3 - n - 2}{n^4 + 4n^3 + n^2 - 1}$.

5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 5^{n+2}}{5 \cdot 4^n + 5^{n+1}}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 3^{n+2}}{5 \cdot 4^n + 3^{n+1}}$

,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot 3^{n+2}}{3 \cdot 2^n + 3^{n+1}}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 2^{n+1} + 5^{n+2}}{3 \cdot 2^n + 5^n}$, д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1} + 5^{n+2}}{4 \cdot 3^{n+1} + 5^n}$,

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1} + 5^{n+2}}{3 \cdot 2^{n+1} + 5^n}$, ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1} + 5^{n+2}}{4 \cdot 3^{n+1} + 5^n}$.

6. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{3n^2-4}}{\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1}}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-4}}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}}$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+4}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+n-1}}$, д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$.

7. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{5n^2+n+4}-\sqrt{5n^2+3n}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n+4}-\sqrt{n^2+n}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3n^2+2n+4}-\sqrt{3n^2+n+3}$, г)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{2n^2+n+3}$,

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2+n+5}$, е)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+4n+5}$,

8. Построить графики следующих функций:

а) $y=2x+3$, б) $y=-x+2$, в) $y=x^2-1$, г) $y=6x-2$,

д) $y=6x+1$, е) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, ж) $y=x^2+2x+1$.

9. Определить четность и нечетность следующих функций:

а) $f(x)=x^3+4x^5$; б) $f(x)=-x+3x^3$; в) $f(x)=3^x+3^{-x}$;

г) $f(x)=x^2-3x^4$; д) $f(x)=5^x+5^{-x}$; е) $f(x)=2a^x+2a^{-x}$;

ж) $f(x)=2x^5+3x^3$; з) $f(x)=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

10. Определить область определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-3x+2}$; б) $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-3}$;

в) $y=\sqrt{16-x^2}$; г) $y=\sqrt{x^2-9}$; д) $y=\sqrt{x-x^2}$;

е) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$; ж) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{(x+4(x-3)}}$;

з) $y=\dfrac{1}{x^2-7x+12}$; и) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

к) $y=\ln(x^2-11x+30)$; л) $y=\ln(x^2-5x+6)$.

11. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+3x+4}{6x^3+x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+2x^2+3}{2x^5+4x^4+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+6x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-9x+14}{x^4-6x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+2x-1}{x^3-2x^2-3x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3-3x^2+4}{3x^4+x^3+x^2+x+1}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$.

12. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x+7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-12x+11}{x^2-8x+7}$; з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^4-8x}$; и) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

к) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$; л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$; м) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$;

н) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-3x+2}$; о) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$; п) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$;

13. Найти пределы, используя первый замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$; и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 20x}{4x}$; л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; м) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

н) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin x}$.

14. Найти пределы, используя второй замечательный предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{5}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

15. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{7x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-1}{6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{3x}-1}{\sin 4x}$
;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 4x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{e^{4x}-1}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\sin 7x}$.

16. Найти производную следующих функций: а) $y=tg(2x-3)$,
б) $y=\ln(2x-3)$, в) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$, г) $y=e^{2x-3}$,

д) $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, е) $y=\sqrt[4]{(7x-3)^3}$,

ж) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, з) $y=tg\dfrac{x}{3}+2x^2$, и) $y=(4x-5)^{10}$,

к) $y=(x^2+1)^4$, л) $y=e^{\frac{x}{2}}$, м) $y=(3x+2)^7$, н) $y=2^{\frac{x}{3}}$,

о) $y=\sqrt[7]{x^5}-\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$, п) $y=3\ln x-\dfrac{2}{x}$, р) $3x^2+\cos(4x-5)$.

17. Найти производную следующих функций: а) $y = tg\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

б) $y = 2\cos(2x+1)$; в) $y = tg\frac{2x+1}{3}$; г) $y = tg\frac{x}{2} - ctg\frac{x}{2}$;

д) $y = \cos\frac{3x-1}{2}$; е) $y = ctg\frac{3x}{2}$; ж) $y = ctg(3x+5)$.;

з) $y = \cos x + \sin x$; и) $y = \cos x - \cos^2 x$.

18. Найти производную следующих функций:

а) $y = xe^x$; б) $y = (x+1)^2(x-1)$; в) $y = 2^x \cdot ctgx$; г) $y = x\ln x$; д) $y = \ln^2 x$; е) $y = x \cdot 10^x$; ж) $y = xtgx$;з) $y = x^3 ctgx$;

и) $y = x^3 ctgx$; к) $y = x^5 \lg x$; л) $y = \left(x^3+3\right)\sin 6x$;

м) $y = \left(x^2+3x\right)tgx$; н) $y = \left(x^3+3x\right)\ln x$; о) $y = (3x^2+2)\sin x$;

п) $y = \left(2+x^2\right)\cos x$, р) $y = \left(x^2+3\sin x\right)e^x$.

19. Найти производную следующих функций:

а) $y = \frac{x}{x^2+1}$; б) $y = \frac{3x^2+1}{x-1}$; в) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$; г) $y = \frac{\sin x}{1-x^2}$;

д) $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$; е) $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$; ж) $y = \frac{e^{3x}}{tgx}$; з) $y = \frac{3^x}{\sin x}$;

и) $y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; к) $y = \frac{2\sin x}{x^2}$; л) $y = \frac{\ln x}{x+1}$; м) $y = \frac{1+x^3}{1-x^3}$;

20. Вычислить производные y', y'', y''' следующих функций:

а) $y = x^2 e^{2x}$; б) $y = x^3 \sin 6x$; в) $y = \left(x^3+3x\right)\ln x$;

г) $y = x^2\cos x$; д) $y = 3e^x \sin x$; е) $y = \frac{x^3}{1-x^3}$;

ж) $y = \left(x+1\right)\ln x$; з) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; и) $y = \frac{3x^2}{x-1}$;

к) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; л) $y=(4x-5)^{10}$; м) $y=\ln(2x-3)$.

21. Вычислить пределы , используя правило Лопиталя :

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2^x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+2x-1}{x^3-2x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+5}-\dfrac{3x^2-7}{3x+1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3}{x+7}-\dfrac{4x^2}{4x+1}\right)$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-4}-\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)$; л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 3x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{tgx-x}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+5x)}$; п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

22. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+2\dfrac{2}{3}$; б) $y=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^4}{4}$; в) $y=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{10}$;

г) $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$; д) $y=x^3-2x^2-7x+4$; е) $y=1+2x-\dfrac{x^4}{4}$;

ж) $y=2x^2-\dfrac{x^3}{3}$; з) $y=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{10}$; и) $y=\dfrac{x^3}{3}+2x^2-5x$.

23. Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба следующих функций:

а) $y=x^3+3x^2$; б) $y=3x^2-x^3$; в) $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2$; г) $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$;

д) $y=x^3-6x^2+9x+5$; е) $y=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{20}$; ж) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

з) $y = 3x^5 - 5x^4 + x - 1$; и) $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 - x$.

24. Доказать, что ряд сходится и найти его сумму:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

25. Исследовать сходимость ряда, используя признаки сравнения.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^6+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+5}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5+3}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+3}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$.

26. С помощью признаков Даламбера и Коши исследовать сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$;ж) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

27. Найти неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования:

а) $\int \frac{dx}{x^3}$; б) $\int (3x^2 - x + 1)dx$; в) $\int (3x+1)^2 dx$;

г) $\int (x+1)^3 dx$; д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

е) $\int\left(3\cos x+4-2\sin x+\frac{1}{x}\right)dx$; ж) $\int\frac{(x-2)dx}{x^3}$;

з) $\int\frac{(10x^8+3)}{x^4}dx$; и) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+e^x-1\right)dx$;

к) $\int\left(2^x+\frac{1}{2^x}-e^x\right)dx$; л) $\int\frac{x-1}{x^3}dx$; м) $\int\frac{(x+2)^3}{x^2}dx$;

н) $\int\frac{(x-1)^2}{x}dx$; о) $\int\left(x^2+x^4\right)dx$.

28. Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$; б) $\int tg^2 x dx$; в) $\int ctg^2 x dx$;

г) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$; д) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$; е) $\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

ж) $\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$; з) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$;

и) $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$; к) $\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx$.

29. Вычислить неопределённые интегралы методом замены переменной:

а) $\int(\cos 6x+\sin 2x)dx.$; б) $\int\left(\cos 3x-\frac{3}{x}\right)dx.$; в) $\int\cos 7x dx$;

г) $\int\sin(2x+1)dx$; д) $\int(3-2x)^4 dx$; е) $\int e^{-3x}dx$; ж) $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$;

з) $\int\cos 3x dx$; и) $\int e^{6x}dx$; к) $\int\frac{dx}{10x+3}$; л) $\int\sqrt[3]{5-6x}dx$;

м) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; н) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; о) $\int \sqrt{4x-1}dx$.

30. Вычислить неопределенные интегралы, используя выделение полного квадрата в квадратном трехчлене:

а) $\int \frac{dx}{x^2-3x+\frac{9}{2}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$;

г) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+6}$; д) $\int \frac{dx}{x^2-16x+65}$; е) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+6}}$; з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$; и) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-7}}$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$; л) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2-6x}}$; м) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$.

31. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$; б) $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx$; в) $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2}dx$; е) $\int_0^3 (x^2+3x+1)dx$;

ж) $\int_0^1 x2^{x^2}dx$; з) $\int_0^1 (e^x+1)dx$; и) $\int_0^1 (e^x+x^2)dx$; к) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})dx$;

л) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$; м) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$; н) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$; о) $\int_1^{16} \sqrt{x}dx$;

п) $\int_0^1 x(2-x^2)dx$; р) $\int_0^{e-1} \frac{dx}{1+x}$; с) $\int_0^1 (10x^9-4x+8)dx$.

32. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^{16} \sqrt[4]{x}dx$; б) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; г) $\int\limits_0^1 \left(x^2-4e^x\right)dx$;

д) $\int\limits_0^1 (x-\sin 4x)dx$; е) $\int\limits_0^2 \left(4x^3+1\right)dx$; ж) $\int\limits_1^2 \left(3x^2-2x+\frac{1}{x}\right)dx$;

з) $\int\limits_0^{\pi} \left(\sin x-\cos\frac{x}{4}\right)dx$; и) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x+5}$; к) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

л) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x+1)dx$; м) $\int\limits_0^1 \left(5x^4-1\right)dx$; н) $\int\limits_0^1 \left(8x^7-4x^3+1\right)dx$;

33. Вычислить предел: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y\sin(x\cdot y)}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-cos(x\cdot y)}{x^2y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x+y}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

34. Исследовать на непрерывность функции:

а) $f(x;y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$;

б) $f(x;y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$;

в) $f(x;y)=\begin{cases} \frac{\sin(xy)}{2x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$;

г) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2y\right)}{x^3+y^3}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$.

35. Найти частные производные 1-го и 2-го порядков следующих функций:

а) $z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$; б) $z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; в) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

г) $z=x^3y-y^3x$; д) $z=\left(8x^3y-xy^3+7\right)^5$; е) $z=\ln\left(x^2+4y^2\right)$;

ж) $z=\sin\left(x^3+2y^2\right)$; з) $z=\sin x\cdot\cos y$; и) $z=\cos\left(7x^3y^2\right)$;

к) $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$.

36. Найти полный дифференциал следующих функций:

а) $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; в) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

37. Найти экстремумы функций:

а) $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$; б) $z=x^3+y^3-3(x+y)^2$;

в) $z=-x^2-y^2+4(x-y)$; г) $z=x^3+y^2-3xy$;

д) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$; е) $z=xy(3-x-y)$;

ж) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\quad(x>0,y>0)$.

Ответы к задачам главы 3

1. а) $1\frac{3}{5},\ 2,\ 1\frac{7}{9},\ 2,\ \ldots$; б) $1,\ 1\frac{2}{5},\ 1,\ 1\frac{2}{9},\ \ldots$;

в) $1\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ 1\frac{1}{7},\ \frac{8}{9},\ \ldots$; г) $1\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ 1\frac{2}{7},\ \frac{7}{9},\ \ldots$;

д) $1;1\frac{2}{9};1;1\frac{1}{6};\ldots$; е) $1\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ 1\frac{2}{7},\ \frac{7}{9},\ \ldots$;

ж) $1\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{8},\ 1\frac{7}{10},\ 2\frac{1}{4},\ \ldots$; з) $1,\ \frac{9}{11},\ 1,\ \frac{19}{21},\ \ldots$;

и) $1,\ 1\frac{2}{9},\ 1,\ 1\frac{2}{13},\ \ldots$

2. а) $-\frac{1}{4},\ \frac{3}{7},\ -\frac{1}{10},\ \frac{3}{13},\ \ldots\ -\frac{1}{4} \le x_n \le \frac{3}{7},\ |x_n| \le \frac{3}{7}$;

б) $\frac{5}{6},\ 1\frac{3}{11},\ \frac{15}{16},\ 1\frac{3}{21},\ \ldots\ \frac{5}{6} \le x_n \le 1\frac{3}{11},\ |x_n| \le 1\frac{3}{11}$;

в) $1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{5},\ 1\frac{6}{7},\ 2\frac{1}{9},\ \ldots 1\frac{2}{3} \le x_n \le 2\frac{1}{5},\ |x_n| \le 2\frac{1}{5}$;

г) $2\frac{1}{5},\ 1\frac{7}{8},\ 2\frac{1}{11},\ 1\frac{13}{14},\ \ldots 1\frac{7}{8} \le x_n \le 2\frac{1}{5},\ |x_n| \le 2\frac{1}{5}$;

д) $\frac{2}{5},\ 1\frac{3}{7},\ \frac{1}{3},\ 1\frac{3}{11},\ \frac{2}{5} \le x_n \le 1\frac{3}{7},\ |x_n| \le 1\frac{3}{7}$;

е) $\frac{1}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{11},\ \frac{3}{14},\ \frac{1}{5} \le x_n \le \frac{3}{8},\ |x_n| \le \frac{3}{8}$;

ж) $\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{5},\ \frac{6}{7},\ 1\frac{1}{2},\ \frac{2}{3} \le x_n \le 1\frac{3}{5},\ |x_n| \le 1\frac{3}{5}$;

з) $1,\ 1\frac{2}{9},\ 1,\ 1\frac{2}{13},\ \ldots, 1 \le x_n \le 1\frac{2}{9},\ |x_n| \le 1\frac{2}{9}$;

3. а) $N = 100$; б) $N = 33$; **4.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{3}$;

е) $\frac{1}{4}$; ж) $\frac{5}{4}$; з) $\frac{1}{4}$; и) $\frac{1}{4}$; к) $\frac{1}{2}$; л) 2 . **5.** а) 20 ; б) 2,4 ; в) 12 ; г) 25 ;

д) 25; е) 25 ; ж) 25. **6.** а) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0 ; д) $+\infty$;.

7. а) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; г) 0 ; д) 0 ; е) $-\infty$.

9. а) нечетная ; б) нечетная ; в) четная ; г) четная; д) четная; е) четная ; ж) нечетная; з) нечетная. **10.** а) $[2;+\infty)$; б) $\varnothing$;

в) $[-4;4]$; г) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; д) $[0;1]$; е) $(-\infty;+\infty)$;

ж) $(-4;3)\cup[2;+\infty)$; з) $(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$;

и) $(-\infty;+\infty)$; к) $(-\infty;5)\cup(6;+\infty)$; л) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

11. а) $\frac{1}{3}$; б) 4; в) $\frac{1}{3}$; г) 2 ; д) 3; е) $\frac{1}{3}$; ж) 2 .**12.** а) $-\frac{1}{2}$;
б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{2}$; е) 0; ж) $1\frac{2}{3}$; з) $\frac{1}{8}$; и) 0; к) $3\frac{2}{5}$;
л) $\frac{1}{2}$; м) -3; н) 0; о) -7 ; п) 7 . **13.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{6}{5}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 2 ;
д) -8; е) $\frac{b^2-a^2}{2}$; ж) $(a-b)$; з) $\frac{1}{2}$; и) 2; к) 5; л) 4; м) $\cos a$;
н) $-\sin a$; о) 5; п)3 . **14.** а) e^5 ; б) e^2 ;в) $\sqrt{e}$; г) $e^{\frac{2}{3}}$;д) e^2; е) $\frac{1}{\sqrt{e}}$;
ж) $\sqrt{e}$. **15.** а)3; б) $\frac{\ln 2}{7}$; в) $\frac{5}{6}\ln 4$; г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{3}{2}$; е) 2; ж) $\frac{3}{4}\ln 5$;

з) $\frac{5}{4}$;и) 1; к) $\frac{6}{7}$.**16.** а) $\frac{2}{\cos^2(2x-3)}$; б) $\frac{2}{2x-3}$;в)
$1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$; г) $2e^{2x-3}$; д) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; е) $\frac{3}{4\sqrt[4]{7x-3}}$; ж)
$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$;
з) $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}$; и) $40(4x-5)^9$; к) $8x\left(x^2+1\right)^3$; л) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$;м)
$21(3x+2)^6$; н) $\frac{1}{3}2^{\frac{x}{3}}\ln 2$; о) $\frac{5}{7\sqrt[3]{x^2}}+\frac{5}{x^3\sqrt{x}}$;п) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$; р)
$6x-4\sin(4x-5)$.

17. а) $\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right)}$; б) $-4\sin(2x+1)$; в) $\frac{2}{3\cos^2\left(\frac{2x+1}{3}\right)}$;

г) $\dfrac{2}{\sin^2 x}$; д) $-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{3x-1}{2}$; е) $-\dfrac{3}{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}$;

ж) $-\dfrac{3}{\sin^2(3x+5)}$; з) $-\sin x+\cos x$; и) $\sin 2x-\sin x$.

18. а) e^x+xe^x; б) $(x+1)(3x-1)$; в) $2^x\ln 2ctgx-\dfrac{2^x}{\sin^2 x}$;

г) $\ln x+1$; д) $\dfrac{2\ln x}{x}$; е) $10^x(x\ln 10+1)$; ж) $tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}$;

з) $3x^2ctgx-\dfrac{x^3}{\sin^2 x}$; и) $3x^2ctgx-\dfrac{x^3}{\sin^2 x}$; к) $x^4\lg ex^5$;

л) $3x\sin bx+6(x^3+3)\cos 6x$; м) $2xtgx+\dfrac{x^2+3x}{\cos^2 x}$;

н) $3(x^2+1)\ln x+(x^2+3)$; о) $6x\sin x+(3x^2+2)\cos x$;

п) $2x\cos x-(x^2+2)\sin x$; р) $e^x(x^2+2x)+3e^x(\sin x+\cos x)$.

19. а) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; б) $\dfrac{3x^2-6x-1}{(x-1)^2}$; в) $\dfrac{1-x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$;

г) $\dfrac{(1-x^2)\cos x+2x\sin x}{(1-x^2)^2}$; д) $\dfrac{1-3\ln x}{x^4\ln 10}$; е) $\dfrac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}$;

ж) $\dfrac{e^x(3\sin 2x-2)}{2\sin^2 x}$; з) $\dfrac{3^x(\ln 3\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$;

и) $\dfrac{3\cos 3x\sin 2x-2\sin 3x\cos 2x}{\sin^2 2x}$; к) $\dfrac{2(x\cos x-2\sin x)}{x^3}$;

л) $\dfrac{x+1-x\ln x}{(x+1)^2}$; м) $\dfrac{6x^2}{(1-x^3)^2}$. **20.** а) $y'=2e^{2x}x(x+1)$,

$y''=2e^{2x}(2x^2+4x+1)$, $y'''=4e^{2x}(2x^2+6x+3)$;

б) $y'=3x^2\sin 6x+6x^3\cos 6x$,

$y'' = 6x\sin 6x\left(1-6x^2\right)+36x^2\cos 6x$,

$y''' = \sin 6x\left(6-72x-246x^2\right)+72x\cos 6x$;

в) $y' = 3\left(x^2+1\right)\ln x + x^2 + 3$, $y'' = 6x\ln x + 5x + \dfrac{3}{x}$,

$y''' = 6\ln x + 11 - \dfrac{3}{x^2}$; г) $y' = 2x\cos x - x^2\sin x$,

$y'' = \left(2-x^2\right)\cos x - 4x\sin x$, $y''' = \left(x^2-6\right)\sin x - 6x\cos x$;

д) $y' = 3e^x\left(\cos x + \sin x\right)$, $y'' = 6e^x\cos x$, $y''' = 6e^x\left(\cos x - \sin x\right)$;

е) $y' = \dfrac{3x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, $y'' = \dfrac{6x\left(1+2x^3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$, $y''' = \dfrac{6\left(10x^6+16x^3+1\right)}{\left(1-x^2\right)^4}$;

ж) $y' = \ln x + 1 + \dfrac{1}{x}$, $y'' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $y''' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$;

з) $y' = \dfrac{2\left(x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$, $y'' = \dfrac{4x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$, $y''' = \dfrac{12\left(x^4+6x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^4}$;

и) $y' = \dfrac{3x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)^2}$, $y'' = \dfrac{6}{\left(x-1\right)^3}$, $y''' = -\dfrac{18}{\left(x-1\right)^4}$;

к) $y' = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y'' = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $y''' = -\dfrac{6\left(x^4-6x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$;

л) $y' = 40\left(4x-5\right)^9$, $y'' = 1140\left(4x-5\right)^8$,

$y''' = 32\cdot 1140\left(4x-5\right)^7$, м) $y' = \dfrac{2}{2x-3}$, $y'' = \dfrac{4}{\left(2x-3\right)^2}$,

$y''' = \dfrac{8}{\left(2x-3\right)^3}$. **21**. а) 2 ; б) $\dfrac{9}{2\left(\ln 2\right)^2}$; в) 2; г) 18; д) $-\dfrac{14}{3}$; е) 2;

ж) $\dfrac{1}{3}$; з) $-6\dfrac{3}{4}$; и) $\dfrac{3}{4}$; к) 3; л) $\dfrac{4}{3}$; м) $\dfrac{1}{2}$; н) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; о) $\dfrac{2}{5}$; п) 4;

22. а) $y\uparrow(-\infty;-2]$ и $[3;+\infty)$, $y\downarrow[-2;3]$, $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=3$; $y_{\max}=10$; $y_{\min}=-6\frac{1}{3}$; б) $y\uparrow(-\infty;0]$ и $[4;+\infty)$, $y\downarrow[0;4]$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=4$; $y_{\max}=0$; $y_{\min}=-12\frac{4}{5}$; в) $y\downarrow(-\infty;-2]$ и; $[2;+\infty)$, $y\uparrow[-2;2]$, $x_{\max}=2$, $x_{\min}=-2$; $y_{\max}=2\frac{2}{15}$; $y_{\min}=-2\frac{2}{15}$; г) $y\uparrow(-\infty,-1]$ и $[3,+\infty)$; $y\downarrow[-1,3]$; $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=3$, $y_{\max}=1\frac{2}{3}$, $y_{\min}=-9$; д) $y\uparrow(-\infty;-1]$ и $\left[\frac{7}{3};+\infty\right)$, $y\downarrow\left[-1;\frac{7}{3}\right]$, $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=\frac{7}{3}$; $y_{\max}=8$; $y_{\min}=-10\frac{14}{27}$;
е) $y\uparrow(-\infty,-2]$ и $[0,2]$; $y\downarrow[-2,0]$ и $[2,+\infty)$; $x_{\max}=\pm2$; $x_{\min}=0$; $y_{\max}=5$; $y_{\min}=1$; ж) $y\uparrow[0;4]$, $y\downarrow(-\infty;0]$ и $[4;+\infty)$, $x_{\max}=4$, $x_{\min}=0$, $y_{\min}=0$, $y_{\max}=10\frac{2}{3}$; з) $y\uparrow[-1,1]$; $y\downarrow(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$; $x_{\max}=1$; $x_{\min}=-1$; $y_{\max}=\frac{1}{15}$;
$y_{\min}=-\frac{1}{15}$; и) $y\uparrow(-\infty;-5]$ и $[1;+\infty)$, $y\downarrow[-5;1]$, $x_{\max}=-5$ $x_{\min}=1$, $y_{\max}=33\frac{1}{3}$, $y_{\min}=-2\frac{2}{3}$. **23.** а) $(-\infty;-1)$ вверх, $(-1;+\infty)$ вниз, точка перегиба $(-1;2)$; б) $(-\infty;1)$ вниз, $(1;+\infty)$ вверх, точка перегиба $(1;2)$; в) $(-\infty;2)$ вверх, $(2;+\infty)$ вниз, точка перегиба $\left(2;-\frac{8}{3}\right)$; г) $(-\infty;-2)$ и $(0;+\infty)$ вниз, $(-2;0)$

вверх, точки перегиба $(0;0)$, $\left(-2;-\frac{16}{3}\right)$; д) $(-\infty;2)$ вверх, $(2;+\infty)$ вниз, точки перегиба $(0;1)$, $(0;-1)$, $(2;7)$; е) $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ вниз, $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$ вверх, точки перегиба $\left(-1;-\frac{7}{60}\right)$, $(0;0)$, $\left(1;\frac{7}{60}\right)$; ж) $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ вверх, $(-1;1)$ вниз, точки перегиба $(-1;-1)$, $(1;1)$; з) $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$ вверх, точка перегиба $(-1;1)$; и) $(-\infty;-2)$ и $(1;+\infty)$ вверх, $(-2;1)$ вниз, точки перегиба $(1;8)$, $(-2;50)$. **24**. а) $S=\frac{1}{2}$; б) $S=\frac{1}{4}$; в) $S=\frac{1}{9}$;

г) $S=1$; д) $S=\frac{1}{2}$. **25.** а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится; е) расходится; ж) сходится; з) расходится; е) сходится. **26**. а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) расходится; е) расходится; ж) сходится; з) расходится; и) сходится. **27.** а) $-\frac{1}{2x^2}$;

б) $x^3-\frac{x^2}{2}+x$; в) $3x^3+3x^2+x$; г) $\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x$;

д) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}$; е) $3\cos x+4x+2\cos x+\ln|x|$; ж) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$;

з) $2x^5+\frac{1}{x^3}$; и) $tgx+e^x-x$; к) $\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2^x\ln 2}-e^x$; л) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$;

м) $\frac{x^2}{2}+12\ln|x|+6x-\frac{1}{x}$; н) $\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|$; о) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$.

28. а) $x-\cos x$; б) $tgx-x$; в) $-ctgx-x$; г) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$;

д) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}$; е) $x+\cos x$; ж) $\sin x$; з) $tgx-x$; и) $-ctgx-x$;

к) $-\frac{1}{2}\cos x$. **29.** а) $\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $\frac{1}{3}\sin 3x-3\ln|x|$;

в) $\frac{1}{7}\sin 7x$; г) $-\frac{1}{2}\cos(1+2x)$; д) $\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x$; е) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$;

ж) $\frac{1}{5}tg5x$; з) $\frac{1}{3}\sin 3x$; и) $\frac{1}{6}e^{6x}$; к) $\frac{1}{10}\ln|10x+3|$; л) $\frac{1}{4\sqrt[3]{(5-6x)^2}}$;

м) $-\sqrt{3-2x}$; н) $\sqrt{2x+3}$; о) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-1)^3}$. **30.** а) $\frac{2}{3}arctg\,\frac{2x-3}{3}$;

б) $arctg(x+2)$; в) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right|$; г) $\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}$;

д) $arctg(x-8)$; е) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|$; ж) $\ln\left|x+\frac{7}{2}+\sqrt{x^2+7x+6}\right|$;

з) $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|$; и) $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-7}\right|$;

к) $\arcsin\frac{x+2}{3}$; л) $\arcsin\frac{x+3}{4}$; м) $\arcsin\frac{x-1}{2}$.

(С 27 по 30 номера в ответах надо прибавлять постоянную С)

31. а) $45\frac{1}{6}$; б) $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{1}{12}$; в) $2\sqrt{2}-1$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;

е) $25\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{2\ln 2}$; з) e; и) $e-\frac{2}{3}$; к) $\frac{e^2-1}{e}$; л) $11\frac{1}{4}$; м) $\frac{1}{2}$;

н) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; о) 42; п) $\frac{3}{4}$; р) 1; с) 7. **32.** а) $24\frac{4}{5}$; б) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2}-1$; г) $4\frac{1}{3}-4e$; д) $\frac{\cos^2 2}{2}$; е) 18; ж) $4+\ln 2$; з) 2;

и) $\frac{1}{4}\ln\frac{7}{5}$; к) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; л) $\frac{\pi+2}{3}$; м) 0; н) 1 .

36. а) $dz=\left(y^3-6xy^2\right)dx+\left(3xy^2-6x^2y+8y^3\right)dy$;

б) $dz=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$;

в) $dz=\left(\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)dx+\left(\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)dy$

37. а) $z_{\max}=0$; $z_{\min}=-\frac{9}{8}$; б) $z_{\max}=4$, $z_{\min}=0$;

в) $z_{\max}=-8$; г) $z_{\min}=-\frac{27}{16}$; д) $z_{\min}=0$; е) $z_{\max}=1$.

Глава 4.
Элементы теории вероятностей

4.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

4.1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей занимается изучением случайных явлений, но не любых, а только тех, которые обладают определенными свойствами и которые могут быть осуществлены неограниченное число раз в неизменных условиях.. Например, игральная кость может быть подброшена сколько захотим.

Уместно подчеркнуть, что со случайными явлениями люди встречаются постоянно. Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Часто сталкиваясь с явлениями, которые носят случайный характер, нельзя сказать, как оно будет проистекать. Но если его наблюдать многократно, то можно его протекание описать с помощью чисел.

Например, если подбросить монету один раз, нельзя предсказать, что выпадет герб (орел) или цифра (решка), при посадке саженца нельзя утверждать, что дерево приживется.

Но если наблюдать многократно, то можно заметить закономерность: при подбрасывании монеты отношение числа выпадений орла к общему числу подбрасываний мало отличается от 0,5, и чем больше число подбрасываний, тем ближе это отношение к $0,5$.

При посадке саженцев отношение прижившихся деревьев к общему числу посаженных деревьев с возрастанием их числа будет мало отличаться от некоторого постоянного числа.

Под вероятностью в широком смысле понимают число которое выражает степень уверенности наступления того или иного случайного события. Т. е. мы можем сказать, при определенных условиях, событие A произойдет m раз.

К вероятности события мы вернемся в дальнейшем изложении, где рассмотрим и определим виды случайных событий.

4.1.2 Элементы комбинаторики

При решении задач в теории вероятностей рассматриваются различные соединения из множества n элементов по m элементов $(m \le n)$.

Мы будем рассматривать такие соединения, в которых каждый элемент данного множества может входить не более одного раза, т. е. соединения без повторений.

Введем понятие **факториала.** Произведение натуральных чисел от 1 до n, коротко записывается

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = n!$$

и читается: n факториал. Считается, что $0! = 1$, как и $1! = 1$.

Пример 1. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Рассмотрим три вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Определение 1. Размещениями из n элементов по m элементов в каждом называются такие упорядоченные подмножества из m элементов, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядком расположения.

Число размещений из n по m в каждом обозначается символом A_m^n и вычисляется по следующей формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)). \qquad (1)$$

Пример 2. Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр: 2, 4, 5, 7 без повторений цифр?

Решение. Имеем $n=4$, $m=3$ тогда количество трехзначных чисел равно: $A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$

Ответ.24.

Пример 3. Сколько трехцветных флагов можно сшить из 7 цветов тканей ?

Решение. Имеем множество тканей

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\},$$

тогда колличество флагов: $A_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$.

Ответ. 210.

Формулу (1) можно представить в другой форме, используя определение факториала, а именно:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))(n-m)\cdots 2\cdot 1}{(n-m)(n-(m+1))\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Таким образом, формулу (1) можно записать так:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (2)$$

где $0 \le m \le n$. Отметим, что $A_n^1 = n$ и $A_n^0 = n$.

Пример 4. Правление коммерческого предприятия выбирает из 8 кандидатов 3 человека на различные должности. Сколько всевозможных вариантов по 3 человека из 8 кандидатов нужно рассмотреть?

Решение. Так как требуется рассчитать количество комбинаций из 8 элементов по 3, а группы по 3 человека могут отличаться и составом и должностями, т. е. порядком.

Поэтому необходимо рассчитать число размещений из 8 по 3:

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

Ответ. 336 групп по 3 человека из 8.

Определение 2. Перестановками из n элементов называются такие упорядоченные множества из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Перестановки – это частный случай размещений. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n, это то же самое, что число размещений из n элементов по n в каждом, следовательно,

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Пример 5. Менеджер фирмы ежедневно просматривает 10 изданий экономического содержания. Сколько вариантов просмотра у него есть?

Решение. Варианты просмотра отличаются порядком, а значит, состав изданий не изменится. Таким образом, необходимо вычислить число перестановок. Следовательно,

$$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Ответ. Издания можно просмотреть 3628800 способами.

Определение 3. Сочетаниями, содержащими m элементов , выбранных из n элементов заданного множества, называются всевозможные множества из m элементов, различающиеся друг от друга, хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом обозначается символом C_n^m. Прежде, чем записать формулу для C_n^m, решим одну задачу.

Пример 6. Сколько множеств по три элемента можно составить из множества $A=\{3,5,7,8\}$?

Решение. Из множества A можно составить четыре множества по три элемента, а именно: $A_1=\{3,5,7\}$, $A_2=\{3,5,8\}$, $A_3=\{3,7,8\}$, $A_4=\{5,7,8\}$. Это и будет сочетанием из четырех по три т. е. C_4^3. Но из каждого из множеств можно составить $P_3=3!=2\cdot3=6$ перестановок. Тогда всего трехзначных чисел получится $6\cdot4=24$. По определнию, это − размещения A_4^3.

Итак, $A_4^3=P_4\cdot C_4^3$. Отсюда получаем:

$$C_4^3=\frac{A_4^3}{P_4}=\frac{4!}{1!\cdot3!}.$$

Обобщая, мы можем записать:

$$C_n^m=\frac{A_m^m}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!},\ 0\le m\le n. \qquad (3)$$

Пример 7. Правление коммерческого предприятия выбирает из 8 кандидатов 3 человека на одинаковые должности. Сколько всевозможных вариантов надо рассмотреть, т. е. сколько всевозможных групп по 3 человека можно составить из 8 кандидатов?

Решение. Здесь состав различных групп должен отличаться, по крайней мере, хотя бы одним кандидатом, и порядок выбора кандидатов не имеет значения, поэтому этот вид соединений − сочетания. Подставим в (3) $m=3$, $n=8$, получаем

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56.$$

Ответ. Можно составить 56 групп из 8 человек по 3.

4.1.3 Испытание. События и их классификация

Испытание (опыт) – это процесс, включающий определенные условия и приводящий к одному из нескольких возможных исходов. В исходе испытания можно получить результат наблюдения или измерения.

Например, исходом испытания подбрасывания монеты может быть только цифра или герб. Результатом футбольного матча может быть победа, проигрыш или ничья.

В теории вероятностей под ***событием*** понимается качественный результат испытания или испытаний, если они повторяются многократно.

Случайным событием называется то событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.

Попробуем ввести понятие ***элементарного события***. Можно сказать, что возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания можно считать элементарными событиями. Каждое событие, которое может наступить в испытании, будет элементарным исходом.

Единичный, отдельный исход испытания назовем ***элементарным событием***. Например, при одном бросании игрального кубика возможны следующие события: выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти или шести очков. Эти шесть событий будут элементарными.

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$.

События принято классифицировать. Случайное событие может состоять из нескольких элементарных событий, которые делятся на ***достоверные, невозможные, совместные, несовместные, единственно возможные, равновозможные, противоположные***.

Событие, которое обязательно должно произойти в результате испытания, называется **достоверным**. Отметим, что достоверное событие будет происходить всякий раз при повторном испытании.

Например, если в урне находятся только белые шары, то извлечение из нее белого шара – событие достоверное, т.е. результат этого опыта заведомо известен.

Событие, которое не может произойти в результате данного испытания, называется ***невозможным***. Обозначим его через $\varnothing$.

Например, извлечение черного шара из урны с белыми шарами – невозможное событие.

Вообще говоря, достоверные и невозможные события не являются случайными.

Несколько событий называются ***совместными,*** если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появление другого.

Например , при подбрасывании нескольких монет выпадение цифры на одной монете не исключает появление цифры на других монетах.

Несколько событий называются ***несовместными*** в данном опыте, если появление одного из них исключает появление другого.

Например, при игре в шахматы выигрыш, ничья и проигрыш – несовместные события.

События называются ***единственно возможными,*** если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Несколько событий называются ***равновозможными,*** если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

При бросании игральной кости появление каждой из ее граней – события равновозможные.

Два единственно возможных и несовместных события называются ***противоположными.*** Например, купля и продажа определенного вида товара – противоположные события.

Совокупность всех единственно возможных и несовместных событий называется ***полной группой событий.*** Другими словами, они попарно несовместны и в результате непременно происходит одно из них. Полную группу событий можно определить так: если $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для любой пары $(i \neq j)$, тогда $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ – полная группа событий. Противоположные события составляют полную группу.

4.1.4 Относительная частота событий и ее свойства

Пусть производится N испытаний, в каждом из которых может появиться, а может не появиться событие A. При завершении испытаний, оказалось, что событие A наступило M раз.

Определение. Относительной частотой (частостью) события называется число

$$P^*(A) = \frac{M}{N},$$

где M – число появлений события A, а N – общее число проведенных испытаний.

Пример 1. Стрелок сделал 50 выстрелов по мишени, из них 40 раз попал в мишень. Если событие $A = \{\textit{попадание при одном выстреле}\}$, тогда

$$P^*(A) = \frac{40}{50} = 0,8.$$

Частость события изменяется на множестве $[0,1]$, т. е.

$$0 \le P^*(A) \le 1.$$

Частость достоверного события равна 1, а частость невозможного события равна нулю.

Действительно, для любого события из определения частости известно, что $0 \le M \le N$, значит $0 \le \frac{M}{N} \le 1$, т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Очевидно, что для достоверного события $M = N$, потому $P^*(A) = 1$.

В силу того, что невозможное событие не может произойти и потому $M = 0$ и, следовательно, $P^*(A) = \frac{0}{N} = 0$.

Относительная частота зависит от случайных обстоятельств, сопутствующих испытанию.

Назовем многократное повторение испытаний серией испытаний. При переходе от одной серии испытаний к другой, часто относительная частота бывает устойчива, т. е. колеблется около одного постоянного числа. Это число и называется ***вероятностью.***

4.1.5 Вероятность события и ее свойства

Дадим классическое определение вероятности события. Каждое событие обладает той или иной мерой возможности при испытании: ставить в соответствие некоторое положительное число, поэтому логично приписывать большее число более возможному событию.

Число, выражающее меру возможности события, называется ***вероятностью*** этого события.

Пример 1. В ящике 25 шаров, из них 10 белых, 7 голубых, 4 желтых, 4 синих. Шары перемешивают и наудачу вытаскивают 1 шар. Возможны следующие события:

$A = \{взятый\ шар\ белый\}$; $B = \{взятый\ шар\ голубой\}$;

$C = \{взятый\ шар\ желтый\}$; $D = \{взятый\ шар\ синий\}$.

Достать из ящика белый шар можно скорее чем голубой, а голубой скорее чем желтый или синий. Числа $\frac{10}{25}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{4}{25}$; $\frac{4}{25}$ определяют меру возможности появления соответственных событий и называются их вероятностями.

Пусть в результате испытания может наступить ***конечное число*** n ***элементарных событий***. Среди этих n событий имеется m таких, осуществление которых ведет к появлению события A. Эти m событий называют ***благоприятными*** для A.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа m равновозможных элементарных событий, благоприятных для A, к числу n всех возможных элементарных событий.

Вероятность события A ***обозначают*** $P(A)$ и таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2. Брошена игральная кость. Найти вероятность события $A = \{вышло\ четное\ число\ очков\}$.

Решение. Элементарными событиями благоприятными для A, являются события: $A_1 = \{вышло\ 2\ очка\}$; $A_2 = \{вышло\ 4\ очка\}$; $A_3 = \{вышло\ 6\ очков\}$. Всего таких событий 3. Имеется 6 элементарных событий, т. е. $n = 6$; $m = 3$, следовательно, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Найти вероятность события

$A=\{\textit{выигрыш при игре в лото по одному билету}\}$, если

для этого необходимо указать 5 из 36-ти чисел.

Решение. Так как один билет, это значит одно благоприятное для A элементарное событие

$B=\{\textit{все 5 чисел угаданы правильно}\}$, т.е. $m=1$.

Число n всех элементарных событий равно числу всевозможных групп из 5-ти чисел, отличающихся хотя бы одним числом, значит: $n=C_{36}^5$, то $P(A)=\dfrac{1}{C_{36}^5}=\dfrac{1}{376922}$.

Свойства вероятности события

1^0. Так как $0\le m\le n$, то $0\le P(A)\le 1$ для любого события A.

2^0. Если событие A невозможное, то

$$P(A)=0.$$

3^0. Если событие A достоверное, то

$$P(A)=1.$$

4^0. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Пусть событие B противоположное событию A, то

$$P(A)+P(B)=1$$

Пример 4. В ящике 20 шаров, из них 12 белых, а остальные голубые. Извлекают 2 шара. Найти вероятности событий:

$A=\{\textit{оба шара белые}\}$; $B=\{\textit{оба шара голубые}\}$;

$C=\{\textit{один шар белый, другой голубой}\}$. Проверить, составляют ли эти события полную группу. Т. е.верно ли равество?

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

Решение. Число благоприятных событию A равно

$$m_A = C_{12}^2 = \frac{12!}{10!2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

Число благоприятных событию B равно

$$m_B = C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Всего испытаний будет: $C_{20}^2 = \dfrac{20!}{18!2!} = \dfrac{19 \cdot 20}{2} = 190.$

Тогда : $P(A) = \dfrac{66}{190} = \dfrac{33}{95}$; $P(B) = \dfrac{28}{190} = \dfrac{14}{95}$.

Вычислим число благоприятных событию C, т. е.

$$m_C = C_{12}^1 \cdot C_8^1 = 12 \cdot 8 = 96.$$

Тогда $P(C) = \dfrac{96}{190} = \dfrac{48}{95}$.

Теперь проверим: A, B, C составляют полную группу или нет.

Так как $P(A) + P(B) + P(C) = \dfrac{33}{95} + \dfrac{14}{95} + \dfrac{48}{95} = 1,$

то эти события составляют полную группу.

Пример 5. Бросают два игральных кубика, один из которых красный, а другой – белый. Найти вероятности следующих событий:

Бел.\красн.	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$A=\{Одинаковые\ очки\}$; $B=\{Хотя\ бы\ у\ одного\ 4\ очка\}$;

$C=\{Сумма\ очков\ равна\ 7\}$; $D=\{Сумма\ очков\ равна\ 1\}$;

Решение: $n=36$**,** $m_A=6$**,** $P(A)=\dfrac{1}{6}$**;** $m_B=11,$

$P(B)=\dfrac{11}{36};\ m_C=6,\ P(C)=\dfrac{1}{6};\ m_D=0,\ P(D)=0.$

Отметим, что относительную вероятность события возможно вычислить после испытания, а вероятность до него.

4.1.6. Теоремы сложения и умножения

Определение 1. Суммой или обьединением двух событий A и B называется событие $C,$ состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Этот факт записывают так: $C=A\bigcup B$.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность наступления одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е.

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Пусть $n-$ число всех возможных элементарных событий, при которых может наступить событие A или $B.$ Пусть m_A- число равновозможных элементарных событий, благоприятных для $A,$ m_B- такое же число для события $B.$ Имеем

$$P(A)=\frac{m_A}{n},\ P(B)=\frac{m_B}{n}.$$

Очевидно, что m_A+m_B- число элементарных событий, благоприятных для появления события A или B, так что

$$P(A\bigcup B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B) \quad (1)$$

Следствие 1. Если события A, B, C образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

Доказательство. Действительно, в результате испытания обязательно произойдет одно из них (или A, или B, или C) Поэтому событие $A \bigcup B \bigcup C$ достоверное и

$$P\left(A \bigcup B \bigcup C\right) = 1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) = 1$.

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

Доказательство. Противополжные события являются частным случаем событий, образующих полную группу, поэтому

$$P\left(\overline{A}\right) + P\left(A\right) = 1, \;\; P\left(A\right) = \; 1 - P\left(\overline{A}\right).$$

Пример 1. Если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $0,8$, то вероятность промаха равна $1 - 0,8 = 0,2$.

Пример 2. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и извлекают один шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение. Имеем 20 шаров из них 16 цветных. Пусть $A = \left\{ \textit{извлечение цветного шара} \right\}$. Тогда $P\left(A\right) = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

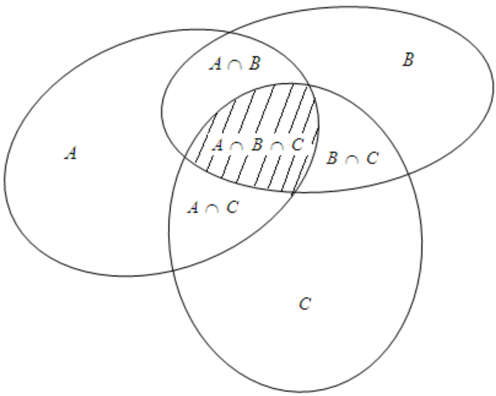
Определение 2. Произведением или пересечением событий A и B называется событие C, состоящее в совместном наступлении этих событий, т.е. в наступлении и события A, и события B.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения $A \cap B$ двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Произведение нескольких событий определяется аналогично.

В случае ***нескольких совместных событий*** необходимо по аналогии с рассуждениями о пересечении двух совместных событий исключить повторный учет областей пересечения событий. Рассмотрим три совместных события.



Для случая трех совместных событий можно записать:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Очевидно, что в случае двух совместных событий A и B будем иметь:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Пример 4. Опыт состоит в извлечении карты из колоды в 52 карты. Чему равна вероятность того, это будет туз или карта масти трефа?

Решение. Пусть $A=\{\text{извлечение туза}\}$, а $B=\{\text{извлечение трефовой карты}\}$. Так как в колоде 4 туза, то $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Очевидно, что $P(B)=\frac{13}{52}$. Вероятность их пересечения $C=A\cap B-$ вероятность события $C=A\cap B=\{\text{извлечение трефового туза}\}$, которое находим так: $P(C)=P(A\cap B)=\frac{1}{52}$.

События A и B совместные , поскольку в колоде есть трефовый туз. Нас интересует вероятность суммы совместных событий A и $B.$ По теореме о сумме вероятностей совместных событий имеем:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$\frac{1}{13}+\frac{13}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}\ \textbf{Ответ.}\ \frac{4}{13}.$$

Задачи к главе 4

Комбинаторика.

1.Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений?

2. Сколько трехцветных флагов можно сшить из 6 цветов тканей?

3.Сколько четырехзначных чисел можно составить из множества цифр: 1, 2, 3, 4, 5, если цифры не повторяются?

4.Сколько партий будет сыграно на шахматном турнире, если колличество участников 14 и каждый должен сыграть со всеми два раза, один раз черными, другой белыми фигурами ?

5.Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6 в которых нет повторяющихся цифр?

6.Сколько k-значных чисел можно записать с помощью цифр: 3, 5, 8, 0, в которых нет повторяющихся цифр, если а) $k=2$; б) $k=3$; в) $k=4$.

7.Сколько четырехзначных чисел можно записать из всех нечетных цифр, в которых нет повторяющихся цифр?

8.В шахматном кружке занимаются 10 человек. Сколько команд по 3 человека можно составить, если один из шахматистов должен играть на первой другой на второй, третий на третьей доске?

9.Найти колличество четырехзначных чисел, в которых содержаться цифры 1, 2, 3, 4 без повторяющихся цифр?

10.Сколь ко пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 в которых нетповторяющихся цифр?

11.Сколько четырехзначных чисел, где цифры не повторяются, можно записать из следующих цифр: а) 2, 4, 6, 8; б) 1, 3, 5, 7; в) 0, 1, 2, 5; г) 0, 3, 4, 7.

12. В детском саду группа состоит из 8 девочек и 7 Мальчиков, для которых Дед Мороз принес 8 разных кукол (для девочек) и 7 разных мячей (для мальчиков). Сколькими способами может раздать Дед Мороз подарки?

13.Сколько существует способов составления списка из 7-ми кандидатов в случайном порядке для выбора на руководящую должность?

14. В цветочной вазе стоят 10 роз и 8 гвоздик. Сколькими способами можно составить букет из:

а) 2-х роз и 3-х гвоздик; б) 3-х роз и 2-х гвоздик;

в) 1-ой розы и 4-х гвоздик; г) 5-и роз и 2-х гвоздик.

15. Сколько шахматных партий сыграют 14 шахматистов в круговом первенстве (в круговом первенстве шахматисты друг с другом встречаются один раз)?

16. В классе 14 учеников, из них 8 девочек и 6 мальчиков. Сколькими способами можно составить группы состоящие из 4 девочек и 3 мальчиков?

17. Менеджер рассматривает кандидатуры 8-и человек, подавших заявления о приеме на работу. Сколько существует способов приглашения кандидатов на собеседование в случайном порядке?

18. В ящике 20 шаров, среди которых 12 белых, остальные – синие. Отбирается наугад 2 шара. Сколькими способами можно отобрать:

а) два белых шара; б) два синих;

в) один белый, другой синий.

19. Из 20 учеников в классе должны выбрать 8. Сколькими способами это можно сделать?

20. Для разгрузки поступивших товаров менеджеру требуется выделить 6 из 20-ти рабочих. Сколькими способами можно это сделать, осуществляя отбор в случйном порядке?

21. Футбольная команда имеет 2-х вратарей, 6 защитников, 4 полузащитников и 5 нападающих. Сколькими способами возможно выбрать состав игроков очередной игры, если команда должна состоять из 1 вратаря, 4 защитников, 3 полузащитников и 3 нападаюших?

22. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, состоящих на учете в службе занятости. Сколько возможно комбинаций выбора 9 из 15 безработных?

23. Руководство фирмы может обратиться в 6 туристических агенств с просьбой об организации для своих сотрудников 3 различных туристических поездок. Сколько способов распределения 3 заявок между 6 агентствами, если каждое агенство может получить не более одной заявки?

24. Сколькими способами можно выбрать из 15-ти учеников 3-х дежурных?

25. В вазе лежат 7 различных фруктов. Сколькими способами можно выбрать k из них, если: а) $k=2$; б) $k=5$; в) $k=4$; г) $k=3$.

26. Менеджер ежедневно просматривает 6 изданий экономического содержания. Если порядок просмотра изданий случаен, то сколько существует способов его осуществления?

27. На железнодорожной станции имеется 5 путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 состава?

28. В соревнованиях по футболу учавствовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

29. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

30. Студенты группы решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в группе 24 студента?

31. На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0, 1, 2, ..., 8, 9. Каждая квартира получает код из двух цифр типа 0-2, 3-7, 7-3, 8-8 и т. п. позволяющий открывать входную дверь. Хватит ли кодов для всех квартир дома, если в доме 96 квартир?

32. Сколько чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 (без их повторения), таких, которые а) больше 3000;б) больше 2000?

33. Имеется 9 различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

34. В круговой диаграмме круг разбит на 5 секторов. Секторы решили закрасить разными красками, взятыми из набора, содержащего 10 красок. Сколькими способами это можно сделать?

35. На плоскости отмечено 8 точек, никакие из трех не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

Теория вероятностей

1. Брошена игральная кость. Найти верятность события $A=\{\textit{выпало четное число очков}\}$.

2. Найти вероятность события

$A=\{\textit{наибольший выигрыш при игре в лото по } 1 \textit{ билету}\}$,

если для этого необходимо угадать 5 из 36 чисел.

3. Вящике 20 шаров, из них 12 белых, остальные синие. Извлекают 2 шара. Найти вероятности событий:

$A=\{\textit{оба шара белые}\}$; $B=\{\textit{оба шара синие}\}$;

$C=\{\textit{один шар белый, другой синий}\}$.

Образуют ли события A, B, C полную группу?

4. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешиваюти извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

5. Талоны занумерованы всеми двухзначными числами. Из пачки наудачу берут 1 талон. Какова вероятность событий*A* ,*B*, *C*, D? Если

$A=\{\textit{номер талона состоит из одинаковых цифр}\}$,

$B=\{\textit{номер талона} - \textit{число делится на } 4\}$,

$C=\{\textit{номер талона} - \textit{число при делении на} 4 \textit{ дает в остатке } 2\}$.

$D=\{\textit{номер талона} - \textit{число делится на } 5\}$.

6. В вазе лежат 4 шарика, которые перенумерованы 1, 2, 3, 4. Достаем 3 шарика и в очередном порядке по мере изьятия зписываем цифры соответствующие номерам шариков. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{у\ полученных\ чисел\ цифры\ стоят\ по\ возрастанию\}$,

$B=\{первая\ цифра\ в\ числе самая\ большая\}$,

$C=\{сумма\ цифр\ в\ числе\ равна\ 6-ти\}$.

$D=\{сумма\ цифр\ в\ числе\ равна\ 8-ти\}$.

7. В коробке лежат 6 черных и 4 синих ручки. Выбирают произвольным образом 3 ручки.Найти вероятности следующих событий:

$A=\{из\ 3-х\ ручек,\ хотя\ бы\ одна\ синяя\}$,

$B=\{все\ 3\ ручки\ черные\}$.

8.Найти вероятность выигрыша в спортлото. Из 49 чисел угадать 6 и выиграть главный приз одним билетом.

9. Выбираем случайно двузначное число.Найти вероятность следующих событий:

$A=\{число\ делится\ на\ 4\}$;

$B=\{число\ при\ делении\ на\ 4\ дает\ в\ остатке\ 2\}$;

$C=\{число\ четное\}$; $D=\{число\ кратное\ 5-ти\}$;

$E=\{число\ нечетное\}$; $F=\{число\ кратное\ 7-ми\}$.

10. Наудачу, совершенно случайно выбираем одно число из 1, 2, 3, ..., 99, 100 чисел. Найти вероятность событий:

$A = \{число < 21\}$; $B = \{число > 75\}$;

$C = \{число \in полуинтервалу\ (15; 50]\}$;

$D = \{число \notin интервалу\ (34; 61)\}$.

11. Монету бросают 3 раза. Найти вероятности следующих событий: $A = \{решка\ выпадет\ 2\ раза\}$;

$B = \{решка\ выпадет\ хотя\ бы\ 1\ раз\}$;

$C = \{решка\ выпадет\ не\ больше\ 2-х\ раз\}$;

$D = \{при\ 2-ом\ бросании\ выпадет\ герб\}$.

12. Бросают два игральных кубика: один красный другой белый. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{одинаковые\ очки\ на\ обоих\ кубиках\}$;

$B = \{хотя\ бы\ у\ одного\ кубика\ выпало\ 4\ очка\}$;

$C = \{сумма\ очков\ равна\ 7\}$; $D = \{сумма\ очков\ равна\ 1\}$;

$E = \{очки\ у\ красного\ не\ больше,\ чем\ у\ белого\ кубика\}$;

$F = \{одного\ из\ кубиков\ 1\ очко\}$;

$G = \{у\ красного\ на\ 1\ очко\ больше,\ чем\ у\ белого\}$;

$H = \{у\ красного\ на\ 3\ очка\ меньше,\ чем\ у\ белого\ кубика\}$;

$K = \{сумма\ очков\ равна\ 10\}$;

$L = \{\text{разность очков равна } 2\}$;

$M = \{\text{у белого на } 2 \text{ очка меньше, чем у красного кубика}\}$.

13. В группе 10 девочек и 8 мальчиков. Случайным образом выбирают 3-х студентов для участия на конференции. Найти вероятность следующих событий:

$A = \{\text{выбрали только девочек}\}$;

$B = \{\text{выбрали только мальчиков}\}$;

$C = \{\text{выбрали } 2-\text{х девочек и } 1-\text{го мальчика}\}$;

$D = \{\text{из выбранных хотя бы одна девочка.}\}$.

14. Студент из 30 вопросов выучил 25, вытягивает билет, где 2 вопроса. Найти вероятность событий:

$A = \{\text{Студент знает } 2 \text{ вопроса}\}$;

$B = \{\text{Студент знает } 1 \text{ вопрос}\}$;

$C = \{\text{Не знает ни одного вопроса}\}$.

Ответы к задачам главы 4.

Комбинаторика.

1. 60 ; **2.** 120 ; **3.** 120 ; **4.** 182 ; **5.** 360; **6.** а) 9, б) 18,

в) 18; **7.** 24; **8.** 720 ; **9.** 24 ; **10.** 96; **11.** а) 24, б) 24, в) 18,

г) 18; **12. 8!7!** ; **13. 7!** ; **14.** а) 2520; б) 3360, в) 700; **15.** 91;

16. 1400; **17.** 8!; **18.** а) 66, б) 28, в) 96; **19.** 125970; **20.** 38760;

21. 1200; **22.** 600600; **23.** 120; **24.** 455; **25.** а) 21, б) 21, в) 35, г) 35; **26.** 720 ; **27.** 60 **;** **28**. 132; **29.** 28; **30**. 552;

31. (хватит); **32.** а) 12; б) 18; **33.** 17280; **34.** 30240; **35.** 28.

Теория вероятностей.

1. $P(A)=\frac{1}{2}$**;** **2.** $P(A)=\frac{1}{376992}$**;** **3.** $P(A)=\frac{33}{95}$**,**

$P(B)=\frac{14}{95}$**,** $P(C)=\frac{48}{95}$**,** A, B, C **-** полная группа ; **4.** 0,8;

5. $P(A)=0{,}1$**,** $P(B)=\frac{11}{45}$, $P(C)=\frac{23}{90}$, $P(D)=\frac{1}{5}$ **;**

6. $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{4}$; $P(D)=\frac{1}{4}$**;**

7. $P(A)=\frac{5}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$**;** **8.** $\frac{1}{C_{49}^{6}}$ **;** **9.** $P(A)=0{,}22$**,**

$P(B)=0{,}23$**,** $P(C)=0{,}44$**,** $P(D)=0{,}18$**,** $P(E)=0{,}18$ **,**

$P(F)=0{,}13$**;** **10.** $P(A)=0{,}2$**,** $P(B)=0{,}25$**,** $P(C)=0{,}35$**,**

$P(C)=0{,}35$ **;** $P(D)=0{,}74$**;** **11.** $P(A)=0{,}5$**,** $P(B)=\frac{7}{8}$**,**

$P(C)=\frac{7}{8}$, $P(D)=0{,}5$**;** **13.** $P(A)=\frac{15}{102}$, $P(B)=\frac{7}{102}$,

$P(C)=\frac{15}{34}$, $P(D)=\frac{95}{102}$; **14.** $P(A)=\frac{20}{29}$**,**

$P(B)=\frac{25}{87}$, $P(C)=\frac{2}{87}$.

Использованная литература

1. *Шипачев В.С.,* Курс высшей математики. М., 2009, 608 с.
2. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.,* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Физматлит, 2001, 464 с.
3. Минорский В.П., Сборник задач по высшей математике. М.: Физматлит, 2010, 336 с.
4. *Ефимов Н.В.,* Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1975, 272 с.
5. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Н.,* Математический анализ. МГУ, М., 2004, 672 с.
6. *Гнеденко Б.В.,* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, 445 с.
7. *Григорян Ш.А.,* Высшая математика. Ер., 2007, 112 с.

ГРИГОРЯН ШУШАНИК АКОПОВНА

к. физ.мат. наук, доцент кафедры
«Математики и математического моделирования»
Института математики и высоких технологий
Российско-Армянского университета
grig-shushanik@rambler.ru

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Учебник по высшей математике
для нематематических факультетов
(второе дополненное издание)

Редактор: *М.Э. Авакян*
Корректор: *М.Р. Тадевосян*
Компьютерная верстка: *А.С. Бжикян*

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского университета:

0051, г. Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123
тел./факс: (+374 10) 27-70-52, (внутр. 42-02)
e-mail: redaction.rau@gmail.com

Заказ № 16
Подписано к печати 09.07.2017г.
Формат 60х84$^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Объем усл. 13.25 п.л. Тираж 101 экз.