

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА  
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

# МЕЖДУНАРОДНАЯ ВОСЕМНАДЦАТАЯ ГОДИЧНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

2–6 декабря 2024 г.

Сборник научных статей:  
физико-математические  
и естественные науки

Ереван  
Издательство РАУ  
2025



**ՌՈՒՄԱՍՏԱՆԻ ԴԱՇՆՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ  
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ**

**ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,  
ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ**

**ՌՈՒՄ-ՀԱՅԿԱԿԱՆ (ՍԼԱՎՈՆԱԿԱՆ) ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**

## **ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ՏԱՍՆՈՒԹԵՐՈՐԴ ՏԱՐԵԿԱՆ ԳԻՏԱԺՈՂՈՎ**

**2024 թ. դեկտեմբերի 2–6**

**Գիտական հոդվածների ժողովածու՝  
Ֆիզիկա-մաթեմատիկական և բնական գիտություններ**

**Երևան-2025**

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА  
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ**

**РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)  
УНИВЕРСИТЕТ**

**МЕЖДУНАРОДНАЯ  
ВОСЕМНАДЦАТАЯ ГОДИЧНАЯ  
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

**2–6 декабря 2024г.**

**Сборник научных статей:  
физико-математические и естественные науки**

**Ереван-2025**

УДК 5(082)  
ББК 2я43  
В 760

*Печатается по решению Ученого  
и Редакционно-Издательского советов РАУ*

**Редакционная коллегия:**

Э.М. Сандоян (председатель), П.С. Аветисян (заместитель председателя), М.Г. Хачатрян, Э.М. Казарян, Е.Г. Маргарян, Ж.Б. Арамян, М.А. Калашян, К.В. Маркарян, А.А. Аракелян, А.К. Агаронян, А.А. Дарбинян, Г.С. Асатрян, Н.И. Таткало, А.В. Папоян, Р.Г. Арамян, С.С. Саргсян, Г.Г. Тоноян, Д.Б. Айрапетян, В.Г. Аветисян, В.Ш. Меликян, Г.Г. Данагулян, А.М. Григорян, А.А. Оганесян, Р.В. Захарян, Г.А. Багратян, А.М. Суварян, М.А. Восканян, И.Б. Петросян, А.А. Тавадян, А.В. Агаджанян, Б.В. Маилян, А.С. Берберян, К.С. Акопян, Г.Э. Галикян, Л.С. Меликсетян, А.А. Симонян, Г.Г. Геворгян, Н.В. Геворгян, О.Л. Саркисян, В.А. Оганесян, К.Г. Сардарян, Н.Ю. Зограбян, А.С. Гамбарян, М.В. Алекаян, Н.И. Кеворкова, В.Р. Кеворков, А.Л. Григорян.

Международная Восемнадцатая годовичная научная конференция (2–6  
В 760 декабря 2024г.). Сборник научных статей: физико-математические  
и естественные науки. – Ер.: Изд-во РАУ, 2025. – 160 с.

Сборник печатается по материалам 18-ой Годичной научной конференции, проведенной в Российско-Армянском университете. Статьи публикуются в алфавитном порядке и под авторскую ответственность.

Публикация сборника осуществлена в соответствии с требованиями ВАК РА к сборникам научных трудов.

Сборник зарегистрирован в базе данных РИНЦ и КиберЛенинка.

УДК 5(082)  
ББК 2я43

ISBN 978-9939-67-381-3

© Издательство РАУ, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Abrahamyan L.</b> About ternary hyperidentities.....	7
<b>Апинян Л.А.</b> Нахождение взаимосвязи радиальной и опорной функций, связанных с выпуклыми фигурами.....	11
<b>Арамян Р.Г.</b> Восстановления в томографии по локальным данным.....	19
<b>Берберян С.Л.</b> О классификации точек единичной окружности для нормальных непрерывных функций.....	22
<b>Vardanyan E.A.</b> Applications of moment closure approximation in Markov processes: a unified overview.....	26
<b>Демиденко Г.В.</b> Задача Коши для псевдогиперболических уравнений.....	31
<b>Ма Синь.</b> Обобщенное решение первой краевой задачи для одного псевдогиперболического уравнения.....	36
<b>Маргарян В.Н., Казарян Г.Г.</b> Критерий строго гипоеллиптичности и почти гипоеллиптичности одного класса многочленов.....	40
<b>Матвеева И.И.</b> Асимптотические свойства решений нелинейных неавтономных систем с запаздыванием.....	43
<b>Туманян А.Г.</b> О задаче Коши для одного класса почти гипоеллиптических уравнений.....	47
<b>Туманян А.Г.</b> О фредгольмовости и спектральных свойствах специальных классов гипоеллиптических операторов.....	52

### ИНФОРМАТИКА

<b>Арутюнян Г.А., Нахатакян С.Х., Саргсян М.А.</b> Метод локализации одиночных неисправностей в схемах аппаратуры вычислительных систем и сетей.....	59
<b>Մկրտչյան Ա.Կ.</b> Ինտերպրոցեդուրալ տվյալների հոսքի վերլուծությունն ինելացի պայմանագրերի համար.....	67
<b>Մովսիսյան Հ.Մ., Հովհաննիսյան Հ.Ա.</b> Միմլոլիկ կատարման մեթոդների լավացում՝ ծրագրային ապահովման վերլուծության արդյունավետության և կողի ծածկույթի բարձրացման համար.....	71
<b>Հովհաննիսյան Հ.Ա., Մովսիսյան Հ.Մ.</b> Հիշողության արտահոսքերի հայտնաբերում ստատիկ վերլուծության և սիմվոլիկ կատարման միջոցով....	75

## ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

- Багдасарян О.В., Князян Т.М., Оганесян Т.Т.** Электромагнитный анализ искусственной среды с близкой к нулю диэлектрической проницаемостью на основе металл-диэлектрической многослойной наноструктуры.....80
- Геворгян Л.С., Агаронян А.К., Сиволенко Э.Р.** Симуляция радарных целей в среде GNU RADIO.....88
- Оганнесян С.Ж., Агаронян А.К., Сиволенко Э.Р., Оганнесян А.Г.** Исследование и внедрение многочастотного радара непрерывного излучения с использованием систем SDR в среде с открытым исходным кодом.....93
- Սարգսյան Ա.Ս., Դավթրյան Ի.Մ., Մալխասյան Շ.Ռ.** Գնդաձեզ հայելիով վերակազմավորվող անստենային տերմինալ.....100

## БИОЛОГИЯ

- Arakelova E., Avagyan H., Hakobyan S., Baghdasaryan B.** Pathology and clinics of African swine fever caused by natural low-virulent variants in the Southern Caucasus .....108
- Vareghamyan Y., Arakelyan A.** Genomic variability in the Armenian population: identification of clinically significant variants through whole exome sequencing.....120
- Багдасарян С.А., Григорян А.М., Микаелян А.Р.** Синтез функционально замещенных циклопропанов и физиологически активных соединений на их основе .....126
- Бродская А.В., Ахметова А.Р., Грачева А.В., Хохлова Д.М., Корчевая Е.Р., Смирнова Д.И., Гаврилова Н.В., Файзулов Е.Б., Васин А.В.** Полилактидные нанокapsулы, содержащие малые интерферирующие РНК, способны подавлять репродукцию ротавируса на клеточной модели инфекции.....134
- Есаян Т.А.** Изучение взаимодействия хищных гифомицетов с некоторыми микромицетами почвы .....141
- Левченко Д.С., Никогосян М.Г., Асатрян. А.В.** Дифференциальные кривые плавления для сгенерированных случайных и реальных последовательностей в ДНК.....148
- Никогосян М.Г., Левченко Д.С., Морозов В.Ф.** Тонкая структура дифференциальных кривых плавления случайных последовательностей ДНК.....155

# МАТЕМАТИКА

## ABOUT TERNARY HYPERIDENTITIES

*L. Abrahamyan*

*Eurasia International University  
liana.abrahamyan@eiu.am*

### ABSTRACT

In the present paper ternary invertible algebra with ternary hyperidentity of associativity which is defined by the equality:

$$((x, y, z), u, v) = (x, (y, z, u), v)$$

are characterized.

**Keywords:** second order formula, hyperidentity, reversible algebra, ternary algebra.

### Introduction

The following second order formula

$$\forall x_1, \dots, x_k \forall X_1, \dots, X_m (w_1 = w_2),$$

where  $X_1, \dots, X_m$  are functional variables, and  $x_1, \dots, x_k$  are subject variables in words (terms)  $W_1, W_2$ . with specialized quantifiers, beginning at the 1960s, have been studied in various domains of algebra and it is called a hyperidentity [1- 8]:

The number  $m$  is called a rank of a hyperidentity.

Usually a hyperidentity is specified without universal quantifier prefix:

$w_1 = w_2,$

If a rank  $m > 1$ , the hyperidentity is called nontrivial.

The number  $m$  is called functional rank and the number  $k$  is called object rank of the given hyperidentity.

A hyperidentity is said to hold (or satisfied) in an algebra  $Q(\Sigma)$  if the equality  $w_1=w_2$  is valid when every variable from  $Q$  and every functional variable in it is replaced respectively by any arbitrary element of  $Q$  and any operation of the corresponding arity from  $\Sigma$  (it is assumed that such replacement is possible).

Example 1. [4] Every ring  $Q(+; \cdot)$  satisfies these hyperidentities:

$$\begin{aligned} & X(X(Y(x; x)); Y(x; x)); Y(X(x; x); X(x; x))) = \\ & = XY(X(x; x); X(x; x)); X(Y(x; x); Y(x; x))) \\ & X(Y(Y(x; x)), X(x; x)), Y(X(x; x), Y(x; x))) = \\ & = X(Y(X(x; x), Y(x; x)), Y(Y(x; x), X(x; x))) \end{aligned}$$

Every commutative ring satisfies the commutative hyperidentity

$$X(x; y) = X(y; x);$$

and every associative ring satisfies the associative hyperidentity

$$X(x; X(y; z)) = X(X(x; y); z).$$

Example 2. Every lattice  $Q(+; \cdot)$  satisfies the following trivial idempotent, commutative and associative hyperidentities:

$$\begin{aligned} & X(x; x) = x; \\ & X(x; y) = X(y; x); \\ & X(x; X(y; z)) = X(X(x; y); z) \end{aligned}$$

**Characterized. ternary hyperidentity of associativity which is defined by the equality  $((x, y, z), u, v) = (x, (y, z, u), v)$**

**Theorem 1.** If in a nontrivial invertible algebra a nontrivial hyperidentity of associativity is satisfied, which is defined by the equality:

$$((x, y, z), u, v) = (x, (y, z, u), v),$$

then every functional variable is repeated in it at least twice. Therefore, each of such hyperidentities can only be of functional rank 2 and one of the following types:

$$\begin{aligned}
X(Y(x, y, z), u, v) &= Y(x, X(y, z, u), v), \\
X(X(x, y, z), u, v) &= Y(x, Y(y, z, u), v), \\
X(Y(x, y, z), u, v) &= X(x, Y(y, z, u), v).
\end{aligned}$$

Then we obtain characterizations of the ternary invertible algebras with these hyperidentities.

**Theorem 1.1.** In a ternary reversible algebra  $Q(\Sigma)$  the hyperidentity

$$X(Y(x, y, z), u, v) = Y(x, X(y, z, u), v)$$

holds if and only if each operation  $A_i \in \Sigma$  is defined by the rule:

$$\begin{aligned}
A_i(x, y, z) &= q^{-1}(qx \circ s_i \circ \psi \delta y \circ \delta z), \\
\psi s_i &= s_i, \\
\psi^2(z) &= s_i^{-1} \circ z \circ s_i, \\
(\psi \delta q^{-1})x &= t \circ \psi x,
\end{aligned}$$

where  $Q(\circ)$  is a binary group,  $\psi \in \text{Aut}Q(\circ)$ , is its quasiautomorphism,  $q, \delta$  permutations of the set  $Q$  and  $s_i, t \in Q$ .

**Theorem 1.2.** In a ternary reversible algebra  $Q(\Sigma)$  the hyperidentity

$$X(X(x, y, z), u, v) = Y(x, Y(y, z, u), v)$$

holds if and only if, each operation  $A_i \in \Sigma$  is defined by the following rule:

$$\begin{aligned}
A_i(x, y, z) &= q^{-1}(qx \circ \theta qy \circ \phi(\theta qz) \circ s_i), \\
\phi^2(x) &= x, \theta s_j \circ s_j = (\theta e) \circ s_i^2,
\end{aligned}$$

where  $Q(\circ)$  is a binary group,  $\phi \in \text{Aut}Q(\circ), s_i \in Z(Q(\circ))$ ,  $\theta$  is its quasiautomorphism and  $e$  is the identity element of the group  $Q(\circ)$ .

**Theorem 1.3.** In a ternary reversible algebra, the hyperidentity

$$X(Y(x, y, z), u, v) = X(x, Y(y, z, u), v)$$

holds if and only if, each operation  $A_i \in \Sigma$  is defined by the following rule:

$$\begin{aligned}
A_i(x, y, z) &= q^{-1}(qx \circ \theta qy \circ \phi(\theta qz) \circ t_i), \\
\phi^2(x) &= t_i \circ x \circ t_i^{-1}, \\
\theta t_i &= \theta e \circ t_i,
\end{aligned}$$

where  $Q(\circ)$  is a group,  $\phi \in \text{Aut}Q(\circ)$ ,  $t_i \in Q$ ,  $\theta$  is its quasiautomorphism, and  $e$  is the identity element of the group  $Q(\circ)$ .

## REFERENCES

1. *Movsisyan Yu.* Second-Order Formulas in Action // “Applied Mathematics”, Vol.15, № 9, 2024.
2. *Movsisyan Yu.* Hyperidentities: Boolean and De Morgan Structures // “WORLD Scientific Publishing Co Pte LTD”, 2023.
3. *Movsisyan Yu.* Hyperidentities in algebras and varieties, // “Uspekhi Matematicheskikh Nauk”, 53(1998). PP. 61–114. English translation in Russian Mathematical Surveys 53, 1998. PP. 57–108.
4. *Movsisyan Yu.* Hyperidentities and hypervarieties // “Scientiae Mathematicae Japonicae”, 54(3), 2001. PP. 595–640.
5. *Malcev A.* Some problems in the theory of classes of models, Proceedings of IV All-Union Mathematical Congress, Leningrad // “Publishing House of the USSR Academy of Sciences”, Leningrad, 1963. PP. 169–198.
6. *Church A.* Introduction to mathematical logic, vol. I // “Princeton University Press”, Princeton, 1956.
7. *Bergman G.* Hyperidentities of groups and semigroups, A equations Math. 23, 1981. PP. 50–65.
8. *Taylor W.* Hyperidentities and hypervarieties, An equations Math. 23, 1981. PP. 111–127.

## О ТЕРНАРНЫХ СВЕРХТОЖДЕСТВАХ

*Л.Р. Абрамян*

*Международный университет «Евразия», Республика Армения*

## АННОТАЦИЯ

В настоящей работе охарактеризована тернарная обратимая алгебра с тернарным сверхтождеством ассоциативности, которые определяются равенством:

$$((x, y, z), u, v) = (x, (y, z, u), v).$$

**Ключевые слова:** формула второго порядка, гипертотждество, обратимая алгебра, тернарная алгебра.

# НАХОЖДЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ РАДИАЛЬНОЙ И ОПОРНОЙ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЫПУКЛЫМИ ФИГУРАМИ

*Л.А. Апинян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет  
apinlev00@gmail.com*

## АННОТАЦИЯ

Задача нахождения информации или полного восстановления выпуклых тел по распределениям характеристик  $k$ -мерных сечений – одна из основных задач стохастической томографии. Зачастую «восстановить выпуклое тело» означает найти либо его опорную функцию, либо радиальную. Настоящая работа посвящена выявлению взаимосвязи между опорной функцией тела, функцией расстояния и функцией распределения длин хорд по направлению.

**Ключевые слова:** выпуклая фигура, опорная функция, радиальная функция.

## Введение

Геометрические характеристики выпуклого тела  $K$ , инвариантные относительно Евклидовых движений, могут быть вычислены статистическими методами. Решение таких задач выходит далеко за рамки теоретического интереса.

Эта область была значительно развита в течение последних десятилетий, когда требовалось все большее количество реальных приложений. В частности, восстановление выпуклого тела по его случайным сечениям является центральной задачей стохастической томографии.

Восстановление выпуклых тел (компактных множеств) является главной задачей геометрической томографии. Геометрическая томография – это математическая область, которая фокусируется на проблемах восстановления однородных (часто выпуклых) объектов из томографических данных (это могут быть рентгеновские лучи, проекции, сечения, функции яркости или ковариограммы). По словам Ричарда Гарднера, «геометрическая

томография посвящена поиску информации о геометрическом объекте из данных о его проекциях (тнях) на плоскостях или сечениях плоскостями». Геометрическая томография в рамках математики в основном связана с выпуклой геометрией, интегральной геометрией, геометрией Минковского, функциональным анализом и комбинаторикой, а также вне математики – с компьютерной томографией, медицинской томографией, дискретной томографией, электронной микроскопией, компьютерным зрением и распознаванием образов.

Стохастическая томография посвящена поиску информации о геометрическом объекте из случайных данных о его проекциях (тнях) на плоскостях или распределении случайных сечений  $k$ -мерными плоскостями.

### **Постановка задачи**

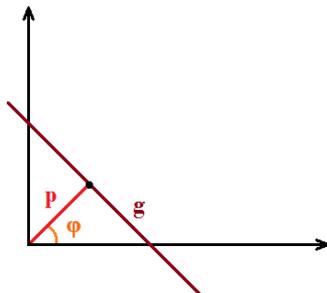
Задача настоящей работы состоит в нахождении взаимосвязи между некоторыми функциями, связанными с выпуклой фигурой на плоскости.

В настоящей статье описаны некоторые взаимосвязи упомянутых функций и представлены открытые вопросы относительно других возможных взаимосвязей.

## **1. Предварительные понятия**

### **1.1. Координаты прямой на плоскости**

Пространство прямых на плоскости  $\mathbb{R}^2$  будем обозначать через  $G$ , как это принято обозначать в литературе. Прямую  $g \in G$  параметризуем парой координат  $(p, \varphi)$ ,  $p \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , то есть полярными координатами основания перпендикуляра, опущенного на прямую  $g$  из начала координат  $O$  (показано на Рис. 1). Обычно  $(p, \varphi)$  называются «нормальными координатами прямой». Заметим, что для пучка прямых, проходящих через начало  $O$ , координата  $\varphi$  определена неоднозначно (то есть с точностью до  $\pi$ ).



*Рисунок 1. Нормальные координаты прямой.*

Часто рассматривается пространство  $\bar{G}$  всех направленных прямых на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Стандартными координатами для  $\bar{G}$  служат те же координаты  $(p, \varphi)$ , только область их изменения шире:  $-\infty < p < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . Условно будем говорить, что «ось  $p$ », перпендикулярная прямой  $g \in \bar{G}$ , направлена в правую (относительно  $g$ ) полуплоскость. На Рис. 2 для прямой  $g'$ , параллельной  $g$  и лежащей на том же расстоянии от  $O$ , но оставляющей  $O$  справа, будет:

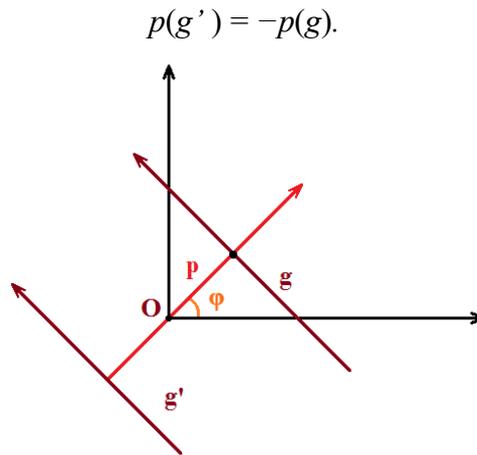


Рисунок 2. Координаты направленной прямой.

## 1.2. Инвариантные меры на $\bar{G}$ и $G$

«Инвариантной мерой» на  $\bar{G}$  называется мера на классе борелевских подмножеств  $\bar{G}$ , соответствующая лебеговской мере на цилиндре  $S$ , т.е. мере с элементом

$$dg = dp d\varphi. \quad (1)$$

Эта мера является единственной (с точностью до умножения на константный коэффициент) мерой на  $\bar{G}$ , обладающей свойством инвариантности относительно группы  $\mathbf{M}$  евклидовых движений на плоскости  $\mathbb{R}^2$  (отражение, параллельный перенос, поворот). Это свойство означает, что для любого  $B \subset \bar{G}$ ,

$$\int_B dg = \int_{MB} dg, \quad MB = \{Mg : g \in B\},$$

где  $Mg$  – образ  $g \in G$  при движении  $M \in \mathbf{M}$ .

Последнее равенство можно вывести из элементарного принципа Кавальери, применимого благодаря тому, что преобразования из индуцированной группы переводят образующие цилиндра снова в образующие (по

закону вращения цилиндра вокруг оси), причем расстояния между парами точек на образующих после преобразования не меняются. Известно, что индуцированная группа преобразований цилиндра  $C$  не совпадает с группой его изометрий: при параллельном сдвиге  $\mathbb{R}^2$  различные образующие цилиндра сдвигаются на разные длины.

В координатах:

$x$  – абсцисса точки пересечения прямой  $g$  с осью  $OX$ ,

$\psi$  – угол между  $g$  и осью  $OX$ ,

инвариантная мера на  $G$  записывается как:

$$dg = |\sin \psi| dx d\psi. \quad (2)$$

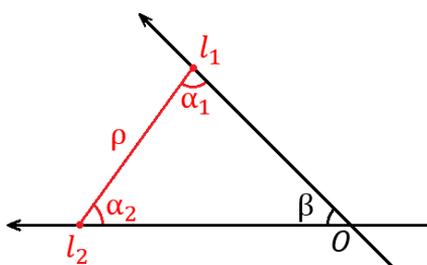


Рисунок 3. Координаты на паре осей.

Пусть на плоскости имеем две прямые  $g_1, g_2$ , и пусть  $l_1, l_2$  – одномерные координаты точек на соответствующих прямых. Каждой паре  $(l_1, l_2)$  соответствует прямая, проходящая через эти точки. В координатах  $(l_1, l_2)$  имеем:

$$dg = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\rho} dl_1 dl_2, \quad (3)$$

где  $\rho = |l_1, l_2|$  – длина отрезка  $l_1, l_2$  (расстояние между точками  $l_1$  и  $l_2$ ), а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между  $g$  и прямыми  $g_1$  и  $g_2$ . Также как и в  $\bar{G}$ , в пространстве  $G$  имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная относительно группы  $\mathbf{M}$  евклидовых движений на плоскости. Для инвариантной меры на  $G$  мы сохраняем обозначение  $dg$ . В пространстве  $G$  сохраняются также выражения (1), (2) и (3). Разумеется, при интегрировании следует учитывать, что области изменения координат для  $g \in G$  и  $g \in \bar{G}$  различны.

### 1.3. Опорная функция тела

Опорная функция тела  $A$  –  $h_A(\varphi)$  определяется как:

$$\text{Sup}_{x \in A} \langle x, u \rangle,$$

где  $\varphi$  – произвольный угол, а  $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ .

Она представляет из себя расстояние от какой-то фиксированной внутренней точки тела до касательной тела в направлении  $\varphi$  (Рис. 5).

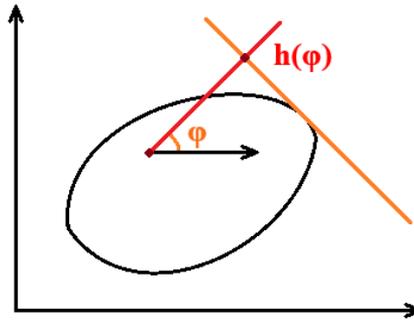


Рисунок 5. Опорная функция выпуклого тела.

В виду следующей теоремы, опорная функция тела является одной из важнейших функций, связанных с выпуклым телом.

**Теорема.** Опорная функция однозначно восстанавливает выпуклое тело (в общем случае – выпуклую оболочку тела).

#### 1.4. Радиальная функция

Радиальная функция тела  $A$  –  $\rho_A(\varphi)$  определяется как

$$\max_{t \in R} \{t > 0; tu \in A\},$$

где  $u$  единичный вектор в направлении  $\varphi$ .

Таким образом, радиальная функция для заданного направления – это расстояние от начала координат до граничной точки в заданном направлении

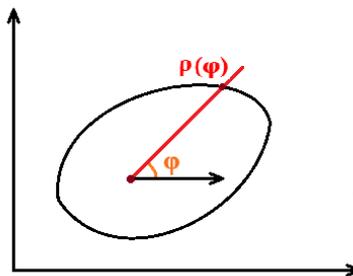


Рисунок 6. Радиальная функция выпуклого тела.

## 2. Основные результаты

В этой части рассматриваются задачи нахождения взаимосвязей между функцией распределения длин хорд по направлению, опорной функцией и радиальной функцией.

### Взаимосвязь опорной и радиальной функций

#### Задача 1.

Пусть для данного тела  $A$  известна  $\forall \varphi h(\varphi)$ . Выразить угол наклона прямой, соединяющей начало координат с точкой на границе тела, имеющей внешнюю нормаль, угол наклона которой по отношению к оси абсцисс равен  $\varphi$ .

Обозначим искомый угол как функцию от  $\varphi$ :  $\alpha(\varphi)$ . Тогда:

$$\alpha(\varphi) = \arcsin \left( \frac{h(\varphi) \sin \varphi_0 + h'(\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{h(\varphi)^2 + h'(\varphi)^2}} \right)$$

#### Задача 2.

Пусть для данного тела  $A$  известна  $\forall \alpha \rho(\alpha)$ . Выразить угол внешней нормали тела в граничной точке через угол  $\alpha$  луча, проходящего из начала координат через эту точку.

Обозначим искомый угол как функцию от  $\alpha$ :  $\varphi(\alpha)$ . Тогда:

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{arctg} \left( \frac{-\rho'(\alpha) \cos \alpha + \rho(\alpha) \sin \alpha}{\rho'(\alpha) \sin \alpha + \rho(\alpha) \cos \alpha} \right)$$

#### Задача 3.

Пусть для данного тела  $A$  известна  $\forall \varphi h(\varphi)$ . Выразить угол внешней нормали тела в граничной точке через угол  $\alpha$  луча, проходящего из начала координат через эту точку.

Легко заметить, что, используя решение задачи 1, эту задачу можно решить итеративным методом, последовательными приближениями.

Фиксируется некоторый угол  $\alpha_0$  и вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_l &= \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_r &= \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Далее рассчитывается некоторое начальное (i-тое) приближение:

$$\varphi' = \frac{\varphi_l + \varphi_r}{2}$$

При помощи формулы, полученной из задачи 1, высчитывается  $\alpha(\varphi')$ .

Если  $\alpha(\varphi') = \alpha_0$ , то  $\varphi(\alpha_0) = \varphi'$ , то есть ответ найден и алгоритм завершается.

Если  $\alpha(\varphi') > \alpha_0$ , то  $\varphi_l$  и  $\varphi_r$  переобозначаются следующим образом:

$$\varphi_l = \varphi'$$

$$\varphi_r = \varphi_r$$

снова рассчитывается  $\varphi'$  и алгоритм продолжается

Если  $\alpha(\varphi') < \alpha_0$ , то  $\varphi_l$  и  $\varphi_r$  переобозначаются следующим образом:

$$\varphi_l = \varphi_l$$

$$\varphi_r = \varphi'$$

снова рассчитывается  $\varphi'$  и алгоритм продолжается.

Алгоритм также может завершиться, если на каком-то шаге разность двух последовательных приближений будет удовлетворительно малой (меньше некоторого заранее заданного значения).

#### **Задача 4.**

Пусть для данного тела А известна  $\forall \alpha \rho(\alpha)$ . Выразить угол наклона прямой, соединяющей начало координат с точкой на границе тела, имеющей внешнюю нормаль, угол наклона которой равен  $\varphi$ .

Эту задачу также можно решить итеративно, воспользовавшись решением задачи 2, аналогично решению задачи 3.

#### **Задача 5.**

Пусть для данного тела А известна  $\forall \varphi h(\varphi)$ . Для данного угла  $\alpha$  выявить явную формулу для  $\rho(\alpha)$ .

Нетрудно убедиться, что

$$\rho(\alpha) = \frac{h(\varphi(\alpha))}{\cos|\varphi(\alpha) - \alpha|}$$

#### **Задача 6.**

Пусть для данного тела А известна  $\forall \alpha \rho(\alpha)$ . Для данного угла  $\varphi$  выявить явную формулу для  $h(\varphi)$ .

Нетрудно убедиться, что

$$h(\varphi) = \cos|\varphi - \alpha(\varphi)| \cdot \rho(\alpha(\varphi))$$

## Заклучение

Таким образом был рассмотрен ряд задач, решения которых позволяют найти взаимосвязь опорной функции с радиальной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Luis A.* Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley, Reading, MA, 2004.
2. *Bianchi G.* The covariogram determines three-dimensional convex polytopes. *Advances in Mathematics*, 220, 2009, PP.1771–1808; arXiv:0805.1605v1 [math.MG]
3. *Matheron G.* Random Sets and Integral Geometry. “Willey”, New-York, 1975.
4. *Huang Y., Yang D., Zhzng G.* Minkowski problems for geometric measures //arXiv preprint arXiv:2502.05427. 2025.
5. *Averkov G., Bianchi G.* Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body //Journal of the European Mathematical Society. 2009. Т. 11. № 6. P. 1187.

## IDENTIFYING THE RELATIONSHIP BETWEEN CERTAIN FUNCTIONS ASSOCIATED WITH CONVEX FIGURES

*L. Apinyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

### ABSTRACT

The problem of obtaining information or fully reconstructing convex bodies based on the distributions of characteristics of  $k$ -dimensional sections is one of the main challenges in stochastic tomography. This work is dedicated to identifying the relationship between the support function of a body, the distance function, and the chord length distribution function in a given direction.

**Keywords:** convex figure, support function, distance function, chord length distribution function.

# ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ТОМОГРАФИИ ПО ЛОКАЛЬНЫМ ДАННЫМ

*Р.Г. Арамян*

*Институт математики НАН РА  
Российско-Армянский (Славянский) университет  
rafikaramyan@yahoo.com*

## АННОТАЦИЯ

Мы говорим об очень важном применении математики, а именно – о компьютерной томографии (КТ), которая оказала огромное влияние на медицинскую диагностику.

Общедоступно представим, какая математическая задача лежит в основе компьютерной томографии и какие проблемы существуют. Представим новый метод в томографии, а именно – термо-акустическую томографию и какая при этом возникает математическая проблема. Представим современное состояние решения этой проблемы и какие результаты есть у нас.

**Ключевые слова:** компьютерная томография, термо-акустическая томография.

## Введение

Компьютерная томография оказала большое влияние на медицинскую диагностику. Основой рентгеновской томографии является классическое преобразование Радона, которое отображает функцию в ее интегралы по прямым линиям. Исследователи, использующие различные типы физических сигналов, разработали новые методы для томографии. Термо-акустическая томография (ТАТ) является наиболее успешным методом. Концепция ТАТ заключается в следующем: кратковременная электромагнитная волна посылается через биологический объект, чтобы вызвать термо-акустический отклик в ткани. Различные реакции биологических клеток зависят от количества поглощенной энергии. Термоупругое расширение создает акустическую волну, которую можно измерить детекторами, размещенными снаружи объекта (мы предполагаем, что скорость звука постоянна). Та-

ким образом, эффективно измеряются интегралы функции распределения поглощения энергии по всем сферам, центрированным в местах расположения детекторов. Отличный диагностический инструмент может быть обнаружен, если функция распределения поглощения энергии  $f$  найдена. Для восстановления  $f$  необходимо инвертировать так называемое сферическое преобразование Радона  $f$ , которое интегрирует функцию по сферам с центрами в детекторах.

### Известные результаты

В настоящее время известны точные формулы обращения для сферического преобразования Радона для различных геометрий детекторов в 2D для линий, окружностей, эллипсов, в 3D для границ специальных областей, включая сферы, цилиндры, эллипсоиды и гиперплоскости.

В статьях [2–5] предлагается новый подход, который называется методом согласованности для обращения сферического преобразования Радона в 2D с детекторами на линии и 3 с детекторами на плоскости. С помощью этого метода найдена новая итеративная формула обращения, которая дает алгоритм для восстановления неизвестной гладкой функции из ее сферических средних по окружностям с центром на линии и с центрами на плоскости. Наши формулы восстановления имеют преимущество перед всеми существующими формулы восстановления тем что они локальны, т.е. для восстановления неизвестной функции используют локальные данные.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Kuchment P., Kunyansky L.* Mathematics of thermoacoustic and photoacoustic tomography. / *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*: (Springer Verlag) 2, (2010). PP. 817–866.
2. *Aramyan R.* To local reconstruction from the spherical mean Radon transform // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 470, 2019. Q1.
3. *Aramyan R.* Recovering a function from spherical means in 3D using local data, *Inverse Problems and Imaging*, vol 18(3), 2024, Q2.
4. *Aramyan R.* Inversion of the pair of weighted and classical circular Radon transforms in  $C(\mathbb{R}^2)$  // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 530 (2), 2024, Q1.
5. *Aramyan R.* Inversion of the two-data circular Radon transform centered on a curve”, *Studies in Applied Mathematics*, 153 (2), 2024, Q1.

# RECONSTRUCTION IN TOMOGRAPHY USING LOCAL DATA

*R. Aramyan*

*Institute of Mathematics, NAS RA  
Russian-Armenian (Slavonic) University*

## ABSTRACT

We will talk about a very important application of mathematics, namely, computed tomography (CT), which has had a huge impact on medical diagnostics. We will present in a publicly accessible way what mathematical problem underlies computed tomography and what problems exist. We will present a new method in tomography, namely, thermo-acoustic tomography and what mathematical problem arises. We will present the current state of the solution to this problem and what results we have.

**Keywords:** computed tomography, thermo-acoustic tomography.

# О КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

*С.Л. Берберян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет  
samvel357@mail.ru*

## АННОТАЦИЯ

В настоящей работе рассматриваются определенные в единичном круге непрерывные функции класса  $\mathfrak{R}^*$ , являющийся более общим классом, чем класс  $\mathfrak{R}$ . В зависимости от граничного поведения непрерывных функций класса  $\mathfrak{R}^*$  дается классификация точек единичной окружности. Ранее аналогичный результат был получен для непрерывных функций класса  $\mathfrak{R}$ .

**Ключевые слова:** точки Мейера, точки Жюлиа, действительнзначные непрерывные функции классов  $\mathfrak{R}$  и  $\mathfrak{R}^*$ , предельные множества.

Будем придерживаться общепринятых обозначений и понятий (см. [1] или [2]). Обозначим через  $D$ ,  $\Gamma$  и  $h(\xi, \varphi)$ , соответственно, единичный круг  $|z| < 1$ , единичную окружность  $|z| = 1$  и хорду единичного круга  $D$ , оканчивающуюся в точке  $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$  и образующую с радиусом в этой точке угол  $\varphi$ ;  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Пусть  $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$  обозначает подобласть круга  $D$ , ограниченную хордами  $h(\xi, \varphi_1)$  и  $h(\xi, \varphi_2)$ . Область  $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$  называют «обычно углом Штольца» с вершиной в точке  $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ , и, если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко  $\Delta(\xi)$ . Через  $\mathbb{R}$  обозначают множество действительных чисел. Для произвольного подмножества  $S$  круга  $D$ , для которого точка  $\xi \in \Gamma$  является предельной точкой, обозначим через  $C(f, \xi, S)$  предельное множество функции  $f(z)$  в точке  $\xi$  относительно множества  $S$ , т.е.  $C(f, \xi, S) = \bigcap \underline{f(S \cap U(\xi))}$ , где пересечение берется по всем окрестностям  $U(\xi)$  точки  $\xi$ , а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации  $\mathbb{R}$  множества  $\mathbb{R}$  в виде отрезка посредством добавления к точкам множества  $\mathbb{R}$  символов  $-\infty$  и  $+\infty$ .

Через  $R(f, \xi, S)$  обозначают множество повторяющихся значений функций  $f(z)$  на множестве  $S$ ,  $a = f(z_n^a), n \in N$ , для которой последовательность  $\{z_n^a\}$  точек множества  $S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^a = \xi$ , удовлетворяет условию  $\xi \in \Gamma$ .

Хорду  $h(\xi, \varphi)$  называют «направлением Жюлиа» для функции  $f(z)$ , если для любого угла  $\Delta(\xi)$ , содержащего хорду  $h(\xi, \varphi)$ , множество  $R(f, \xi, \Delta(\xi))$  покрывает все множество  $\mathbb{R}$ , за возможным исключением не более двух значений. Точка  $\xi \in \Gamma$  называется «точкой Жюлиа» для функции  $f(z)$ , если каждая хорда  $h(\xi, \varphi)$  является направлением Жюлиа функции  $f(z)$ . Множество всех точек Жюлиа обозначают через  $J(f)$ . Точку  $\xi \in \Gamma$  назовем «уточненной точкой Жюлиа» функции  $f(z)$  и отнесем к подмножеству  $J^*(f)$  множества  $J(f)$ , если для любой хорды  $h(\xi, \varphi)$  множество  $R(f, \xi, h(\xi, \varphi))$  покрывает  $\mathbb{R}$ , за возможным исключением двух значений.

Точка  $\xi \in \Gamma$  называется «уточненной точкой Мейера» функции  $f(z)$  и относится к множеству  $M^*(f)$ , если:

- а)  $C(f, \xi, D)$  содержит более одной точки;
- б)  $C(f, \xi, h(\xi, \varphi)) = C(f, \xi, D)$  для любой хорды  $h(\xi, \varphi)$ ;
- с) множество  $C(f, \xi, D) \setminus R(f, \xi, h(\xi, \varphi)) \neq \underline{R}$  состоит самое большое из двух элементов для любой хорды  $h(\xi, \varphi)$ .

Обыкновенная точка Мейера отличается от уточненной точки Мейера тем, что в ней отсутствуют свойства а) и с). Множество всех точек Мейера обозначают через  $M(f)$ .

Точка  $\xi \in \Gamma$  называется точкой граничной непрерывности функции  $f(z)$ , и относят ее к множеству  $C_b(f)$ , если  $C(f, \xi, D)$  или  $C(\frac{1}{f}, \xi, D)$  состоит из единственного значения.

Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе  $T$  всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга  $D$  группа  $T$  состоит из элементов  $T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z + a) \cdot (1 + \underline{az})^{-1}\}$ ,  $a$  – произвольная точка в  $D$ ,  $\alpha$  – произвольное действительное число. Придерживаясь обозначений из работы [2] скажем, что действительная функция  $f(z) \in R$ , если на группе  $T$  всех конформных автоморфизмов единичного круга  $D$  порождаемое ею семейство функций  $\Phi: \{f(S(z)); S(z) \in T\}$  нормально в  $D$  в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности  $\{f(S_n(z))\}$ , семейства  $\Phi$ , где  $S_n(z) \in T$ , можно извлечь

подпоследовательность  $\{f(S_{n_k}(z))\}$ , равномерно сходящуюся на любом компакте  $K$  в  $D$  или равномерно расходящуюся к  $-\infty$  или к  $+\infty$  на  $K$ .

В статье [2] В.И. Гавриловым была сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы  $T$ . Была рассмотрена подгруппа  $T^\theta = \{S_a^\theta(z); S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta}) \cdot (1 + aze^{-i\theta})\}$ , где  $a \in (-1,1)$  и  $\theta, 0 \leq \theta < \pi$  – фиксировано}. Действительнозначную функцию  $f(z)$  отнесем к классу  $R^\theta$ , где  $0 \leq \theta < \pi$  – фиксировано, если порождаемое ею семейство функций  $\Phi^\theta = \{f(S_a^\theta(z)); S_a^\theta \in T^\theta\}$  нормально в  $D$  в смысле Монтеля. Известно (см. [3]), что для непрерывных функций класс  $R^* = \bigcap R^\theta$ , где  $0 \leq \theta < \pi$ , содержит класс  $\mathfrak{R}$ .

### Основной результат работы

**Теорема.** Для произвольной непрерывной действительнозначной функции  $f(z)$  класса  $\mathfrak{R}^*$ , определенной в  $D$ , справедливы равенство  $B^*(f) = M^*(f)$  и разложение  $\Gamma = C_b(f) \otimes M^*(f) \otimes J^*(f) \otimes E$ , в котором  $E$  – некоторое множество первой категории и типа  $F_\sigma$  на  $\Gamma$ .

При доказательстве теоремы существенно пользуемся следующими утверждениями.

**Теорема А.** Для произвольной действительнозначной непрерывной функции  $f(z)$  класса  $\mathfrak{R}^*$  справедливо равенство  $J(f) = J^*(f)$ , причем в каждой точке  $\xi \in J^*(f)$  равенство  $R(f, \xi, h(\xi, \varphi)) = R$  справедливо для любой хорды  $h(\xi, \varphi)$ .

Доказательство теоремы А проводится по той же схеме, что и в работе [4] для непрерывных функций класса  $\mathfrak{R}$ .

**Теорема Б** (см. [4]). Если у непрерывной в  $D$  действительнозначной функции  $f(z)$  множество  $C(f, \xi, S)$  для связного множества  $S$  в  $D$  не вырождается в единственную точку, то  $R(f, \xi, S) \supset \text{int}C(f, \xi, S)$ , где символ  $\text{int}A$  обозначает множество всех внутренних точек множества  $A$ .

Для произвольной действительнозначной непрерывной функции  $f(z)$  класса  $\mathfrak{R}$  теорема, рассмотренная в данной работе, была доказана в работе [4]. Отметим, что различные классические теоремы о разложении точек единичной окружности для мероморфных функций, определенных в еди-

ничном круге, рассмотрены в монографиях [5] и [6], а для гармонических функций рассмотрены в работе [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коллингвуд Э. и Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Изд-во «Мир», 1971. С. 306.
2. Гаврилов В.И. Нормальные функции и почти периодические функции. ДАН СССР, 1978. Т. 240, № 4. СС. 768–770.
3. Берберян С.Л. Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций // «Известия вузов. Математика», 1986, № 3. СС. 22–28.
4. Берберян С.Л., Гаврилов В.И. Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям. *Mathematica Montisnigri*, 1993, Vol.1. СС. 17–25.
5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 336.
6. Носиро К. Предельные множества. М., «Изд-во иностранной литературы», 1963. С. 253.
7. Yamashita Sh. On Fatou-and Plessner type theorems // *Proc. Japan. Acad.*, 1970, vol. 46, № 6. PP. 494–495.

## ON THE CLASSIFICATION OF UNIT CIRCLE POINTS FOR NORMAL CONTINUOUS FUNCTIONS

*S. Berberyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

### ABSTRACT

In this paper, we consider continuous functions of class  $\mathfrak{R}^*$  defined in the unit circle, which is a more general class than class  $\mathfrak{R}$ . Depending on the boundary behavior of continuous functions of class  $\mathfrak{R}^*$ , a classification of points of the unit circle is given. Earlier, a similar result was obtained for continuous functions of class  $\mathfrak{R}$ .

**Keywords:** Meyer points, Julia points, real-valued continuous functions of classes  $\mathfrak{R}$  and  $\mathfrak{R}^*$  cluster sets.

# APPLICATIONS OF MOMENT CLOSURE APPROXIMATION IN MARKOV PROCESSES: A UNIFIED OVERVIEW

*E. Vardanyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University  
edgarvardanyan1999@gmail.com*

## ABSTRACT

Moment closure approximation is a mathematical tool used to simplify the analysis of stochastic processes modeled by Markov systems. This paper provides a concise summary of the moment closure approach, lists the types of processes where it has been applied successfully, and illustrates its utility using the Moran process in evolutionary game theory as a detailed example. Our results highlight the method's efficacy in handling finite population models and stochastic chemical kinetics.

**Keywords:** moment-closure approximation, stochastic process, Markov processes, game theory.

## Introduction

Moment closure approximation is a technique that approximates infinite-dimensional systems of moments with a finite number of equations, making complex stochastic models more manageable. This approximation method has been instrumental in a range of fields, including population dynamics, evolutionary game theory, and statistical mechanics. It simplifies the analysis of stochastic processes by focusing on the first few moments (e.g., mean and variance) instead of the entire probability distribution [1, 2, 3].

## Overview of Applicable Processes

Moment closure approximation has been widely used in various Markov processes, including but not limited to:

- **Windy Gridworld Models in Robotics:** Applied to model stochastic disturbances in robotic navigation, where the agent's policy is non-deterministic.

- **Stochastic Chemical Kinetics:** Employed to derive approximations for the behavior of reaction networks, crucial for understanding biochemical systems [3].

- **Wright-Fisher and Crow-Kimura Models in Evolutionary Dynamics:** These are prominent models in population genetics, capturing finite population effects and allele frequency dynamics (WFFP) [2].

- **Evolutionary Game Theory:** Applied to study dynamics in finite populations using processes like the Moran model, which considers selection pressures and mutation rates [1].

## General Approach

Moment closure approximation is a method used to simplify the analysis of stochastic systems described by a series of coupled differential equations for the moments of a probability distribution. The approach involves truncating the hierarchy of moment equations at a certain order to obtain a finite, closed system of equations that describe the system's dynamics.

The foundation of the moment closure method lies in the master equation, which governs the time evolution of the probability distribution  $(x, t)$  of a stochastic process. The master equation can be written as:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \sum_{x'} [W(x' \rightarrow x)P(x', t) - W(x \rightarrow x')P(x, t)]$$

where  $W(x \rightarrow x')$  is the transition rate from state  $x$  to state  $x'$ . This equation provides a complete description of the stochastic process but is often too complex to solve directly, especially when dealing with high-dimensional systems.

To apply moment closure approximation, we first define the moments of the distribution. The  $\alpha$ -th moment  $M(t)$  of a random variable  $x(t)$  is given by:

$$M_\alpha(t) = \langle x^\alpha \rangle = \int x^\alpha P(x, t) dx$$

Typically, we are interested in the first few moments, such as the mean  $\langle x \rangle$  and the variance  $\text{Var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ . From the master equation, we can derive equations for the time evolution of these moments. Taking the time derivative of  $M(t)$  and using the master equation, we get:

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \int \sum_{x'} (x^\alpha W(x' \rightarrow x)P(x', t) - x^\alpha W(x \rightarrow x')P(x, t)) dx$$

Once this is applied and the actual functions for W and P are used for the process being studied, we get differential equations for each moment. In case of discrete time Markov processes, we get a set of iterative equations instead of differential equations. Now this set of equations may have many unknowns and many equations (infinite equations in the most general case as we can construct a moment with each natural number). The essence of moment closure approximation is neglecting higher order moments and limiting ourselves to n moments and n equations, thus obtaining an n-th degree approximation. In our studies, we designed many experiments using computer simulations which validated the accuracy of the second order moment closure approximation in many processes where without this approximation a closed form for the dynamics of the parameter distribution is not found [3].

### **Example: Moran process in game theory**

Moran process is a model widely used in game theory [4] and evolution theory, which assumes that at each generation an individual from one species is born and an individual from another species dies. Thus, the entire number of individuals remains the same. For the case of 2 species, we may denote the number of individuals from the first species by i and the number of all individuals by N. At each iteration, we may denote by F(q) the probability of an individual from the first species being born and by B(q) the probability of an individual from the first species dying, where  $q=i/N$ . The general form of the iterative equations for moments will be

$$\sum_i P_i(n+1) \left(\frac{i}{N}\right)^\alpha = \sum_i P_i(n) \left[ q^\alpha (1 - F(q) - B(q)) + F(q) \left(q + \frac{1}{N}\right)^\alpha + B(q) \left(q - \frac{1}{N}\right)^\alpha \right]$$

Here by n we denote the timeframe and the calculations are done for the n-th step of the iterations. The equations for the dynamics of the mean Q and the variance V of q can be directly derived from this.

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= Q + \frac{(F(Q) - B(Q))}{N} + (F''(Q) - B''(Q)) \frac{V}{2N} \\
Q_{2,n+1} &= Q_{2,n} + F(Q) \left( \frac{2Q}{N} + \frac{1}{N^2} \right) + B(Q) \left( -\frac{2Q}{N} + \frac{1}{N^2} \right) + (F''(Q) + B''(Q)) \frac{V}{2N^2} + \\
&\quad + \left( 2(F'(Q) - B'(Q)) + Q(F''(Q) - B''(Q)) \right) \frac{V}{N}
\end{aligned}$$

Here  $Q_n = \langle q \rangle_{P(q,n)}$  and  $Q_{2,n} = \langle q^2 \rangle_{P(q,n)}$ . These equations have been validated with the help of computer simulations. (Check [1] for more details and the derivations of these equations).

## Conclusion

Moment closure approximation provides a systematic way to handle the complexity of stochastic systems by simplifying infinite-dimensional equations. It is especially useful in finite population models where traditional deterministic methods fail to capture stochasticity. The Moran process example demonstrates the practical applications and accuracy of this method, while it has also been tried in validated by us in other processes such as the Wright-Fisher mode and the windy gridworld model.

## REFERENCES

1. *Vardanyan E. and Saakian D.* The analytical dynamics of the finite population evolution games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 553:124233, 2020.
2. *Vardanyan E., Koonin E. and David B. Saakian.* Analysis of finite population evolution models using a moment closure approximation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 90:014801, 2021.
3. *Schnoerr D. Sanguinetti G., and Grima R.* Validity conditions for moment closure approximations in stochastic chemical kinetics. *The Journal of chemical physics*, 141(8), 2014.
4. *Maynard J. Smith and Price G.* *Nature London*, 246, 15. 1973.

# ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ МОМЕНТОВ В МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ. ОБЩИЙ ОБЗОР

*Э.А. Варданян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет*

## АННОТАЦИЯ

Приближение закрытия моментов – это математический инструмент, используемый для упрощения анализа стохастических процессов, моделируемых с помощью марковских систем. В этой статье представлен краткий обзор подхода приближения закрытия моментов, перечислены типы процессов, где он был успешно применен, и продемонстрирована его полезность на примере процесса Морана в теории эволюционных игр. Наши результаты подчеркивают эффективность метода при работе с моделями конечных популяций и стохастической химической кинетикой.

**Ключевые слова:** приближение закрытия моментов, стохастический процесс, марковские процессы, теория игр.

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Г.В. Демиденко*

*Новосибирский государственный университет  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
demidenk@math.nsc.ru*

## АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача Коши для класса строго псевдогиперболических уравнений. Сформулированы условия однозначной разрешимости задачи Коши в соболевских пространствах с различными весами, указаны оценки решений. Выделены случаи безусловной разрешимости.

**Ключевые слова:** уравнения соболевского типа, псевдогиперболические уравнения, задача Коши, энергетические оценки.

## Введение

В монографии [1] была введена некоторая классификация линейных уравнений и систем с частными производными следующего вида

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и для них изучен широкий класс краевых задач. Уравнения вида (1) возникают при решении многих задач гидродинамики, физики атмосферы, физики плазмы, теории упругости и др. Такие уравнения часто называют «уравнениями соболевского типа», поскольку именно исследования С.Л. Соболева [2] были первыми глубокими исследованиями дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

В настоящее время имеется огромное число теоретических и прикладных работ по изучению различных задач для классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной (см., например, монографии [3–6] и имеющуюся там библиографию). Большой интерес к уравнениям вида (1) обусловлен необходимостью решения важных прикладных задач, а также естественным стремлением математиков к изучению новых математических объектов. В настоящее время имеется достаточно развитая теория краевых задач для некоторых классов уравнений вида (1). Однако для

класса псевдогиперболических уравнений эта теория только начинает развиваться, в частности, по задаче Коши для уравнений с переменными коэффициентами в случае однородного эллиптического оператора при старшей производной в литературе пока нет ни одного результата.

Следует при этом отметить, что даже в случае постоянных коэффициентов для задачи Коши для псевдогиперболических уравнений имеется ряд особенностей, аналогов которых нет для классических уравнений (см., например, [7, 8]). А именно, как показано в [1, гл. 2], для разрешимости задачи Коши в соболевских пространствах  $W_2^m((0, T) \times \mathbb{R}^n)$  правая часть  $f(t, x)$  уравнения должна иметь дополнительную гладкость и в зависимости от порядков дифференциальных операторов и размерности  $n$  должна быть ортогональна некоторым мономам  $x^\beta$  (см. также [9–12]).

### Постановка задачи и некоторые результаты

В данной работе мы продолжаем изучение задачи Коши для псевдогиперболических уравнений:

$$\begin{cases} L(D_t, D_x)u = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k=0, \dots, l-1. \end{cases} \quad (2)$$

При решении этой задачи будут использованы классы соболевских пространств со специальными весами. В этих пространствах удастся выделить достаточно широкий класс уравнений, для которых можно установить условия однозначной разрешимости.

Напомним определение псевдогиперболических операторов [1]:

$$L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k. \quad (3)$$

*Условие 1.* Предположим, что символ  $L(i\eta, i\xi)$  оператора (3) однороден относительно некоторого вектора  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\frac{1}{\alpha_j} \in \mathbb{N}$ ,  $j=1, \dots, n$ .

*Условие 2.* Оператор  $L_0(D_x)$  является квазиэллиптическим.

*Условие 3.* Уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)} (i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (4)$$

имеет только вещественные корни  $\eta_1(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$ .

**Определение.** Дифференциальный оператор (3) называется *псевдогиперболическим*, если выполнены условия 1–3. Если корни уравнения (4) яв-

ляются различными, то оператор  $L(D_t, D_x)$  будем называть *строго псевдогиперболическим*.

В дальнейшем мы будем исследовать разрешимость задачи Коши (2) в более широкой шкале весовых соболевских пространств:

$$W_{2,\gamma,\aleph,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad r = \frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}, \quad \gamma > 0, \quad \aleph = 1 - l\alpha_0, \quad \sigma \in [0,1]$$

По определению  $u(t,x) \in W_{2,\gamma,\aleph,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , если  $u(t,x) \in L_{loc}(\mathbb{R}_+^{n+1})$  имеет обобщенные производные  $D_t^{\beta_0} D_x^\beta u(t,x)$  при  $\frac{\beta_0}{l} + \beta\alpha \leq 1$  такие, что

$$e^{-\gamma t} D_t^{\beta_0} D_x^\beta u(t,x) \in L_2(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad \aleph \leq \beta\alpha \leq 1,$$

$$(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(\aleph - \beta\alpha)} e^{-\gamma t} D_t^{\beta_0} D_x^\beta u(t,x) \in L_2(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad 0 \leq \beta\alpha \leq \aleph.$$

Норма определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \|u(t,x), W_{2,\gamma,\aleph,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| &= \sum_{\substack{\frac{\beta_0}{l} + \beta\alpha \leq 1, \\ \aleph \leq \beta\alpha \leq 1}} \|D_t^{\beta_0} D_x^\beta u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \\ &+ \sum_{\substack{\frac{\beta_0}{l} + \beta\alpha \leq 1, \\ 0 \leq \beta\alpha \leq \aleph}} \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(\aleph - \beta\alpha)} D_t^{\beta_0} D_x^\beta u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\|. \end{aligned}$$

Обозначим символом  $L_{2,\gamma,q}(\mathbb{R}_+^{n+1})$  весовое пространство суммируемых функций с нормой:

$$\|v(t,x), L_{2,\gamma,q}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| = \|(1 + \langle x \rangle)^{-q} e^{-\gamma t} v(t,x), L_2(\mathbb{R}_+^{n+1})\|.$$

Решение задачи Коши (2) для строго псевдогиперболических уравнений будем искать в пространствах  $W_{2,\gamma,\aleph,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , предполагая, что

$$D_t^l D_x^\beta u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad \beta\alpha = \aleph, \quad \aleph = 1 - l\alpha_0.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть

$$\frac{|\alpha|}{2} > \sigma\aleph, \quad \frac{|\alpha|}{2} > (1 - \sigma)\aleph, \quad \aleph = 1 - l\alpha_0$$

и

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap L_{2,\gamma,(\sigma-1)\aleph}(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad s = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right), \quad \gamma > 0, \quad \sigma \in [0,1]$$

Тогда задача Коши (2) однозначно разрешима в  $W_{2,\gamma,\kappa,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ , и для решения имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u(t,x), W_{2,\gamma,\kappa,\sigma}^{l,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| &= \sum_{\beta\alpha=\kappa} \|D_t^l D_x^\beta u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \\ &\leq c \|f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,s}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| + \|f(t,x), L_{2,\gamma,(\sigma-1)\kappa}(\mathbb{R}_+^{n+1})\| \end{aligned}$$

с константой  $c>0$ , не зависящей от  $f(t,x)$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24–21–00370.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: «Научная книга», 1998.
2. Соболев С.Л. Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» изд-ва СО РАН. Т. I, 2003. Т. II, 2006.
3. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York, Basel, Hong Kong: “Marcel Dekker”, 1999.
4. Свешиников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: «Физматлит», 2007.
5. Sviridyuk G., Fedorov V. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht, Boston, Koln: “VSP”, 2003.
6. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
7. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: «Наука», 1984.
8. Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: «Наука», 1986.
9. Demidenko G. The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // “Selcuk Journal of Applied Mathematics”, 2001. V. 1, № 1. PP. 47–62.
10. Fedotov I., Volevich L. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // “Russian J. Math. Physics.”, 2006. V. 13, № 3. PP. 278–292.
11. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // «Сиб. мат. журн.», 2015. Т. 56, № 6. СС. 1289–1303.
12. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах. «Сиб. мат. журн.», 2023. Т. 64, № 5. СС. 895–911.

# THE CAUCHY PROBLEM FOR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

*G. Demidenko*

*Novosibirsk State University  
S.L. Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS*

## ABSTRACT

The Cauchy problem is considered for a class of strictly pseudohyperbolic equations. Conditions for the unique solvability of the Cauchy problem in Sobolev spaces with various weights are formulated, and estimates of the solutions are provided. Cases of unconditional solvability are identified.

**Keywords:** Sobolev-type equations, pseudohyperbolic equations, Cauchy problem, energy estimates.

# ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

*Ма Сянь*

*Новосибирский государственный университет  
s.ma2@g.nsu.ru*

## АННОТАЦИЯ

Рассматривается первая краевая задача в цилиндрической области для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной. Исследуемое уравнение является строго псевдогиперболическим с постоянными коэффициентами. Доказаны существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи в анизотропном соболевском пространстве, получены оценки решения.

**Ключевые слова:** псевдогиперболические уравнения, краевые задачи, обобщенные решения.

## Введение

Рассмотрим первую краевую задачу в цилиндре:

$$Q_T = \{(t,x) \in R_+^{n+1} : t \in (0,T), x \in G \in R^n\}$$

для уравнения, не разрешенного относительно старшей производной:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0 I + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2) D_t^2 u + (b_0 I + b_1 \Delta + b_2 \Delta^2) D_t u \\ \quad + (d_0 I + d_1 \Delta + d_2 \Delta^2 + d_3 \Delta^3) u = f(t,x), \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ u|_s = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_s = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_s = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$ ,  $a_2b_0 \geq 0$ ,  $a_2b_1 \leq 0$ ,  $a_2b_2 \geq 0$ ,  $a_2d_0 \geq 0$ ,  $a_2d_1 \leq 0$ ,  $a_2d_2 \geq 0$ ,  $a_2d_3 < 0$ . Здесь  $G$  – ограниченная область с гладкой границей  $\partial G$ ,  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial G$ ,

$$S = \{(t,x) \in \overline{Q_T} : t \in (0,T), x \in \partial G\}.$$

Уравнение (1) при  $a_2d_3 < 0$  относится к классу строго псевдогиперболических уравнений. Этот класс уравнений был введен в монографии [1].

Рассматриваемое уравнение в одномерном случае есть линеаризованная модель обобщенного уравнения Буссинеска (см. [2]), которое описывает распространение поверхностных волн в воде. Задача Коши для нелинейных обобщенных уравнений Буссинеска изучалась в [3–5].

Наша цель – доказательство существования и единственности обобщенного решения первой краевой задачи в цилиндре для уравнения (1), получение оценок решения.

Отметим, что в литературе уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, часто называют «уравнениями типа Соболева», поскольку систематические исследования таких уравнений начались с работ С.Л. Соболева по задаче о малых колебаниях вращающейся жидкости [6].

### Обобщенное решение краевой задачи

Для определенности будем считать, что  $a_2 > 0$ , тогда  $a_0 < 0$ ,  $b_0 \geq 0$ ,  $b_1 \leq 0$ ,  $b_2 \geq 0$ ,  $d_0 \geq 0$ ,  $d_1 \leq 0$ ,  $d_2 \geq 0$ ,  $d_3 < 0$ . Поскольку по условию  $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$ , то уравнение перепишем в виде:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a_0}I + \sqrt{a_2}\Delta)^2 D_t^2 u + (a_1 - 2\sqrt{a_0a_2})\Delta D_t^2 u + (b_0I + b_1\Delta + b_2\Delta^2)D_t u + \\ & + (d_0I + d_1\Delta + d_2\Delta^2 + d_3\Delta^3)u = f(t, x). \end{aligned}$$

При определении обобщенного решения краевой задачи мы будем использовать анизотропные соболевские пространства (см., например, [7, 8]).

**Определение 1.** Функция  $u(t, x) \in L_2(Q_T)$  принадлежит анизотропному соболевскому пространству  $W_2^{1,3}(Q_T)$ , если существуют обобщенные производные

$$D_t^\alpha D_x^\beta u(t, x) \in L_2(Q_T), \quad \frac{\alpha}{1} + \frac{\beta}{3} \leq 1,$$

с нормой

$$\|u(t, x), W_2^{1,3}(Q_T)\| = \sum_{\alpha, \beta} \|D_t^\alpha D_x^\beta u(t, x) \in L_2(Q_T)\|.$$

Обозначим

$$W_{2, \text{add}}^{1,3}(Q_T) = \{u(t, x) \in W_2^{1,3}(Q_T) : \exists D_t \Delta u(t, x) \in L_2(Q_T)\}.$$

**Определение 2.** Пусть  $f(t, x) \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_1(x) \in W_2^3(G)$ ,  $\varphi_2(x) \in W_2^2(G)$ . Тогда  $u(t, x) \in W_{2, \text{add}}^{1,3}(Q_T)$  такая, что

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_S = 0, \quad (2)$$

называется обобщенным решением первой краевой задачи (1), если для любой  $v(t,x) \in W_{2,\text{add}}^{1,3}(Q_T)$ , удовлетворяющей условиям

$$v|_{t=0}=0, \quad v|_S=0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_S=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\Big|_S=0, \quad (3)$$

имеет место интегральное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [-(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta)D_t u(\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta)D_t v + (a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2})\nabla D_t u \nabla D_t v + \\ & + b_0 D_t u v - b_1 \nabla D_t u \nabla v + b_2 \Delta D_t u \Delta v + d_0 u v - d_1 \nabla u \nabla v + d_2 \Delta u \Delta v - d_3 \nabla \Delta u \nabla \Delta v] d\bar{x} \\ & = \int_{Q_T} f v d\bar{x} + \int_G (\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta)\varphi_2(x) (\sqrt{a_0}I+\sqrt{a_2}\Delta)v(0,x) dx - \\ & \quad (a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}) \int_G \nabla \varphi_2(x) \nabla v(0,x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что классическое решение краевой задачи (1)  $u(t,x) \in C^{2,6}(Q_T)$  такое, что  $D_t^k D_x^m u(t,x) \in L_2(Q_T)$  является обобщенным.

## Основные результаты

**Теорема 1.** Краевая задача (1) не может иметь более одного обобщенного решения.

**Теорема 2.** Пусть  $f(t,x) \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_1(x) \in W_2^3(G)$ ,  $\varphi_2(x) \in W_2^2(G)$ . Тогда краевая задача (1) имеет единственное обобщенное решение  $u(t,x)$  из  $W_{2,\text{add}}^{1,3}(Q_T)$ , при этом

$$\begin{aligned} & \|u(t,x), W_2^{1,3}(Q_T)\| + \|D_t \Delta u(t,x), L_2(Q_T)\|, \\ & \leq C (\|f(t,x), L_2(Q_T)\| + \|\varphi_1(x), W_2^3(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^2(G)\|) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $C > 0$  – константа, не зависящая от  $f(t,x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ .

Доказательство существования обобщенного решения краевой задачи (1) мы проводим методом Галеркина [9].

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: «Научная книга», 1998.
2. Pereira P., Lopes N., Trabuço L. Soliton-type and other travelling wave solutions for an

- improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // “Nonlinear Dyn.”, 2015. V. 82. PP. 783–818.
3. *Умаров. Х.Г.* Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // «Сиб. матем. журн.», 2022. Т. 63, № 3. СС. 672–689.
  4. *Polat N., Piskin E.* Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equation // “Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.”, 2015. V. 31. PP. 735–746.
  5. *Wang S., Xue H.* Global solution for a generalized Boussinesq equation // “Appl. Math. Comput.”, 2008, V. 204, № 1. PP. 130–136.
  6. *Соболев С.Л.* Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003.
  7. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: «Наука», 1975.
  8. *Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: «Наука», 1984.
  9. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: «Наука», 1973.

## GENERALIZED SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION

*Ma Xin*

*Novosibirsk State University*

### ABSTRACT

The first boundary value problem in a cylindrical domain is considered for one equation that is not solved with respect to the highest derivative. The equation under study is strictly pseudohyperbolic with constant coefficients. The existence and uniqueness of a generalized solution to the first boundary value problem in an anisotropic Sobolev space are proved, and estimates for the solution are obtained.

**Keywords:** pseudo-hyperbolic equations, boundary value problems, generalized solutions.

# КРИТЕРИЙ СТРОГО ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОДНОГО КЛАССА МНОГОЧЛЕНОВ

*В.Н. Маргарян, Г.Г. Казарян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет  
vachagan.margaryan@yahoo.com, haikghazaryan@mail.ru*

## АННОТАЦИЯ

В терминах центральных линий и линейных преобразований найден критерий строгой гипоеллиптичности и почти гипоеллиптичности для одного класса многочленов с постоянными коэффициентами.

**Ключевые слова:** строгая гипоеллиптичность, линейное преобразование, элементарная центральная линия.

## Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями:  $N$  – множество натуральных чисел,  $N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N_0^n = N_0 \times \dots \times N_0$  множество  $n$ -мерных мультииндексов,  $R^n$   $n$  – мерное вещественное евклидово пространство точек  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$  и  $C^n := R^n \times iR^n (i^2 = -1)$ . Для  $\xi \in R^n (C^n)$  и  $\alpha \in N_0^n$  обозначим  $\|\xi\| := \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$ ,  $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  и  $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ , где  $D_j := \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  либо  $D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Пусть  $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$  линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а  $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$  его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору  $(P) := \{\alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$ . Для многочлена  $P$  обозначим  $m(P) := \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ ,  $\mathfrak{D}(P) := \{\zeta \in C^n, P(\zeta) = 0\}$  и  $d_P(\xi) := \inf_{\zeta \in \mathfrak{D}(P)} \|\xi - \zeta\|$ ,  $\xi \in R^n$ .

**Определение 1.** (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3) Многочлен  $P(\xi)$  (оператор  $P(D)$ ) называется гипоеллиптическим, если  $d_P(\xi) \rightarrow \infty$  при  $\|\xi\| \rightarrow \infty$ ,  $\xi \in R^n$ .

**Определение 2.** (см. [2]) Гипоэллиптический многочлен называется строго гипоэллиптическим, если  $\exists c > 0$

$$|P(\xi)|^{1/m(P)} \leq c(d_P(\xi) + 1) \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Определение 3.** (см. [3]) Многочлен  $P$  называется почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной  $c > 0$

$$\sum_{\alpha} |P(\xi)^{(\alpha)}| := \sum_{\alpha} |(D^{\alpha}P)(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1) \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Определение 4.** Прямоую проходящий через начало координат назовем центральной линией.

**Определение 5.** Центральную линию  $L$  назовем элементарной для многочлена  $P$ , если  $P(\xi)|_{\xi \in L} = const$ .

Лангебрухом в [2] доказана, что если строго гипоэллиптический оператор  $P(D)$  не является эллиптическим, то функциональная размерность пространства  $E(P) := \{U \in \mathcal{D}', P(D)U = 0\}$ , где  $\mathcal{D}'$  – пространство обобщенных функций, больше  $n$ . В работе [4] усилен результат Лангебруха и доказана, что если не эллиптический оператор  $P(D)$  гипоэллиптичен, то функциональная размерность пространства  $E(P)$  больше  $n$ .

## Основные результаты

**Определение 6.** Скажем, что многочлен  $P$  от  $n$ -переменных существенно зависит от всех переменных, если для любого обратимого отображения  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\prod_{j=1}^n (D_j Q_{T,P})(\xi) \neq 0, \text{ где } Q_{T,P}(\xi) := P(T\xi), \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Для любого  $\delta \in [0,1]$  через  $\mathcal{A}_{\delta}(n)$  обозначим множество тех многочленов от  $n$ -переменных с постоянными коэффициентами для которых с некоторыми постоянными  $c = c(P) > 0$ ,  $M = M(P) > 0$

$$d_P(\xi) \geq c|P(\xi)|^{\delta/m(P)}, \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| \geq M.$$

**Теорема 1.** Для любых  $\delta \in [0,1]$  и  $P \in \mathcal{A}_{\delta}(n)$  многочлен  $P$  почти гипоэллиптичен.

**Теорема 2.** Для любого  $P \in \mathcal{A}_\delta(n)$ ,  $\delta \in (0,1]$  следующие условия эквивалентны а)  $P$ -гипоэллиптически, б)  $P$ -существенно зависит от переменных  $\xi_1 \dots, \xi_n$  и в)  $P$  не имеет элементарной центральной линии.

**Теорема 3.** Если многочлен  $P \in \mathcal{A}_1(n)$  либо существенно зависит от переменных  $\xi_1 \dots, \xi_n$  либо не обладает элементарной центральной линией, то многочлен  $P$  строго гипоэллиптически.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Springer, Tokyo (1983).
2. Langenbruch M. On the functional dimension of solution spaces of hypoelliptic partial differential operators. Math. Ann. 272. PP. 217–229 (1985).  
<https://doi.org/10.1007/BF01450566>.
3. Ghazaryan G. On almost hypoelliptic polynomials. Doklady Ross. Akad. Nauk, vol. 398, № 6 (2004). PP. 701–703.
4. Казарян Г.Г., Маркарян В.Н. Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических операторов // Матем. сб., 181:7 (1990). СС. 910–922.

## CRITERION FOR STRICTLY HYPOELLIPTICITY AND ALMOST HYPOELLIPTICITY OF ONE CLASS OF POLYNOMIALS

*V. Margaryan, G. Kazaryan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

## ABSTRACT

Condition for strictly hypoellipticity and almost hypoellipticity are found for one class of linear differential operators. Conditions are given on terms of elementary central lines of symbols corresponding to these operators and terms of linear transformation.

**Keywords:** strict hypoellipticity, linear transformation, elementary central line.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*И.И. Матвеева*

*Новосибирский государственный университет,  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
i.matveeva@g.nsu.ru*

## АННОТАЦИЯ

Рассматриваются классы неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. С использованием функционалов Ляпунова-Красовского исследуются асимптотические свойства решений этих систем.

**Ключевые слова:** системы с запаздыванием, переменные коэффициенты, функционалы Ляпунова-Красовского, оценки для решений, экспоненциальная устойчивость.

## Введение

Исследованию асимптотических свойств решений уравнений с запаздыванием посвящено очень много работ (см., например, [1–12] и имеющуюся в них библиографию). При получении результатов используются различные подходы; в частности, метод D-разбиений, метод функций Разумихина, метод сравнения, W-метод Азбелева, test-метод, а также предложенный Н.Н. Красовским метод, который основан на использовании функционалов Ляпунова-Красовского. В бóльшей части работ исследуется устойчивость решений уравнений с постоянными коэффициентами.

В неавтономном случае число таких работ существенно меньше. Наличие неавтономности серьезно усложняет проведение исследований. Особенно, если, помимо нахождения условий экспоненциальной устойчивости, ставится вопрос о скорости стабилизации решений на бесконечности. Если же система является нелинейной, то, помимо перечисленных вопросов, необходимо уметь оценивать множество притяжения.

Представленная работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. [13–20]). В указанных работах мы исследовали системы с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Были установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки на множества притяжения. При получении этих результатов использовались введенные нами функционалы Ляпунова-Красовского. В [21, 22] изучались некоторые нелинейные системы с переменными коэффициентами.

### Основное содержание работы

В работе рассматриваются неавтономные системы с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\dot{y}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t D(t, t - s)y(s)ds + F\left(t, y(t), y(t - \tau), \dot{y}(t - \tau), \int_{t-\tau}^t E(t, s)y(s)ds\right), \quad t > 0,$$

где  $A(t), B(t), C(t), D(t, s), E(t, s)$  –  $n \times n$  – матрицы с непрерывными вещественнозначными элементами,  $\tau > 0$  – запаздывание,  $F(t, u_1, \dots, u_4)$  – непрерывная вещественнозначная вектор-функция, определяющая нелинейные члены. Система может содержать два типа запаздываний (сосредоточенное и распределенное), запаздывание может быть постоянным или переменным, причем оно может быть неограниченным. Мы используем достаточно широкий класс функционалов Ляпунова-Красовского, введенный в [19]:

$$\langle H(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix} \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t, t - s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix} \rangle ds,$$

где

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{pmatrix} K_1(t, s) & K_2(t, s) \\ K_2^*(t, s) & K_3(t, s) \end{pmatrix}.$$

Указанные функционалы позволяют получать оценки для решений систем на всей полупрямой. Используя эти оценки, мы можем сделать вывод об устойчивости решений. В работе установлены условия экспоненци-

альной устойчивости, получены оценки для скоростей стабилизации решений на бесконечности и оценки для множеств притяжения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: «Наука», 1971.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: «Мир», 1984.
3. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: «Наукова думка», 1989.
4. Долгий Ю.Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.
5. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.
6. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: “Kluwer Acad. Publ.”, 1999.
7. Азбелев Н.В. Избранные труды. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
8. Michiels W., Niculescu S. Stability, control, and computation for time-delay systems. An eigenvalue-based approach. “Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics”, 2014.
9. Agarwal R., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: “Springer”, 2012.
10. Kharitonov V. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhäuser, “Springer”, 2013.
11. Gil' M. Stability of neutral functional differential equations. Paris: “Atlantis Press”, 2014.
12. Park J., Lee T., Liu Y., Chen J. Dynamic systems with time delays: stability and control. Singapore: “Springer”, 2019.
13. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // «Сиб. мат. журн.», 2007. Т. 48, № 5. СС. 1025–1040.
14. Матвеева И.И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // «Сиб. журн. индустр. матем.», 2013. Т. 16, № 3. СС. 122–132.

15. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // «Сиб. мат. журн.», 2014. Т. 55, № 5. СС. 1059–1077.
16. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // «Сиб. мат. журн.», 2017. Т. 58, № 2. СС. 344–352.
17. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // «Дифференц. урав.», 2017. Т. 53, № 6. СС. 730–740.
18. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // «Сиб. мат. журн.», 2019. Т. 60, № 5. СС. 1063–1079.
19. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем., 2019. Т. 22, № 3. СС. 96–103.
20. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // «Журн. вычисл. матем. мат. физ.», 2020. Т. 60, № 4. СС. 612–620.
21. *Матвеева И.И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // «Сиб. мат. журн.», 2021. Т. 62, № 3. СС. 579–594.
22. *Matveeva I.* Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // «Сиб. электрон. матем. изв.», 2021. Т. 18, № 2. СС. 1689–1697.

## ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF NONLINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEMS WITH DELAY

*I. Matveeva*

*Novosibirsk State University,  
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*

### ABSTRACT

Classes of nonautonomous systems of differential equations with delay are considered. Using Lyapunov-Krasovskiy functionals, the asymptotic properties of solutions of these systems are investigated.

**Keywords:** systems with delay, variable coefficients, Lyapunov-Krasovskiy functionals, estimates for solutions, exponential stability.

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Г.Г. Тоноян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет  
jolisourire@yandex.ru*

## АННОТАЦИЯ

В работе доказываются существование и бесконечная дифференцируемость решения задачи Коши, с гладкими начальными условиями, для одного класса почти гипоеллиптических уравнений с  $P \notin I_2$ .

**Ключевые слова:** задача Коши, почти гипоеллиптический оператор.

## Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями:  $N$  – множество натуральных чисел,  $N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N_0^n$  – множество  $n$ -мерных мультииндексов,  $R^n (E^n)$  –  $n$ -мерное вещественное эвклидово пространство точек  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ). Для  $\xi \in R^n$  и  $\alpha \in N_0^n$  обозначим  $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ ,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ , где  $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$  либо  $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $I_2$  – множество многочленов  $P$  двух переменных, для которых  $P(\xi) \rightarrow +\infty$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$  линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а  $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$  его полный символ, где сумма распространяется по некоторому конечному набору  $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$ ,  $ord P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ ,  $ord_j P \equiv \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Многие свойства дифференциального уравнения  $P(D)u = 0$  в частных производных определяются поведением на бесконечности характеристического многочлена (символа)  $P(\xi)$ , соответствующего этому уравнению. В середине прошлого века Л. Хёрмандер в работе [1] ввел понятие гипоеллиптического уравнения, все решения которого бесконечно дифференцируемы.

**Определение 1.** (см. [1] ) Оператор  $P$  является гипоеллиптическим, если для любого  $\alpha \in N_0^n$  и  $\alpha \neq 0$   $|D^\alpha P(\xi)|/|P(\xi)| \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Одной из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) является задача Коши. Она состоит в отыскании решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (см. [2]).

Г.Г. Казаряном в работе [4] введено понятие почти гипоеллиптического многочлена.

**Определение 2.** (см. [4]–[5]) Оператор  $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$  называется почти гипоеллиптическим, если существует постоянная  $C > 0$  такая, что

$$\sum_{\alpha \in N_0^n} |D^{\alpha} P(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n.$$

В работе [4] найдены необходимые условия почти гипоеллиптичности в терминах нулей и их кратностей, а также достаточные условия почти гипоеллиптичности многочлена  $P$  в терминах порядков однородности и кратностей нулей подмножеств  $P$ .

В работе [5] доказано, что если  $P(\xi) \rightarrow \infty$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , то многочлен  $P$  является почти гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда для некоторого  $\delta > 0$

$$\{u: ue^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), P(D)u = 0\} \subset \{u: (D^{\alpha}u)e^{-\delta|x|} \in L_2(E^n), \forall \alpha \in N_0^n\}.$$

Г.Г. Казаряном и В.Н. Маргаряном в работе [6] выделено множество бесконечно дифференцируемых решений одного класса двумерных почти гипоеллиптических уравнений в бесконечной полосе.

В работе [7] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** I) Пусть  $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) \notin I_2$  почти гипоеллиптический многочлен порядка  $m$ , для которого  $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$ , то есть  $ord_1 P \geq 1$  и  $ord_2 P \geq 1$ . Тогда существуют числа  $a, b \in R$ ,  $a \cdot b \neq 0$ , и многочлен  $Q$  одной переменной порядка  $m$  такие, что

$$P(\xi_1, \xi_2) = Q(a\xi_1 - b\xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in R^2. \quad (1)$$

II) Для любых  $a, b \in R$ ,  $a \cdot b \neq 0$ , и многочлена  $Q$  одной переменной порядка  $m \geq 1$  многочлен  $P(\xi_1, \xi_2)$ , определенный по формуле (1), является почти гипоеллиптическим многочленом  $P \notin I_2$  и  $D_1 P \cdot D_2 P \neq 0$ .

Пусть  $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$  почти гипоеллиптичен и  $P \notin I_2$ . Тогда в силу теоремы 1  $P$  можно представить в виде (1). Следовательно, не умаляя общности, оператор  $P(D)$  можно представить в виде:

$$P(D_1, D_2)u = \sum_{j=0}^m A_j \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^j u.$$

Цель работы – выяснить вопрос бесконечной дифференцируемости классического решения задачи Коши для одного класса почти гипоеллиптических операторов  $P(D) = P(D_1, D_2)$ , когда  $P(i\xi_1, i\xi_2) \notin I_2$ .

## Предварительные результаты

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} P(D_1, D_2)u = \sum_{j=0}^m A_j \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^j u = 0 \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, y) = f_j(y), j = 0, \dots, m-1 \end{cases}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай, когда корни характеристического многочлена попарно различны. Докажем, что классическое решение задачи (2) является бесконечно дифференцируемой функцией, если таковыми являются функции  $f_j, j = 0, \dots, m-1$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\lambda_j, j = 0, \dots, k$  ( $k \in N_0$ ), попарно различные числа. Тогда для любых функций  $g_j$  (от одной переменной),  $j = 0, \dots, k$ , существуют функции  $a_j, j = 0, \dots, k$ , такие, что

$$g_l(\tau) = \sum_{j=0}^k \lambda_j^l a_j(\tau) e^{-\lambda_j \tau}, l = 0, \dots, k.$$

При этом если  $g_l \in C^r(E^1), l = 0, \dots, k$ , для некоторого  $r \in N_0$ , то  $a_l \in C^r(E^1), l = 0, \dots, k$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda_j, j = 0, \dots, k$  ( $k \in N_0$ ), попарно различные числа и  $f_j \in C^\infty(E^1), j = 0, \dots, k$ . Тогда существуют  $a_j \in C^\infty(E^1), j = 0, \dots, k$ , такие, что

$$f_r(\tau) = \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^r c_r^l a_j^{(l)}(\tau) e^{-\lambda_j \tau} \lambda_j^{r-l}, r = 0, \dots, k,$$

где  $c_r^l$  – биномиальные коэффициенты и

$$a_j^{(l)}(\tau) = \frac{\partial^l}{\partial \tau^l} a_j(\tau).$$

## Основной результат

**Теорема.** Пусть  $\alpha_j, j = 0, \dots, m - 1$ , корни многочлена  $Q(t) = \sum_{j=0}^m A_j t^j$  попарно различны и  $f_j \in C^\infty(E^1), j = 0, \dots, m - 1$ . Тогда функция

$$u(x, y) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x+y)e^{\alpha_j \frac{x-y}{2}} \in C^\infty(E^2)$$

является решением задачи Коши (2), где функции  $a_j, j = 0, \dots, m - 1$ , по  $f_j$  и  $\lambda_j = \alpha_j/2, j = 0, \dots, m - 1$ , определяются по лемме 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: «Мир», 1986.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во «Наука», 1974.
3. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Об одном классе гипоэллиптических полиномов // «Математический сблони́к». Т. 75 (117), № 3, 1968. СС. 400–416.
4. Ghazaryan H. On Almost – Hypoelliptic Polynomials // «Доклады Российской академии наук», 398, № 6, 2004. PP. 701–703.
5. Казарян Г.Г., Маргарян В.Н. Об одном классе почти гипоэллиптических операторов // «Известия НАН Арм». Т. 41, № 6, 2006. СС. 39–56.
6. Казарян Г.Г., Маргарян В.Н. О гладкости решений одного класса почти гипоэллиптических уравнений // «Известия НАН Армении. Математика». Т. 43, № 3, 2008. СС. 39–64.
7. Маргарян В.Н., Тоноян Г.Г. Об одном классе почти гипоэллиптических многочленов // «Известия НАН Армении». Т. 46, № 1, 2011. СС. 49–70.

## ON CAUCHY'S PROBLEM FOR A CLASS OF ALMOST HYPOELLIPTIC EQUATIONS

*G. Tonoyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

## ABSTRACT

The following Cauchy's problem for a class of almost hypoelliptic equations:

$$\begin{cases} P(D_1, D_2)u = \sum_{j=0}^m A_j \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^j u = 0 \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, y) = f_j(y), j = 0, \dots, m-1 \end{cases},$$

where  $f_j(y), j = 0, \dots, m-1$ , are infinite differentiable functions, is considered.

The existence and infinite differentiability of the solution of Cauchy's problem with the smooth initial conditions are proved for a class of almost hypoelliptic equations with  $P \notin I_2$ .

**Keywords:** Cauchy's problem, almost hypoelliptic operator.

# О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

*А.Г. Туманян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет*

*Siemens Industry Software*

*ani.tumanyan92@gmail.com*

## АННОТАЦИЯ

В работе изучены фредгольмовость и спектральные свойства некоторых классов гипоеллиптических операторов в мультианизотропных соболевских пространствах. Получены специальные априорные оценки для регулярных гипоеллиптических операторов, а также установлен критерий фредгольмовости для двух классов регулярных гипоеллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами в весовых мультианизотропных пространствах Соболева. В работе исследованы также спектральные свойства рассматриваемых операторов.

**Ключевые слова:** регулярный гипоеллиптический оператор, фредгольмовость, спектр оператора, мультианизотропные соболевские пространства.

В данной работе исследуются фредгольмовость и спектральные свойства для класса регулярных гипоеллиптических операторов. Класс регулярных гипоеллиптических операторов является специальным подклассом гипоеллиптических операторов по Хермандеру (см. [1]) и естественным образом обобщает класс эллиптических, параболических,  $2b$ -параболических и квазиэллиптических/полуэллиптических операторов. Такие операторы были изучены многими авторами, такими как С.М. Никольский, В.П. Михайлов, Дж. Фриберг, Л.Р. Волевич, С.Г. Гиндикин, Г.Г. Казарян и другие.

Свойства фредгольмовости и нормальная разрешимость исследованы для некоторых классов гипоеллиптических операторов в различных функциональных пространствах, но большинство результатов относятся к эллиптическим и квазиэллиптическим операторам (см. [2–4]). Для квазиэл-

липтических операторов условия фредгольмовости получены в работах [5–6], а априорные оценки и фредгольмовость некоторых классов гипоэллиптических операторов исследованы в работах [7–10].

В настоящей работе получены априорные оценки для двух различных классов регулярных гипоэллиптических операторов с переменными коэффициентами, действующих в специальных весовых шкалах пространств Соболева. Установлены критерии Фредгольма для рассматриваемых операторов на мультианизотропных шкалах  $H_q^{k+1, \mathcal{R}, p}$  и анизотропных шкалах  $H_q^{k+1, \nu, p}$  с соответствующими весовыми функциями  $q$ . Также изучены свойства гладкости решений, инвариантность индекса и спектральные свойства этих операторов.

**Определение 1.** Ограниченный линейный оператор  $A$ , определенный на всем банаховом пространстве  $X$  и действующий в Банахово пространство  $Y$ , называется «фредгольмовым», если выполняются следующие условия:

- 1) область значений оператора  $A$  замкнута ( $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$ );
- 2) ядро оператора  $A$  является конечномерным ( $\dim \text{Ker}(A) < \infty$ );
- 3) коядро оператора  $A$  конечномерно ( $\dim \text{coker}(A) = \dim Y / \text{Im}(A) < \infty$ ).

Индексом фредгольмова оператора  $A$  называется разность между размерностью ядра и коядра:

$$\text{ind}(A) = \dim \text{Ker}(A) - \dim \text{coker}(A).$$

**Определение 2.** Для замкнутого оператора  $A$  с плотной областью определения в Банаховом пространстве  $X$  существенным спектром называется множество  $\sigma_{\text{es}}(A)$  комплексных чисел  $\lambda$ , таких что оператор  $A - \lambda I$  не является фредгольмовым.

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}_+^n$  – множество  $n$ -мерных мультииндексов,  $\mathbb{N}^n$  – множество  $n$ -мерных мультииндексов с натуральными компонентами. Пусть  $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+^n$  – некоторый набор мультииндексов. «Характеристическим многогранником» множества мультииндексов  $\mathcal{N}$  назовем наименьший выпуклый многогранник  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N})$ , который содержит все точки  $\mathcal{N}$ .

**Определение 3.** Многогранник  $\mathcal{R}$  назовем «вполне правильным», если 1) он имеет вершины в начале координат  $\mathbb{R}^n$  и на каждой оси координат

$\mathbb{R}^n$ , отличные от начала координат; 2) внешние нормали всех  $(n - 1)$ -мерных некоординатных граней  $\mathcal{R}$  имеют положительные координаты.

Мультииндекс  $\alpha \in \mathcal{R}$  назовем главным, если он принадлежит какой-либо  $(n - 1)$ -мерной некоординатной грани многогранника  $\mathcal{R}$ . Множество всех главных точек из  $\mathcal{R}$  обозначим через  $\partial'\mathcal{R}$ . Пусть  $\mathcal{R}$  – произвольный вполне правильный многогранник и  $k \in \mathbb{R}_+$ . Обозначим  $k\mathcal{R} = \{k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \dots, k\alpha_n), \alpha \in \mathcal{R}\}$ . Обозначим через  $\mathcal{R}_j^{n-1} (j = 1, \dots, I_{n-1})$   $(n - 1)$ -мерные грани многогранника  $\mathcal{R}$ . Пусть  $\mu^j, j = 1, \dots, I_{n-1}$  – такая внешняя нормаль грани  $\mathcal{R}_j^{n-1}$ , для которой при всех  $\alpha \in \mathcal{R}_j^{n-1} (\alpha: \mu^j) = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 1$ .

Рассмотрим дифференциальный оператор:

$$P(x, D) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \left( a_\alpha^0(x) q(x)^{1 - \max(\alpha: \mu^j)} + a_\alpha^1(x) \right) D^\alpha, \quad (1)$$

где  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ,  $D_k = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$a_\alpha^0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $D^\beta (a_\alpha^1(x)) = o\left(q(x)^{1 - \max(\alpha - \beta: \mu^j)}\right)$ ,  $j = 1, \dots, I_{n-1}$ ,  $\beta \in k\mathcal{R}$ ,

$\alpha \in \mathcal{R}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Будем рассматривать также специальный случай, когда многогранник  $\mathcal{R}$  имеет только одну некоординатную грань с внешней нормалью  $\nu \in \mathbb{N}^n$ . Тогда дифференциальный оператор представляется в виде:

$$P(x, D) = \sum_{(\alpha: \nu) \leq 1} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{(\alpha: \nu) \leq 1} \left( a_\alpha^0(x) q(x)^{1 - (\alpha: \nu)} + a_\alpha^1(x) \right) D^\alpha. \quad (2)$$

**Определение 4.** Дифференциальный оператор  $P(x, D)$  назовем «равномерно регулярным» в  $\mathbb{R}^n$ , если существует такая постоянная  $\delta > 0$ , что имеет место оценка:

$$|\sum_{\alpha \in \partial'\mathcal{R}} a_\alpha(x) \xi^\alpha| \geq \delta \sum_{\alpha \in \partial'\mathcal{R}} |\xi^\alpha|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим  $Q = \{q \in C(\mathbb{R}^n): q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ .

Для вполне правильного многогранника  $\mathcal{R}$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  обозначим:

$$Q^{k, \mathcal{R}} = \left\{ q: q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{q(x)} \Rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \exists C_\beta > 0 \text{ такое, что } \frac{|D^\beta q(x)|}{q(x)^{1 + (\beta: \mu^j)}} \leq C_\beta, \right. \\ \left. \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \beta \in k\mathcal{R}, j = 1, \dots, I_{n-1} \right\}.$$

Для  $v \in \mathbb{N}^n$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  обозначим:

$$\tilde{Q}^{k,v} = \left\{ q: \exists C > 0 \text{ такое, что } 0 < q(x) \leq C, \exists C_\beta > 0 \text{ такое, что } \frac{|D^\beta q(x)|}{q(x)^{1+(\beta:v)}} \leq C_\beta, \right. \\ \left. \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \beta, (\beta:v) \leq k \right\}.$$

Для  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $1 < p < \infty$  и  $q \in Q$  через  $H^{k,\mathcal{R},p}$  и  $H_q^{k,\mathcal{R},p}$  обозначим:

$$H^{k,\mathcal{R},p} := \left\{ u: \|u\|_{k,\mathcal{R},p} = \sum_{\alpha \in k\mathcal{R}} \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

$$H_q^{k,\mathcal{R},p} := \left\{ u: \|u\|_{k,\mathcal{R},q,p} = \sum_{\alpha \in k\mathcal{R}} \|D^\alpha u \cdot q^{\frac{k-\max(\alpha:\mu^j)}{j}}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

В дальнейшем для анизотропного случая будем использовать  $H^{k,v,p}$  и  $H_q^{k,v,p}$  обозначения для соответствующих пространств.

Для  $M > 0$  обозначим  $K_M := \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq M\}$ .

В работе получены априорные оценки для двух рассматриваемых классов операторов.

**Теорема 1.** Пусть  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $q \in Q^{k,\mathcal{R}}$  и  $P(x, D)$  дифференциальный оператор вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \max_{|x-y| \leq 1} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ . Пусть дифференциальный оператор  $P(x, D)$  является равномерно регулярным в  $\mathbb{R}^n$ , и существуют постоянные  $\delta > 0$  и  $M > 0$  – такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha \right| \geq \delta \left( \sum_{\alpha \in \partial' \mathcal{R}} |\xi^\alpha| + 1 \right), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| \geq M.$$

Тогда с некоторыми постоянными  $C > 0$  и  $N > 0$  выполняется априорная оценка:

$$\|u\|_{k+1,\mathcal{R},q} \leq C \left( \|Pu\|_{k,\mathcal{R},q} + \|u\|_{L_p(K_N)} \right), \forall u \in H_p^{k+1,\mathcal{R},q}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $q \in \tilde{Q}^{k,v}$  и  $P(x, D)$  дифференциальный оператор вида (2), коэффициенты которого удовлетворяют условию  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \max_{|x-y| \leq 1} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ . Пусть дифференциальный оператор  $P(x, D)$  является равномерно регулярным в  $\mathbb{R}^n$ , и существуют постоянные  $\delta > 0$  и  $M > 0$  – такие, что

$$\left| \sum_{(\alpha: \nu) \leq 1} a_{\alpha}^0(x) \xi^{\alpha} \right| \geq \delta \left( \sum_{(\alpha: \nu)=1} |\xi^{\alpha}| + 1 \right), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| \geq M.$$

Тогда с некоторыми постоянными  $C > 0$  и  $N > 0$  выполняется априорная оценка:

$$\|u\|_{k+1, \nu, q} \leq C \left( \|Pu\|_{k, \nu, q} + \|u\|_{L_p(K_N)} \right), \forall u \in H_p^{k+1, \nu, q}.$$

Из априорной оценки получены свойства повышения гладкости решений.

**Следствие 1.** Пусть для дифференциального оператора  $P(x, D)$  выполнены условия Теоремы 2. Тогда из того, что  $u \in H_q^{k, \nu, p}$ ,  $P(x, D)u \in H_q^{k, \nu, p}$  следует, что  $u \in H_q^{k+1, \nu, p}$ .

Используя теоремы 1 и 2, следствие 1 и специальное построение регуляризатора, в работе получена следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $q \in Q^{k, \mathcal{R}}$  и  $P(x, D)$  – дифференциальный оператор вида (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \max_{|x-y| \leq 1} |a_{\alpha}^0(x) - a_{\alpha}^0(y)| = 0$ .

Тогда оператор  $P(x, D): H_q^{k+1, \mathcal{R}, p} \rightarrow H_q^{k, \mathcal{R}, p}$  является фредгольмовым тогда и только тогда, когда  $P(x, D)$  – равномерно регулярный в  $\mathbb{R}^n$ , и существуют постоянные  $\delta > 0$  и  $M > 0$  – такие, что

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} a_{\alpha}^0(x) \xi^{\alpha} \right| \geq \delta \left( \sum_{\alpha \in \partial' \mathcal{R}} |\xi^{\alpha}| + 1 \right), \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| \geq M.$$

При этом, если условия теоремы выполняются, то размерности ядра, коядра и индекс оператора  $P(x, D): H_q^{k+1, \mathcal{R}, p} \rightarrow H_q^{k, \mathcal{R}, p}$  не зависят от выбора  $k$  и  $p$ .

Аналогичный результат установлен и в анизотропном случае для весовых функций из класса  $\tilde{Q}^{k, \nu}$ . Полученные необходимые и достаточные условия фредгольмовости во многом схожи для двух рассматриваемых классов операторов, однако их спектральные свойства существенно различаются.

**Следствие 2.** Пусть  $p = 2$ , и для дифференциального оператора  $P(x, D)$  выполнены условия Теоремы 3. Тогда для спектра оператора

$P(x, D): H_q^{k+1, \mathcal{R}, 2} \rightarrow H_q^{k, \mathcal{R}, 2}$  рассматриваемого как неограниченного оператора в  $L_2$ , справедливо одно из следующих утверждений:

- $\sigma(P) = \mathbb{C}$ ;
- $\sigma(P)$  дискретен, и индекс оператора равен нулю.

**Следствие 3.** Пусть для дифференциального оператора  $P(x, D)$  выполнены условия Теоремы 2, и существуют постоянные  $\tilde{a}_\alpha$  – такие, что  $a_\alpha^0(x) \rightrightarrows \tilde{a}_\alpha$  при  $|x| \rightarrow \infty$  для всех  $(\alpha: \nu) \leq 1$ . Тогда существенный спектр оператора описывается следующим образом:

$$\sigma_{es}(P) = \left\{ \sum_{(\alpha: \nu) \leq 1} a_\alpha^0(x) \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hyormander L.* Linear Partial Differential Operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969.
2. *Багиров Л.А.* Эллиптические уравнения в неограниченной области. Матем. сборник, 86:128 (1971). PP. 121–139.
3. *Lockhart R., McOwen R.* On elliptic systems in Acta Math. 150, 1983. PP. 125–135.
4. *Demidenko G.* On quasielliptic operators in  $\mathbb{R}^n$ // “Siberian Mathematical Journal”, 39: 5, (1998). PP. 1028–1037.
5. *Darbinyan A., Tumanyan A.* On a priori estimates and the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces // “Journal of Contemporary Mathematical Analysis”, 53: 2, 2018. PP. 61–70.
6. *Tumanyan A.* Fredholm property of semielliptic operators in anisotropic weighted spaces in  $\mathbb{R}^n$  // “Journal of Contemporary Mathematical Analysis”, 56:3, 2021. PP. 168–181.
7. *Tumanyan A.* On the invariance of index of semielliptical operator on the scale of anisotropic spaces. 51: 4 (2016). PP. 187–198.
8. *Каранетян Г.А., Дарбинян А.А.* Нетеровость регулярного оператора с постоянными коэффициентами в области // «Труды инст. мат. им. Размадзе», Тбилиси. Т. 146, 2008. СС. 57–66.
9. *Tumanyan A.* Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in  $\mathbb{R}^n$ // “Italian Journal of Pure and Applied Mathematics”, 47 (2022). PP. 1009–1028.
10. *Tumanyan A.* A priori estimates and Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic Operators // “Siberian Advances in Mathematics”, 33:2 (2023). PP. 151–164.

# ON THE FREDHOLM PROPERTY AND SPECTRAL CHARACTERISTICS OF SPECIAL CLASSES OF HYPOELLIPTIC OPERATORS

*A. Tumanyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University  
Siemens Industry Software*

## ABSTRACT

We study the Fredholm property and spectral characteristics of certain classes of hypoelliptic operators in multi-anisotropic Sobolev spaces. Special a priori estimates are obtained for regular hypoelliptic operators, and a Fredholm criteria are established for two classes of regular hypoelliptic operators with special variable coefficients in weighted multi-anisotropic Sobolev spaces. The spectral properties of the considered operators are also studied.

**Keywords:** regular hypoelliptic operator, Fredholm property, spectrum of operator, multi-anisotropic Sobolev spaces.

# ИНФОРМАТИКА

## МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ОДИНОЧНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ В СХЕМАХ АППАРАТУРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

*Г.А. Арутюнян, С.Х. Нахатакян, М.А. Саргсян*

*Российско-Армянский (Славянский) университет*

*hamhar1945@gmail.com, satenik.nahatakyan@rau.am,  
marina.sarkisyan@rau.am*

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются методы обнаружения и диагностики неисправностей

в цифровых схемах компьютерных систем. Предлагается метод, основанный на машинном обучении распознавания неисправностей на уровне элемента схемы, разработана программа диагностики неисправностей цифровой логической схемы.

**Ключевые слова:** безопасность аппаратно-программных комплексов, диагностика машин, обнаружение неисправностей, математические модели, ремонтпригодность.

Обеспечение надежности и устойчивости вычислительного процесса является важной задачей в проектировании и эксплуатации современных вычислительных систем. Эти характеристики определяют способность системы нормально функционировать в условиях возникновения различных типов ошибок и аварийных ситуаций. Среди многих средств обеспечения надежности и устойчивости функционирования вычислительной системы важное место занимают методы контроля, диагностики и прогнозирования отказов в аппаратной части системы, поэтому задачи автоматизации про-

цессов обнаружения и исправления ошибок в вычислительных комплексах и борьбы с аварийными ситуациями, которые могут возникнуть при работе системы, всегда актуальны и требуют совершенствования алгоритмов и методов контроля правильности работы, обнаружения и диагностики неисправностей в технической части системы.

В данной статье рассматриваются методы и средства обнаружения и локализации неисправностей, описываются модели, алгоритмы поиска неисправностей, приводится описание программы диагностики цифровых комбинационных схем, на которых построены вся аппаратура вычислительных систем.

Цифровая схема – это электрическая схема, которая в дискретной (цифровой) форме обрабатывает, передает и хранит информацию в аппаратной части системы. В цифровой технике сигналы представляются двумя уровнями электрического напряжения, обозначаемыми логическим «0» (низкий уровень) и логической «1» (высокий уровень). Цифровые схемы состоят из логических элементов «И», «ИЛИ», «НЕ», которые являются основой построения аппаратуры компьютеров, мобильных устройств, микропроцессоров и других электронных устройств.

Формально такие схемы можно рассматривать как «черный ящик», имеющий один или несколько входов и выходов. В черном ящике выполняются логические функции, аргументами которых являются входные сигналы. Временная диаграмма описывает длительность сигналов, проходящих через черный ящик.

Цифровые схемы разделяются на комбинационные и последовательностные (конечные автоматы). Выходы комбинационных схем зависят только от значений входных сигналов, например, логический элемент – это комбинационная схема. У комбинационных схем, в отличие от последовательностных схем, память отсутствует.

Выходы последовательностных схем зависят как от значений входных сигналов, так и от состояний самой схемы. Временная диаграмма комбинационной схемы состоит из нижней и верхней граничных значений задержки сигнала по пути от входа к выходу [1].

Методология обнаружения неисправностей в устройствах вычислительных систем состоит из следующих частей:

- периодической проверки работоспособности технических средств с целью своевременного обнаружения скрытых неисправностей;

- аппаратного контроля правильности приема, обработки и передачи данных;
- диагностики неисправностей;
- восстановления работоспособности устройств.

Каждая из этих частей содержит в себе много процедур, обеспечивающих надежность системы на своем уровне.

Проверка работоспособности технических средств системы производится при запуске системы и периодически. Функциональные тесты и тесты оперативной проверки работоспособности каждого устройства разрабатываются совместно с разработкой самого устройства.

Ранее в статьях [2, 3, 4, 5, 6] авторами рассматривались методы обнаружения и локализации неисправностей в комбинационных схемах с помощью метода контрольных точек, теории структурного анализа Рамамурти и локализации неисправностей с помощью регистра ошибок (РО), формируемого средствами аппаратного контроля.

В настоящей статье предлагается еще один метод, основанный на описании комбинационных схем «булевыми уравнениями» [7].

Методологической основой решения задачи локализации неисправностей в комбинационных схемах с помощью алгебры логики является применение методов машинного обучения для распознавания всевозможных случаев неисправностей в конкретной логической схеме. Создаются тестовые комбинации для машинного обучения в виде таблиц истинностей логической схемы, включающих таблицу истинности для безошибочно работающих схем и таблицы истинности с возможными вариантами неисправностей в данной схеме. Целевая задача обучения системы является в определении неисправного элемента логической схемы.

Ниже (Рис. 1) в качестве примера для обнаружения неисправности представлен пример комбинационной схемы. Входами схемы являются:  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , выходом схемы является  $F$ .

Для простоты таблицы истинности для схемы составлены для четырех входов:  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . (Рис. 1).

Ниже приведены таблицы истинности для исправной схемы и для схем с ошибкой. Таблицы представлены в виде массивов в нотации языка программирования VB.NET (одиночные неисправности здесь устанавливаются, т.е. имитируются, произвольно только на входах).

Publictab\_isti As Integer (,) = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 1}, {0, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 1, 1}, {1, 0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1, 1}, {1, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 1, 0}, {1, 1, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 1, 1}, {1, 1, 1, 0, 1}, {1, 1, 1, 1, 1}},  
 tab\_istn0 As Integer(,) = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0}, {0, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0}, {0, 1, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 1, 0}},  
 tab\_istn1 As Integer(,) = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 1, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 1, 1}, {1, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 1, 1}, {1, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 1, 0}},  
 tab\_istn2 As Integer(,) = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 1, 1}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 1, 0}, {1, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 1, 0}},  
 tab\_istn3 As Integer(,) = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0, 1}, {1, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0, 0}, {1, 1, 1, 0, 1}, {1, 1, 1, 0, 1}}

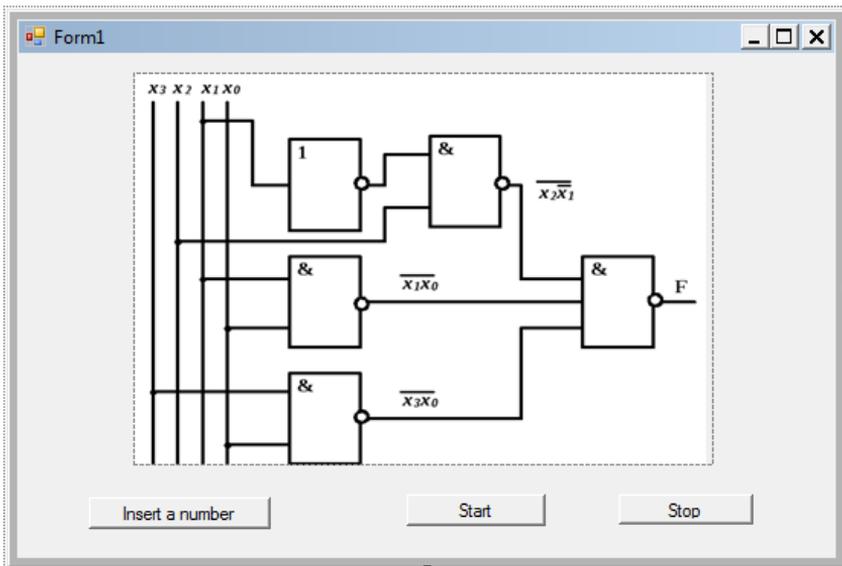


Рисунок 1.

Таблицы были сгенерированы анализом исправной и неисправных (произвольным введением или имитацией неисправностей) схем. Таким образом, массив  $tab\_isti$  – это эталонный массив при значениях для *нулевой строки* всех входов, равных «0», исправной схемы, и далее, значения остальных строк с произвольными значениями на входах от 0-ой до 15-ой.

Массивы:  $tab\_istn0$ ,  $tab\_istn1$ ,  $tab\_istn2$ ,  $tab\_istn3$  сгенерированы для неисправной схемы при устойчивых (тождественных) «0» или «1» на каком-либо входе. Это можно заметить, сравнивая значения элементов эталонного массива  $tab\_isti$  с элементами остальных массивов, составленных для неисправностей. Например, если в таблицах  $tab\_isti$  и  $tab\_istn0$  сравнить, соответственно, попарно и в той и другой элементы: (8,1 и 8,4) или (9,1 и 9,4) и далее: (11,1 и 11,4), (14,1 и 14, 4), (15,1 и 15,4), то можно заметить различия в значениях, указывающих на неисправность «уст. 0» на входе  $x_0$  и соответствующую реакцию на выходе F.

Ниже, на рисунках, представлена работа демоверсии программы на языке VB.Net, локализирующей неисправность в логических схемах. При запуске программы на экране монитора показывается исправная логическая схема и меню с тремя кнопками (“Insert a number”, “Start”, “Stop”).

“Insert a number” – означает ввести номер ошибки, т.е. симитировать неисправность (в программе нумерация ошибок, в отличие от входов, начинается не с 0, а с 1, поэтому ошибка №1 соответствует входу  $x_0$ ). Далее, по изменению форм (Рис. 2 – Рис. 4) можно проследить весь процесс работы программы, начиная с введения (имитации) неисправности вплоть до ее локализации и показа на экране пути распространения ошибки до выходной точки F.

На Рис. 2 после нажатия кнопки: “Insert a number” предлагается ввести (имитировать) неисправность и нажать кнопку “Start”. После чего появляется сообщение (Рис. 3) об ошибке на входе  $X_0$  с неисправностью «уст.0» (см.  $tab\_istn0$ ), и далее, после нажатия кнопки «ОК» (Рис. 4), появляется схема с окрашенным путем неисправности от неисправного входа  $x_0$  к выходу F.

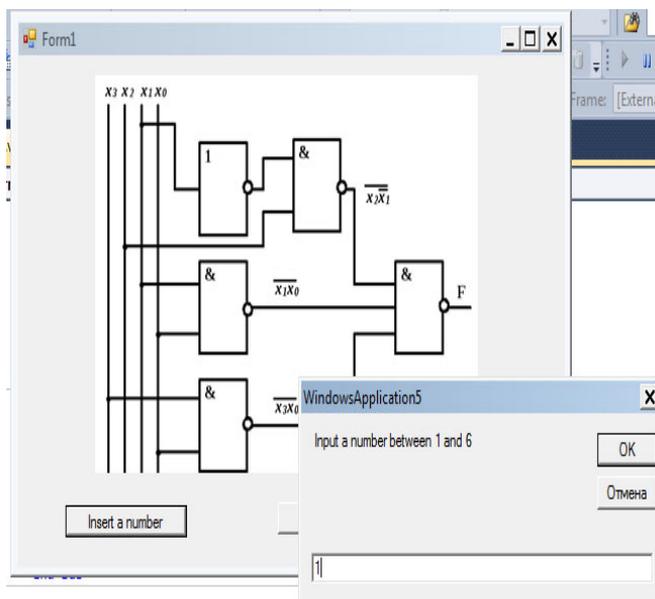


Рисунок 2. Логическая схема.

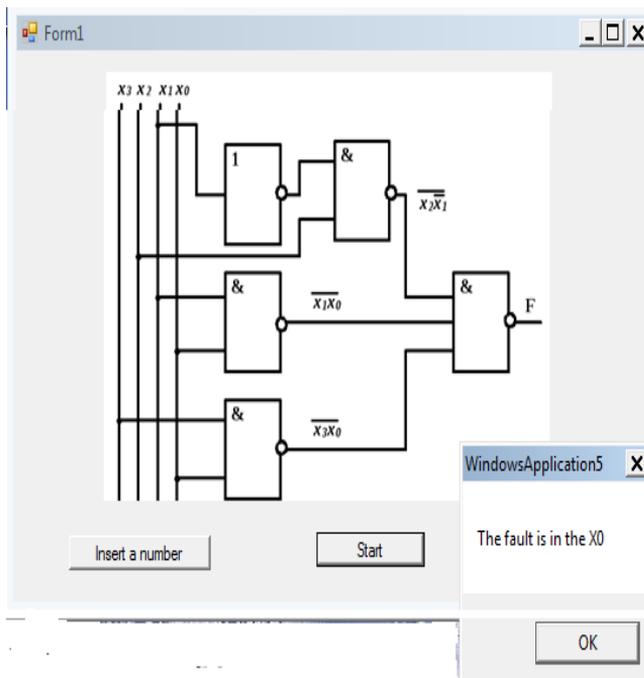


Рисунок 3. Имитация неисправности.

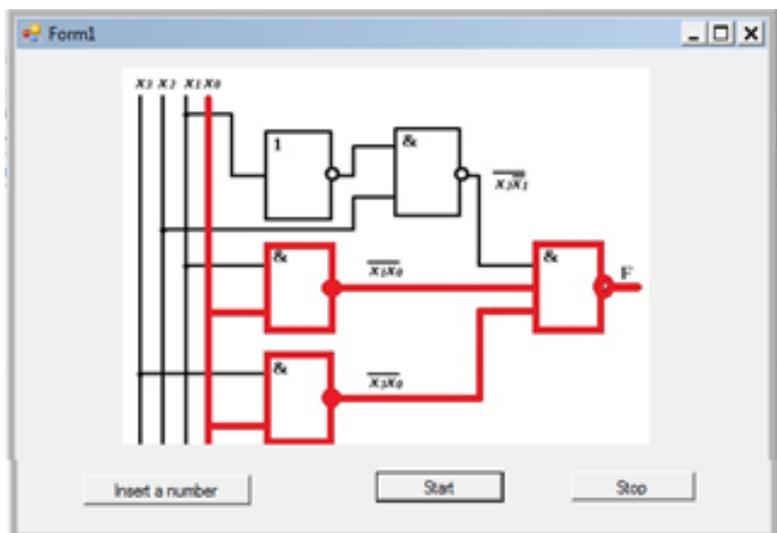


Рисунок 4. Логическая схема после имитации отказа.

Предложенный метод и алгоритм можно распространить на все входы и выходы каждого элемента схемы, приведенной на Рис. 1.

В заключение можно отметить, что предложенный способ и разработанная диагностическая программа могут быть использованы для локализации неисправностей в логических схемах, в цифровой технике. Любую цифровую схему можно описать булевыми уравнениями, а таблицы истинности можно представить в виде массивов для обучения программам.

Статья полезна специалистам, занимающимся вопросами контроля и диагностики цифровых схем, а также студентам, изучающим вычислительную технику и программирование.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов В.В. Схемотехника и средства проектирования цифровых устройств. СПб: «БХВ-Петербург», 2007.
2. Егиазарян В.С., Нахатакян С.Х. Метод блокирующих клапанов, метод тестовых точек и теория структурного анализа // Сборник статей Годичной научной конференции РАУ. Ер., 2008.
3. Нахатакян С.Х., Гаспарян А.В., Сардарян Г.Р. Обнаружение и локализация неисправностей в аппаратно-программных комплексах // Сборник статей Годичной научной конференции РАУ. Ер., 2017.

4. Арутюнян Г.А., Нахатакян С.Х., Мелконян А.А., Саргсян М.А. Концепция разработки математической модели имитационной системы тестирования и диагностирования (ИСТД) для территориально-распределенных сетцентрических систем (ТРСС) реального времени // Сборник научных статей Годичной научной конференции РАУ. Ер., 2022.
5. Арутюнян Г.А., Татинцян Ж.Г., Нахатакян С.Х. Организация автодиагноза в многопроцессорной системе // Тезисы докладов, школа-семинар. Цахкадзор, Арм. ССР, 1985.
6. Атоян Р.В., Арутюнян Г.А., Нахатакян С.Х. Многоуровневое автоматизированное диагностирование технических средств. М.: Вопросы специальной радиоэлектроники. Вып. 3, 1989.
7. Чжен Г., Меннинг Е., Метц Г. Диагностика отказов цифровых вычислительных систем. М.: «Мир», 1977.

## METHOD OF SINGLE MALFUNCTION LOCALISATION IN COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS HARDWARE SCHEMES

*G. Harutyunyan, S. Nahatakyan, M. Sargsyan*

*Russian-Armenian (Slavonic)University*

### ABSTRACT

In this article, the methods of detection and diagnosis of malfunctions in digital schemes of computer systems are considered. The authors proposed a method and developed software based on the machine learning for diagnosis of malfunctions in the digital logic scheme.

**Keywords:** safety of hardware-software complexes, diagnostics of cars, failure detection, mathematical models, maintainability.

# ԻՆՏԵՐՊՐՈՑԵԴՈՒՐԱԼ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՀՈՍՔԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ ԽԵԼԱՑԻ ՊԱՅՄԱՆԱԳՐԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

*Ա. Կ. Մկրտչյան*

*Հայ-ռուսական (Մլավոնական) համալսարան  
abmkrtyan@rau.am*

## ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Ծրագրային սխալները հաճախ հանգեցնում են խելացի պայմանագրերում խոցելիությունների ի հայտ գալուն, ինչը կարող է առաջացնել լուրջ խնդիրներ: Առկա խոցելիությունները կարող են շահագործվել հաքերների կողմից, հասցնելով ֆինանսական զգալի կորուստներ խելացի պայմանագրերի սեփականատերերին և օգտատերերին, ինչը խելացի պայմանագրերի անվտանգությունը առաջնային խնդիր է դարձնում:

Խելացի պայմանագրերի հատկությունների ուսումնասիրության մեթոդներից է ինտերպրոցեդուրալ տվյալների հոսքի վերլուծությունը [1]:

**Հիմնաբառեր՝** ծրագրային անվտանգություն, խելացի պայմանագիր, ստատիկ վերլուծություն:

## Մեթոդներ

Ներկայիս ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս [2], որ շատ խոցելիություններ և սխալներ կապված են հենց տվյալների հոսքի սխալ կառավարման հետ:

Տվյալների հոսքի վերլուծությունը (Data Flow Analysis) ծրագրային կոդի ստատիկ վերլուծության մեթոդ է, որը հաճախ կիրառվում է ստատիկ վերլուծություն կատարող գործիքներում՝ ծրագրի կատարման ճա-

նապարհներին տվյալների հոսքերի մասին ինֆորմացիա հավաքելու համար: Ինտերպրոցեդուրալ տվյալների հոսքի վերլուծությունը (Interprocedural Data Flow Analysis) ապահովում է ավելի ամբողջական և ճշգրիտ տվյալների հոսքի վերլուծություն՝ ընդգրկելով ծրագրի բոլոր ֆունկցիաներն ու մեթոդները: Ինտերպրոցեդուրալ վերլուծությունը ընդլայնում է ներպրոցեդուրալ (intraprocedural) վերլուծությունը (որը սահմանափակվում է միայն մեկ ֆունկցիայի կամ մեթոդի ներսում տվյալների հոսքի վերլուծությամբ): Այն հաշվի է առնում տվյալների հոսքը մի ֆունկցիայից մյուսը՝ վերլուծելով ֆունկցիաների կանչերը և վերադարձվող արժեքները, ինչի շնորհիվ վերլուծության արդյունքները դառնում են ավելի ճշգրիտ և ամբողջական: Մա հնարավորություն է տալիս հայտնաբերել, թե ինչպես են փոփոխականները փոխանցվում և փոփոխվում տարբեր ֆունկցիաներում:

Այս աշխատանքի նպատակն է ինտեգրել ինտերպրոցեդուրալ տվյալների հոսքի վերլուծության մեթոդները խելացի պայմանագրերի հատկությունների ուսումնասիրության գործիքում, որը հնարավորություն կտա խելացի պայմանագրերի մշակման վաղ փուլերում հայտնաբերել և կանխարգելել տվյալների հոսքի հետ կապված խոցելիություններ:

Այս խնդրի լուծման համար՝

- կառուցվել են ծրագրի ղեկավարման հոսքի գրաֆեր [3], որոնք ներառում են բոլոր ֆունկցիաների և մեթոդների միջև ղեկավարման հոսքի փոխազդեցությունները,
- վերլուծվել է տվյալների հոսքը ֆունկցիաներում և ֆունկցիաների միջև՝ օգտագործելով հրահանգների միջանկյալ ներկայացումներ,
- մշակված ալգորիթմը ինտեգրվել է խելացի պայմանագրերի հատկությունների ուսումնասիրության գործիքում:

## **Արդյունքներ**

Արդյունքում մշակվել և իրականացվել է ինտերպրոցեդուրալ

տվյալների հոսքի վերլուծություն կատարող գործիք, որի օգտագործմամբ հայտնաբերվել են մի շարք խոցելիություններ, ինչպես օրինակ՝ reentrancy attacks [4], gas limit [5] և accesscontrol [6] խնդիրները:

### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Reps Th., Horwitz S. and Mooly S.* (1995). Precise interprocedural dataflow analysis via graph reachability. In Proceedings of the 22nd ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages (POPL '95). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 49–61. <https://doi.org/10.1145/199448.199462>
2. Smart Contract Weakness Classification (SWC). Մուտք գործած: Օգոստոս 9, 2024. [Օնլայն]. Հասցանի: <https://swcregistry.io/>
3. *Alfred V. Aho, Ravi Sethi, and Jeffrey D. Ullman.* Compilers: Principles, Techniques, and Tools. Addison-Wesley, Boston, MA, 2 edition, 2006.
4. Reentrancy Attack in Smart Contracts. Մուտք գործած: Օգոստոս 9, 2024. [Օնլայն]. Հասցանի: <https://medium.com/chainwall-io/reentrancy-attack-in-smart-contracts>
5. Smart contract gas griefing attack | The hidden danger. Մուտք գործած: Օգոստոս 9, 2024. [Օնլայն]. Հասցանի: <https://www.getsecureworld.com/blog/smart-contract-gas-griefing-attack-the-hidden-danger/>
6. Access Control. Մուտք գործած: Օգոստոս 9, 2024. [Օնլայն]. Հասցանի: <https://docs.openzeppelin.com/contracts/3.x/access-control>

### МЕЖПРОЦЕДУРНЫЙ АНАЛИЗ ПОТОКА ДАННЫХ ДЛЯ УМНЫХ КОНТРАКТОВ

*Ա.Կ. Մկրտչյան*

*Российско-Армянский (Славянский) университет*

### АННОТАЦИЯ

Ошибки в программном обеспечении часто приводят к уязвимостям в умных контрактах, что может вызвать серьезные проблемы. Существующие уязвимости могут быть использованы хакерами, что приводит к значительным финансовым потерям у владельцев и пользователей умных контрактов, делая безопасность умных контрактов первоочередной задачей. Одним из методов изучения свойств умных контрактов является межпроцедурный анализ потока данных [1].

**Ключевые слова:** программная безопасность, умный контракт, статический анализ.

# INTERPROCEDURAL DATA FLOW ANALYSIS FOR SMART CONTRACTS

*A. Mkrtchyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

## ABSTRACT

Software bugs often lead to vulnerabilities in smart contracts, which can result in serious issues. These existing vulnerabilities may be exploited by hackers, causing significant financial losses for smart contract owners and users, thus making the security of smart contracts a top priority. One of the methods for studying the properties of smart contracts is interprocedural data flow analysis [1].

**Keywords:** software security, smart contract, static analysis.

ՄԻՄՎՈԼԻԿ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԼԱՎԱՑՈՒՄ՝  
ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԱՊԱՀՈՎՄԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ  
ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿՈՂԻ ԾԱԾԿՈՒՅԹԻ  
ԲԱՐՁՐԱՑՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

*Հ.Մ. Մովսիսյան, Հ.Ա. Հովհաննիսյան*

*Հայ-ռուսական (Մլավոնական) համալսարան  
hovhannes.movsisyan@rau.am, hripsime.hovhannisyanyan@rau.am*

**ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

Մեր օրերում ծրագրային ապահովման անվտանգությունն ու կա-  
յունությունը կարևորագույն խնդիրներ են: Ժամանակակից ծրագրե-  
րի բարդ կառուցվածքի ու ծավալների պատճառով ծրագրի մշակման  
փուլում ծրագրային թերությունների մի մասը մնում են չհայտնաբեր-  
ված: Անհրաժեշտություն է առաջանում ավտոմատացված սխալնե-  
րի հայտնաբերման մեթոդներ մշակել: Այդ մեթոդներից է ծրագրերի  
սիմվոլիկ կատարումը:

**Հիմնաբառեր՝** սիմվոլիկ կատարում, ստատիկ վերլուծություն,  
ծրագրային անվտանգություն:

**Մեթոդներ**

Սիմվոլիկ կատարումը [3] ծրագրերի վերլուծության մեթոդ է, որն  
ինտերպրետացնում է ծրագրի կատարումը՝ կոնկրետ արժեքների փո-  
խարեն օգտագործելով սիմվոլիկ արժեքներ: Այն մուտքային փոփոխա-  
կաններին վերաբերելով որպես սիմվոլիկ արժեքներ՝ կատարում է  
ծրագրի բազմաթիվ կատարման ճանապարհներ: Այս մոտեցումը կա-  
րող է օգնել սխալների, խոցելիությունների ու եզրային դեպքերի հայտ-  
նաբերման համար, որոնք ավանդական թեստավորման մեթոդները  
կարող են չգտնել: Սիմվոլիկ կատարումը օգտակար է ծրագրերի ավտո-

մատացված թեստերի գեներացիայի, վերիֆիկացման և խոցելիությունների հայտնաբերման համար: Այնուամենայնիվ, գործնական կիրառումը հաճախ սահմանափակվում է մասշտաբացման, ուղիների աճի, բարդ ծրագրային կառուցվածքների, հիշողության ու միջավայրի մոդելավորման խնդիրներով: Խիստ անհրաժեշտություն է առաջանում լավացնել սիմվոլիկ կատարումը:

Այս աշխատանքի նպատակն է լավացնել սիմվոլիկ կատարումը՝ բարձրացնելով դրա արդյունավետությունը՝ թիրախավորելով մի շարք խնդիրներ, ինչպիսիք են ուղիների աճը, հիշողության մոդելավորումը և բարդ ծրագրային կառուցվածքների մշակումը: Սիմվոլիկ կատարման զարգացմամբ կարող ենք բարելավել ծրագրային համակարգերի ընդհանուր որակն ու հուսալիությունը:

Վերոնշյալ խնդիրների լուծման համար օգտագործվել է KLEE [1, 2] սիմվոլիկ կատարման գործիքը, որը նախատեսված է C և C++ լեզուներով գրված ծրագրերի սիմվոլիկ կատարման համար: Մասնավորապես գործիքում ավելացվել է՝

- չսկզբնարժեքավորված հիշողությունները ավտոմատ սիմվոլիկ դարձնելու հնարավորություն,
- սիմվոլիկ ցուցիչներ աջակցող հիշողության մոդել,
- ցիկլի իտերացիաների սահմանափակման հնարավորություն,
- կառավարման հոսքի ուղու ստուգման ֆունկցիոնալություն:

## **Արդյունքներ**

Արդյունքում KLEE սիմվոլիկ կատարման գործիքում իրականացվել են վերոնշյալ մասերը: Ավելացել է սիմվոլիկ կատարման ենթարկվող ծրագրերի կողմի ծածկույթը: Մշակված գործիքը ինտեգրվել է ստատիկ վերլուծություն կատարող գործիքի հետ, որի արդյունքում բարձրացել է ստատիկ վերլուծիչի արդյունքների ճշտությունը:

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. KLEE Symbolic Execution Engine. Մուտք գործած: Օգոստոս 1, 2024. [Օնլայն]. Հասցե: <https://klee-se.org>
2. *Cadar C., Dunbar D. and Dawson R.* Engler. 2008. KLEE: Unassisted and Automatic Generation of High-coverage Tests for Complex Systems Programs. In Proc. 8th USENIX Conf. on Operating Systems Design and Implementation (OSDI'08). USENIX Association, 209–224.
3. *King J.C.* Symbolic execution and program testing. Commun. ACM 19, 7 (July 1976). PP. 385–394.

### УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ СИМВОЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ПОЛНОТЫ ПОКРЫТИЯ КОДА ПРИ АНАЛИЗЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

*Օ.Մ. Մովսիսյան, Ք.Ա. Օգաննիսյան*

*Российско-Армянский (Славянский) университет*

#### АННОТАЦИЯ

В этой статье представлены подходы к автоматической символизации, нацеленные на следующие важные части: переменные с неизвестными значениями, аргументы функций и возвращаемые значения, а также память, ссылающаяся на указатель. Для решения проблемы «взрыва пути» в этой статье представлена практическая стратегия ограничения итераций цикла без прекращения процесса символического выполнения. Предлагаемые методы делают символическое выполнение более практичным для тестирования и проверки программного обеспечения.

**Ключевые слова:** символическое выполнение, статический анализ, безопасность программного обеспечения.

### ADVANCING SYMBOLIC EXECUTION TECHNIQUES TO INCREASE EFFICIENCY AND COVERAGE IN SOFTWARE ANALYSIS

*H. Movsisyan, H. Hovhannisyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

#### ABSTRACT

This article introduces automatic symbolization approaches that target these important parts: variables with unknown values, function arguments and return values, and pointer-

referenced memories. To manage the path explosion problem, this paper presents a practical strategy for limiting loop iterations without terminating the symbolic execution process. The proposed techniques make symbolic execution more practical for software testing and verification.

**Keywords:** symbolic execution, static analysis, software security

# ՀԻՇՈՂՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱՀՈՍՔԵՐԻ ՀԱՅՏՆԱԲԵՐՈՒՄ ՍՏԱՏԻԿ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻՄՎՈԼԻԿ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

*Հ.Ա. Հովհաննիսյան, Հ.Մ. Մովսիսյան*

*Հայ-ռուսական (Մլավոնական) համալսարան  
hripsime.hovhannisyanyan@rau.am, hovhannes.movsisyanyan@rau.am*

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքը ներկայացնում է հիշողության արտահոսք հայտնաբերելու նորարարական մոտեցում, որը հիմնականում կենտրոնացած է C/C++ լեզուներով գրված ծրագրերի հետազոտության վրա: Այս մեթոդը համակցվում է երկու կարևոր փուլերով, ծրագրի ստատիկ վերլուծությամբ և ուղղորդված սիմվոլիկ կատարմամբ, նպատակ ունենալով հասնելու մաշտաբայնության և բարձր ճշտության հիշողության արտահոսքի սխալներ հայտնաբերելու գործում:

**Հիմնաբառեր`** հիշողության արտահոսք, ծրագրի վերլուծություն, C/C++, ստատիկ վերլուծություն, սիմվոլիկ կատարում, ուղղորդվող սիմվոլիկ կատարում:

## Մեթոդներ

Alloc Free Imbalance checker-ը մշակված գործիքի հիմնական կոմպոնենտներից է, որը նախատեսված է ղեկավարման հոսքի ճանապարհների վրա հիշողության հատկացման և ազատման քանակների անհամապատասխանեցումներ հայտնաբերելու համար: Հիշողության արտահոսք կարող է տեղի ունենալ, երբ հիշողությունը հատկացվել է, բայց ճշգրիտ կերպով չի ազատվել, այս checker-ը նախատեսված է նմանատիպ սխալների հայտնաբերման համար: Այս մեթոդը հոտազոտում

է դեկավարման հոսքի ճանապարհները և ամեն հատկացված հիշողության համար փորձում է գտնել համապատասխան հիշողության ազատման հրամանը: Բացի դեկավարման հոսքի ճանապարհների դիտարկումից հաշվի է առնվում նաև տվյալների հոսքը: Եթե հայտնաբերվում է հիշողության հատկացում, որի համապատասխան ազատումը բացակայում է, այն համարվում է հնարավոր հիշողության արտահոսք:

Հնարավոր հիշողության արտահոսքերի հայտնաբերումից հետո, իրականացվում է ուղղորդված սիմվոլիկ կատարում սխալների իրագործելիությունը ստուգելու համար: Ուղղորդված սիմվոլիկ կատարումը կենտրոնանում է միայն այն դեկավարման հոսքի ճանապարհների վրա, որոնք կարող են հանգեցնել հավանական սխալին, այս մոտեցումը թույլ է տալիս հասնել բարձր ճշտության և մաշտաբայնության:

### Արդյունքներ

Այս մոտեցումը իրականացված է Memory Leak Hunter (MLH) գործիքում, որը հաջողությամբ կիրառվել է հարյուրից ավել բաց հասանելի վարկանշային նախագծերի վրա՝ ինչպիսիք են OpenSSL-ը և FFmpeg-ը: Alloc Free Imbalance checker-ը առանցքային դեր է կատարել այս նախագծերում հիշողության արտահոսքերը հայտնաբերելու հարցում, ինչի արդյունքում այս մեթոդը ցույց է տվել իր կայունությունն ու գործնական ազդեցությունը իրական աշխարհի կիրառությունների համար: Բաց հասանելի նախագծերի վրա հայտնաբերված սխալների ամբողջական արդյունքները ներկայացված են Աղյուսակ 1-ում:

*Աղյուսակ 1.*

#### Բաց հասանելի ծրագրերի վրա հայտնաբերված սխալներ:

Project name	Repository link	Reported issues identifiers
openssl	<a href="https://github.com/openssl/openssl">https://github.com/openssl/openssl</a>	20870
ffmpeg	<a href="https://lists.ffmpeg.org/">https://lists.ffmpeg.org/</a>	10342

radare2	<a href="https://github.com/radareorg/radare2">https://github.com/radareorg/radare2</a>	21703, 21704
bind9	<a href="https://gitlab.isc.org/isc-projects/bind9">https://gitlab.isc.org/isc-projects/bind9</a>	4282
clib	<a href="https://github.com/clibs/clib">https://github.com/clibs/clib</a>	292, 293, 295
coturn	<a href="https://github.com/coturn/coturn">https://github.com/coturn/coturn</a>	1259
cups	<a href="https://github.com/apple/cups">https://github.com/apple/cups</a>	6144
cyclonedds	<a href="https://github.com/eclipse-cyclonedds/cyclone dds">https://github.com/eclipse-cyclonedds/cyclone dds</a>	1814
gpac	<a href="https://github.com/gpac/gpac">https://github.com/gpac/gpac</a>	2569
pupnp	<a href="https://github.com/pupnp/pupnp">https://github.com/pupnp/pupnp</a>	430
varnish-cache	<a href="https://github.com/varnishcache/varnish-cache">https://github.com/varnishcache/varnish-cache</a>	3986
masscan	<a href="https://github.com/robertdavidgraham/masscan">https://github.com/robertdavidgraham/masscan</a>	730
FreeRDP	<a href="https://github.com/FreeRDP/FreeRDP">https://github.com/FreeRDP/FreeRDP</a>	9410, 9411
libvips	<a href="https://github.com/libvips/libvips">https://github.com/libvips/libvips</a>	3642
zstd	<a href="https://github.com/facebook/zstd">https://github.com/facebook/zstd</a>	3764
scrcpy	<a href="https://github.com/Genymobile/scrcpy">https://github.com/Genymobile/scrcpy</a>	4636

Ստեղծված գործիքը նաև համեմատվել է գոյություն ունեցող այլ մեթոդների հետ, համեմատությունը կատարվել է հայտնի Juliet թեստային համակարգի վրա, ինչի արդյունքում MLH-ը ցույց է տվել ամենալավ արդյունքը (Աղյուսակ 2):

*Աղյուսակ 2.*

**Juliet թեստային համակարգի վրա ստացված արդյունքներ:**

<i>Tools Name</i>	<i>True Positives</i>	<i>True Negatives</i>	<i>False Positives</i>	<i>False Negatives</i>	<i>F1-score</i>
CSA [4]	536	4481	125	332	0.70
Infer [5]	262	4392	214	606	0.39
SMOKE [6]	496	4510	96	372	0.68

PCA [7]	486	4342	264	382	0.60
SVF [8]	452	4168	438	416	0.51
MLH [9]	<b>868</b>	<b>4606</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Nielsen F., Nielson H. & Hankin C. (2005). Principles of Program Analysis. Springer.*
2. *Aho A., Lam M., Sethi R., Ullman J. D. (2006). Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd ed.). Pearson Education.*
3. Juliet Test Suite. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://samate.nist.gov/SARD/test-suites>
4. Clang-Analyzer. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://clanganalyzer.llvm.org/>
5. Infer. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://fbinfer.com/>
6. *Y. Sui and J. Xue, “SVF: Interprocedural static value-flow analysis in LLVM”, in Proc. 25th Int. Conf. Compiler Construction, Mar. 2016. PP. 265–266.*
7. *H. Aslanyan et al., “Combining Static Analysis With Directed Symbolic Execution for Scalable and Accurate Memory Leak Detection”, in IEEE Access, vol. 12. PP. 80128–80137, 2024, DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3409838*
8. OpenSSL. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://www.openssl.org/>
9. FFmpeg. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://ffmpeg.org/>
10. Radare2. Accessed: Jun. 3, 2024. [Online]. Available: <https://rada.re/n>

## ОБНАРУЖЕНИЕ УТЕЧЕК ПАМЯТИ С ПОМОЩЬЮ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И СИМВОЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

*Р.А. Оганнисян, О.М. Мовсисян*

*Российско-Армянский (Славянский) Университет*

### АННОТАЦИЯ

В работе представлен инновационный подход к обнаружению утечек памяти, основное внимание в котором уделяется анализу программ, написанных на языках C/C++. Этот метод сочетает два важных этапа: статический анализ программы и направленное символьное выполнение, цель которых – достижение масштабируемости и высокой точности в выявлении ошибок утечки памяти.

**Ключевые слова:** утечка памяти, анализ программ, C/C++, статический анализ, символьное исполнение, направленное символьное исполнение.

# DETECTION OF MEMORY LEAKS USING STATIC ANALYSIS AND SYMBOLIC EXECUTION

*H. Hovhannisyan, H. Movsisyan*

*Russian-Armenian (Slavonic) University*

## ABSTRACT

The work presents an innovative approach to detecting memory leaks, primarily focused on the analysis of programs written in C/C++. This method combines two important phases: static analysis of the program and guided symbolic execution to achieve scalability and high accuracy in identifying memory leak errors.

**Keywords:** memory leak, program analysis, C/C++, static analysis, symbolic execution, directed symbolic execution.

# ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ АНАЛИЗ ИСКУССТВЕННОЙ СРЕДЫ С БЛИЗКОЙ К НУЛЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТАЛЛ-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ НАНОСТРУКТУРЫ

*О.В. Багдасарян, Т.М. Князян, Т.Т. Оганесян*

*Национальный политехнический университет Армении  
hovik@seua.am*

### АННОТАЦИЯ

В работе проведен электромагнитный анализ взаимодействия плоских волн с искусственными средами с диэлектрической проницаемостью, близкой к нулю, так называемыми ENZ-метаматериалами (“epsilon-near-zero materials”). Численное моделирование электромагнитных свойств таких метаматериалов проводится применительно к ближнему инфракрасному диапазону волн с помощью метода единого выражения. Последовательно исследованы отражательные и пропускательные характеристики гипотетических однородных слоев различной толщины с диэлектрической проницаемостью, близкой к нулю, и многонослойных металл–диэлектрических структур на основе повторяющихся двухслоек с чередующимися положительными и отрицательными диэлектрическими проницаемостями. Показано, что с использованием таких структур можно имитировать ENZ-метаматериалы. Для достаточно тонких повторяющихся двухслоек с соответствующим числом получено полное согласие с анализом для однородных гипотетических слоев ENZ-метаматериала. Полученные результаты исследований могут быть полезны для проектирования и создания многонослойных ENZ-метаматериалов.

**Ключевые слова:** многослойная наноструктура, близкая к нулю диэлектрическая проницаемость, металл-диэлектрик метаматериал, электромагнитный анализ, метод единого выражения.

## **Введение**

В последние десятилетия искусственные среды с эффективной диэлектрической проницаемостью, близкой к нулю, эпсилон-околонулевые ENZ-метаматериалы интенсивно исследуются и привлекают все больше внимания [1,2]. Это происходит благодаря их необычным физическим свойствам. Их перспективные применения – нанофотоника, СВЧ радиотехника, нелинейная оптика, плазмоника, сильные взаимодействия света и вещества и т.д.

Как следует из обзора литературы, создание ENZ-метаматериалов является актуальной проблемой. Многослойные структуры, состоящие из чередующихся диэлектрик-металл или диэлектрик-полупроводник нанодвухслоек, являются многообещающими для решения многих задач [3, 4]. Для определения оптимальных толщин нанослоев и числа двухслоек в многослойной структуре, имитирующей ENZ-метаматериалы, необходимо перед их реализацией провести численное моделирование.

В настоящей работе электромагнитное моделирование в масштабе длины волны проводится без указания веществ слоев структуры, что позволяет получить общие закономерности, необходимые для успешного проектирования искусственных ENZ-метаматериалов. Проведенные исследования позволяют получить не только отражательные и пропускательные характеристики структур ENZ-метаматериалов, но и распределения амплитуд электрических и магнитных полей внутри исследуемых структур. Эти зависимости полезны для понимания особенностей электромагнитных характеристик искусственных многослойных структур, состоящих из чередующихся нанослоев с положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями, имитирующих ENZ-метаматериалы. В работе последовательно исследуется падение электромагнитной волны на однородные слои различной толщины с диэлектрической проницаемостью в области от 0 до 1 и имитирующую ENZ-метаматериал многослойную структуру с повторяющимися двухслойками с чередующимися положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями. Для моделирования используется метод единого выражения, который позволяет решать многограничные задачи электромагнетизма эффективно и с высокой точностью [5–8].

## **Результаты численного исследования**

Рассмотрим нормальное падение линейно-поляризованной плоской электромагнитной волны на однородный слой толщиной  $L$  (Рис. 1).

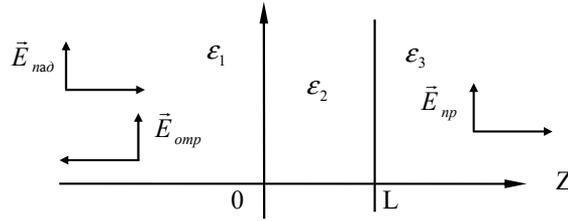


Рисунок 1. Падение линейно-поляризованной плоской электромагнитной волны на однородный слой толщиной  $L$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ . Окружающие среды имеют диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$ .

Коэффициенты отражения и прохождения (по интенсивности) слоя с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_2 = 0.3$  и  $\epsilon_2 = 0.0275$  различной толщины приведены на Рис. 2а-в.

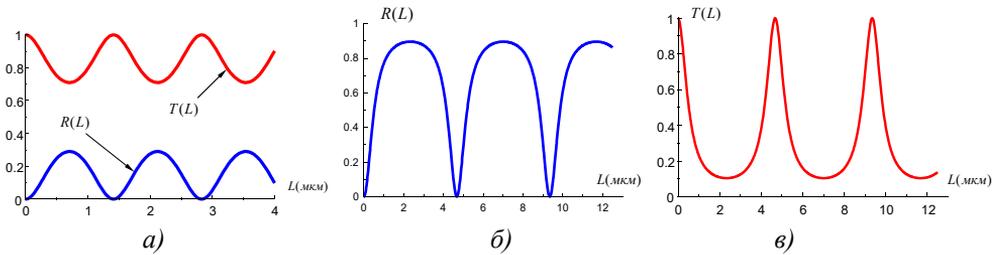


Рисунок 2. Зависимости коэффициентов: а) отражения  $R(L)$  и прохождения  $T(L)$  от толщины слоя  $L$ ,  $\epsilon_2 = 0.3$ ,  $R_{\text{макс}} = 0.2899$ , б) отражения  $R(L)$  и в) прохождения  $T(L)$  от толщины слоя  $L$ ,  $\epsilon_2 = 0.0275$ ,  $R_{\text{макс}} = 0.8958$ . Длина волны падающего излучения  $\lambda_0 = 1.55$  мкм,  $T(L) = 1 - R(L)$ .

Периодическое поведение коэффициентов отражения и прохождения также типично для слоев с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2 > 1$  [9]. Максимальные значения коэффициента отражения имеют место при толщинах слоя  $L = (2m + 1) \cdot (\lambda/4)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Минимальные значения коэффициента отражения (полное прохождение) имеют место при толщинах слоя  $L = m \cdot (\lambda/2)$ , где  $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_2}$ .

При приближении диэлектрической проницаемости слоя к нулевому значению продолжают наблюдаться периодические зависимости коэффициентов отражения и прохождения, но теперь максимальные значения коэффициентов отражения существенно больше, а пики полного прохождения уже. Соответствующие зависимости представлены для  $\epsilon_2 = 0.0275$  (Рис. 2б, в).

Полезно исследовать распределения амплитуд электрического и магнитного полей внутри и вне слоя при полном прохождении и максимальном отражении для  $\varepsilon_2 = 0.0275$  (Рис.3 а, б).

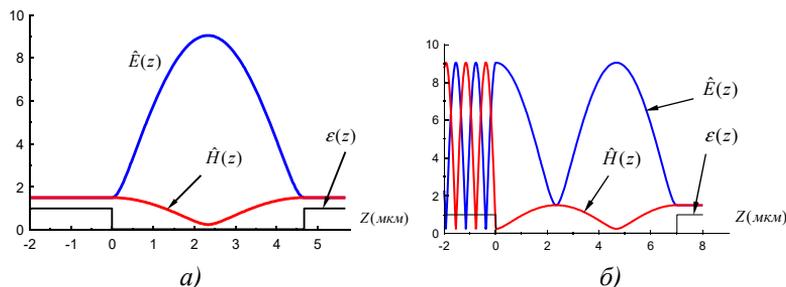


Рисунок 3. Распределения амплитуд электрического  $\hat{E}(z)$  и магнитного  $\hat{H}(z)$  полей внутри и вне слоя с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2 = 0.0275$  при полном прохождении: а) толщиной  $L = \lambda/2 = 4.6734$  мкм, и б) толщиной  $L = (3/4) \cdot \lambda$  при максимальном отражении  $R_{\text{макс}} = 0.8958$ .

На Рис. 3а наблюдается однородная бегущая волна с постоянной амплитудой ( $\hat{E}(z) = \hat{H}(z)$ ) перед слоем и за ним, что указывает на полное прохождение волны. Распределения полей внутри слоя типичны для прозрачного слоя толщиной, кратной  $\lambda/2$ . При этом амплитуда электрического поля  $\hat{E}(z)$  внутри слоя существенно выше амплитуды магнитного поля  $\hat{H}(z)$ . При максимальном отражении (Рис. 3б) за слоем при  $z > L$  имеется однородная плоская волна с постоянной амплитудой ( $\hat{E}(z) = \hat{H}(z)$ ) намного меньше падающей. Перед слоем при  $z < 0$  наблюдается полустоячая волновая картина как результат суперпозиции падающей и отраженной волн. Внутри слоя наблюдается специфическое поведение  $\hat{E}(z)$  и  $\hat{H}(z)$ , соответствующее  $L = (1/4) \cdot \lambda + \lambda/2$  толщинам слоев. При максимальном отражении в слое также наблюдается сильное превышение амплитуды электрического поля относительно амплитуды магнитного поля.

Теперь перейдем к моделированию металл-диэлектрических многослойных структур, имитирующих ENZ-метаматериалы. Рассмотрим многослойную структуру, состоящую из повторяющихся двух нанослоев с положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями. В качестве примера, без уточнения веществ нанослоев рассмотрим структуру, состоящую из чередующихся двухслоев с положительной  $\varepsilon_{\text{диэл}} = 2$  и отрицательной  $\varepsilon_{\text{мет}} = -1.9$  диэлектрическими проницаемостями.

ми и толщинами  $d_{\text{диэл}} = \lambda_{\text{диэл}}/50 = 21.9$  нм, где  $\lambda_{\text{диэл}} = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_{\text{диэл}}}$  и  $d_{\text{мет}} = \lambda_{\text{мет}}/50 = 22.5$  нм, где  $\lambda_{\text{мет}} = \lambda_0/\sqrt{|\epsilon_{\text{мет}}|}$ . Исследованы зависимости отражательных и пропускательных характеристик от толщины структуры и получены распределения полей в точках полной прозрачности и максимального отражения. Коэффициент отражения по интенсивности многослойной структуры от количества двухслоек  $N$  представлен на Рис. 4.

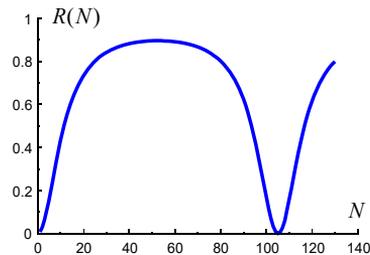


Рисунок 4. Зависимость коэффициента отражения  $R(N)$  от числа  $N$  двухслоек.

$$R_{\text{макс}} = 0.8971 \text{ при } N = 54, R_{\text{мин}} = 10^{-4} \text{ при } N = 105, T(L) = 1 - R(L).$$

Чтобы убедиться в том, что многослойная структура имитирует ENZ-метаматериал, полезно исследовать распределения амплитуд электрического и магнитного полей при максимальном и минимальном коэффициентах отражения (Рис. 5 а, б).

Полученные распределения полей аналогичны распределениям, полученным для однородного гипотетического слоя с ENZ-метаматериалом, только магнитное поле имеет небольшие колебания внутри структуры.

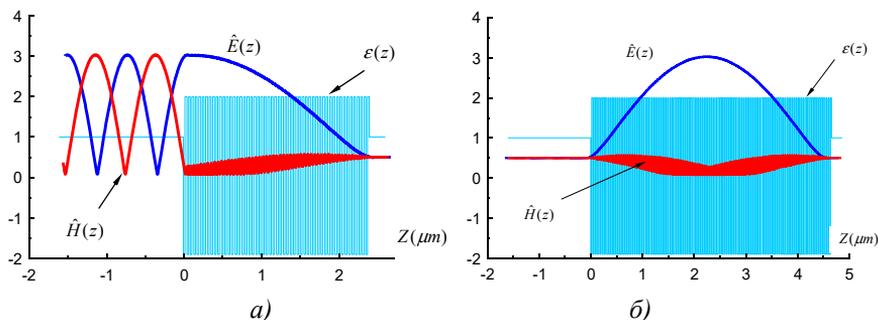


Рисунок 5. Распределения амплитуд электрического  $\hat{E}(z)$  и магнитного  $\hat{H}(z)$  полей при а) максимальном отражении при  $N = 54$  и б) нулевом отражении при  $N = 105$ ,  $\epsilon_{\text{диэл}} = 2$ ,  $\epsilon_{\text{мет}} = -1.9$ .

Таким образом, многослойная структура с положительно-отрицательной диэлектрической проницаемостью может имитировать ENZ-метаматериалы. Толщины нанослоев и число двухслоек подбираются во время численного моделирования.

Полученные зависимости показывают, что в тонких ENZ структурах, порядка длины волны, можно получить сильное отражение или резонансное полное прохождение. При полном прохождении имеет место резкое увеличение амплитуды электрического поля в структуре, что указывает на возможность сильного поглощения или усиления в тонких, порядка длины волны, структурах. Наличие большой амплитуды электрического поля в структуре при полном прохождении будет благоприятствовать проявлению нелинейности в ней.

### **Заключение**

Электромагнитное моделирование позволило исследовать отражательные и пропускательные свойства гипотетических однородных слоев различной толщины с диэлектрической проницаемостью, близкой к нулю. Также были проанализированы отражательные и пропускательные характеристики повторяющихся двухслоек с чередующимися положительными и отрицательными диэлектрическими проницаемостями в многослойных структурах и показано, что с использованием таких структур можно имитировать ENZ-метаматериалы. Важным критерием моделирования является распределение амплитуд электрических и магнитных полей в структурах с ENZ-метаматериалами как внутри гипотетических слоев, так и в металл-диэлектрических многослойных структурах.

Используемый численный метод единого выражения позволяет легко учитывать эффекты потерь или усиления, а также зависящую от интенсивности нелинейность в многослойных структурах. Полученные результаты электромагнитного моделирования будут полезны при проектировании и создании многослойных структур с ENZ-метаматериалами для применений в нанофотонике и плазмонике.

**Благодарность:** исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке РА в рамках научного проекта № 21Т–2J194.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu J., Xie Z., Sha Y., et al.* Epsilon-near-zero photonics: infinite potentials // “Photonics Research”, 2021, 9. (8). PP. 1616–1644.
2. *Lobet M., Kinsey N., et al.* New horizons in near-zero refractive index photonics and hyperbolic metamaterials // “ACS Photonics”, 2023. 10. PP. 3805–3820.
3. *Vafaei M., Moradi M., Bordbar Gh.* Realization of epsilon-near-zero metamaterial stack based on dielectric-semiconductor-metal multilayers // “Plasmonics”, 2019. 14. PP.1929–1937.
4. *Caligiuri V., Biffi G., Patra A. et al.* One-dimensional epsilon-near-zero crystals // “Adv. Photonics Res”, 2021, 2.
5. *Baghdasaryan H., Knyazyan T.* Problem of plane EM wave self-action in multilayer structure: an exact solution // “Optical and Quantum Electronics”, 1999. 31 (9/10). PP. 1059–1072.
6. *Baghdasaryan H., Knyazyan T., Eyrarnjyan G.* Electrodynamical analysis of a transmittive metal-dielectric microstructure by the method of single expression // “Proceedings of the European Microwave Association”, 2008. 4(1). PP. 76–81.
7. *Baghdasaryan H., Knyazyan T., Hovhannisyan T., Marciniak M.* Metal-dielectric multilayer structure supporting surface plasmons: electromagnetic modelling by the method of single expression // “Optical and Quantum Electronics”, 2015. 47(1). PP. 3–15.
8. *Baghdasaryan H., Knyazyan T., Hovhannisyan T., et al.* Influence of chirped DBR reflector on the absorption efficiency of multi-nanolayer photovoltaic structures: wavelength-scale analysis by the method of single expression // “Journal of Telecommunication and Information Technology”, 2017. № 3. PP. 99–106.
9. *Born M., Wolf E.* Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light // “Cambridge University Press”, 2002.

### ELECTROMAGNETIC ANALYSIS OF EPSILON NEAR ZERO ARTIFICIAL MEDIUM BASED ON METAL-DIELECTRIC MULTILAYER NANOSTRUCTURE

*H. Baghdasaryan, T. Knyazyan, T. Hovhannisyan*

*National Polytechnic University of Armenia, Yerevan*

#### ABSTRACT

In the work an electromagnetic analysis of the interaction of plane waves with artificial media with a dielectric permittivity close to zero, the so-called epsilon near zero

ENZ-metamaterials, is carried out. Numerical modelling of the electromagnetic properties of such metamaterials is carried out in the near-infrared wavelength range using the method of single expression. The reflective and transmissive characteristics of hypothetical homogeneous layers of various thicknesses with a dielectric permittivity close to zero and multi-nanolayer metal-dielectric structures based on repetitive bilayers with alternating positive and negative dielectric permittivities are consistently analyzed. It is shown that using such structures it is possible to imitate ENZ-metamaterials. For sufficiently thin repetitive bilayers of the appropriate number, complete agreement with the analysis for homogeneous hypothetical layers of the ENZ-metamaterial is obtained. The obtained research results can be useful for designing and creating multi-nanolayer ENZ-metamaterials.

**Keywords:** multilayer nanostructure, epsilon-near-zero, metal-dielectric metamaterial, electromagnetic analysis, method of single expression.

# СИМУЛЯЦИЯ РАДАРНЫХ ЦЕЛЕЙ В СРЕДЕ GNU RADIO

*Л.С. Геворгян<sup>1</sup>, А.К. Агаронян<sup>1</sup>, Э.Р. Сиволенко<sup>1,2</sup>*

*<sup>1</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет*

*<sup>2</sup>Ереванский государственный университет*

*lilit\_gevorgyan@student.rau.am, aharon.aharonyan@rau.am, eduard.sivolenko@rau.am*

## АННОТАЦИЯ

В данной статье представлена новая методология генерации радиолокационных целей с использованием программно-определяемых радиосистем (SDR) и открытых программных сред. Благодаря гибкости SDR эта методика обеспечивает динамическую генерацию, модуляцию и симуляцию радиолокационных целей в реальном времени, предлагая экономичную и адаптируемую альтернативу традиционным системам тестирования и моделирования радаров. Использование открытых программных платформ, таких как GNU Radio, позволяет создавать доступные и настраиваемые рабочие процессы обработки сигналов, что критически важно для эффективной эмуляции радиолокационных сигналов в реальном времени.

Система поддерживает быструю разработку и оценку алгоритмов обнаружения целей радара, моделируя различные характеристики целей, включая дальность, скорость и эффективную площадь рассеяния (ЭПР). Наша реализация демонстрирует успешную интеграцию SDR и модульных программных сред для генерации синтетических радиолокационных целей с высокой точностью, что способствует развитию исследований и разработок в таких областях, как автономная навигация, оборона и сложная обработка сигналов. Предложенная конфигурация обеспечивает оптимальный баланс между производительностью, гибкостью и доступностью, способствуя инновациям в тестировании и разработке радиолокационных технологий.

**Ключевые слова:** GNU Radio, USRP, радар.

## Введение

Генерация радиолокационных целей – это процесс создания отраженных радиолокационных сигналов в программной среде для тестирования,

оценки и разработки радиолокационных систем. Эта технология позволяет создавать визуальные и цифровые цели в условиях, приближенных к реальным, без наличия физических объектов [1].

Преимущества генерации радиолокационных целей:

- точная симуляция – позволяет в реальном времени генерировать искусственные цели для радаров с высокой точностью;
- безопасность – тестирование проводится без реальных объектов, что снижает риски возможных «аварий»;
- гибкость – можно моделировать различные условия и сценарии без необходимости использования дополнительных технических ресурсов.

## **Материалы и методы**

Для реализации методики использовались программно-определяемая радиосистема USRP B205 и программная среда GNU Radio. USRP B205 (Рис. 1) от компании Ettus Research – это компактное и мощное устройство для SDR-приложений, поддерживающее частотный диапазон от 70 МГц до 6 ГГц. Устройство оснащено встроенными АЦП и ЦАП с разрешением 12 бит и обеспечивает передачу и прием сигналов в реальном времени, что делает его идеальным для моделирования радиолокационных целей и исследований радиочастотного спектра.

GNU Radio [2] – это открытая программная платформа для разработки SDR-систем. Она предоставляет широкий набор инструментов для генерации, обработки и анализа сигналов. Интеграция GNU Radio с USRP B205 позволяет реализовать сложные сценарии моделирования радиолокационных систем.

SDR-системы меняют подход к радиосвязи, заменяя специализированное оборудование программной обработкой сигналов, что обеспечивает высокую гибкость.

В радиолокации SDR-системы позволяют моделировать, изменять и анализировать сигналы в реальном времени, создавая реалистичные сценарии. В данной работе USRP B205 используется для моделирования радиолокационных целей, беспроводных коммуникаций и спектральных исследований благодаря поддержке широкого частотного диапазона и встроенными АЦП и ЦАП с высоким разрешением.

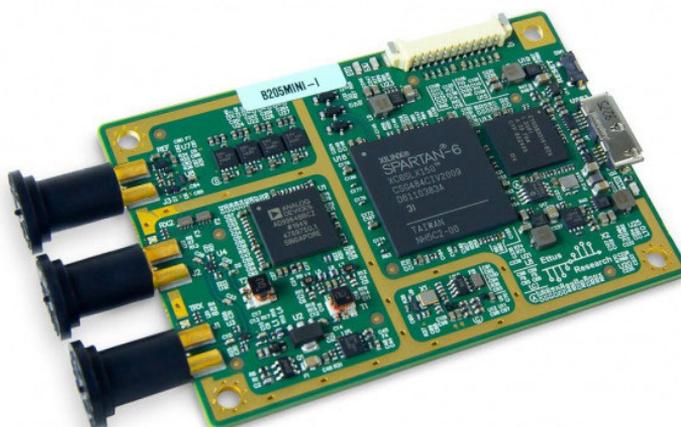


Рисунок 1. ETTUS USRP B205.

В данной работе в среде GNU Radio был разработан поток обработки сигналов (Рис. 2), предназначенный для генерации, обработки и анализа синтетических радиолокационных сигналов. Структура потока состоит из следующих блоков:

- Signal Source – используется для создания основного несущего сигнала, необходимого для генерации радиолокационных целей, связи или тестирования;
- **UHD: USRP Source** – предназначен для приема сигналов с устройства *Universal Software Radio Peripheral (USRP)*, что позволяет получать данные от радиоприемника в реальном времени;
- Multiply – выполняет модуляцию сигнала для дальнейшей обработки;
- Frequency Shift – применяется для сдвига частоты и проверки откликов радара на разных частотах;
- QT GUI Frequency Sink – используется для визуализации окончательных результатов, этот блок позволяет увидеть положение целей и оценить результаты работы радара;
- **UHD: USRP Sink** – предназначен для передачи сигналов на устройство *Universal Software Radio Peripheral (USRP)*, что позволяет отправлять данные передатчику в реальном времени.

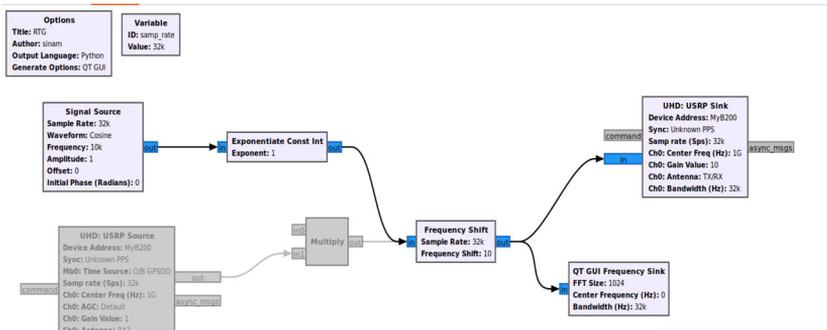


Рисунок 2. Блок-схема обработки сигналов в GNU Radio для моделирования радиолокационных целей.

## Результаты

На графике (Рис. 3) показано спектральное представление сигнала в частотной области.

Пик на частоте 12,57 кГц указывает на основную составляющую сигнала, а уровень -113,53 дБ демонстрирует его относительное усиление. Дополнительные боковые лепестки и небольшие шумовые компоненты указывают на наличие гармоник или остаточных шумов.

График подтверждает, что обработка сигнала выполнена корректно, а передача данных осуществляется с правильным спектральным распределением.

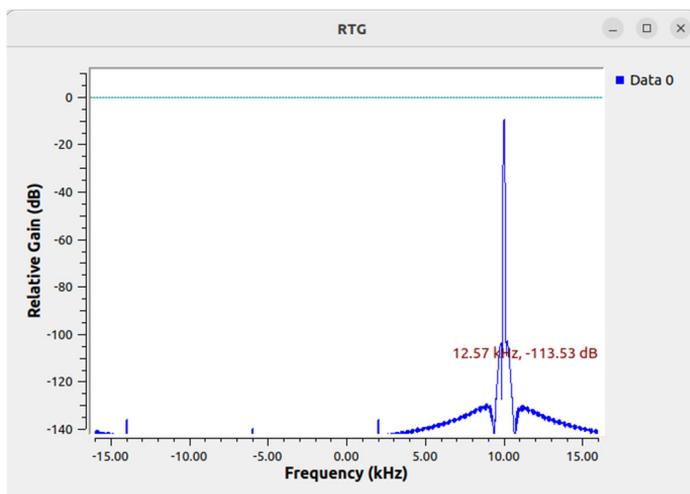


Рисунок 3. Спектральное представление сигнала в частотной области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Fiengo R., Adams A.* Testand evaluation of radar systems operating in the modern electromagnetic spectrum. IET Radar Sonar Navig.18(11), 2189–2198 (2024). <https://doi.org/10.1049/rsn2.126142198-FIENGO> and ADAMS
2. *Сиволенко Э.Р.* Программноопределяемые радиосистемы. Лабораторный практикум. Ер.: Издательство РАУ, 2024. 129с.

## SIMULATION OF RADAR TARGETS IN GNU RADIO ENVIRONMENT

*L. Gevorgyan<sup>1</sup>, A. Aharonyan<sup>1</sup>, E. Sivolenko<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> *Russian-Armenian (Slavonic) University*

<sup>2</sup> *Yerevan State University*

### ABSTRACT

This paper introduces a novel methodology for radar target generation utilizing Software Defined Radios (SDRs) and open-source programming environments. By harnessing the inherent flexibility of SDRs, this approach facilitates the dynamic generation, modulation, and simulation of radar targets in real-time, thereby providing a cost-effective and adaptable alternative to conventional radar testing and simulation systems. Employing an open programming framework, such as GNU Radio, this methodology allows for accessible and customizable signal processing workflows, which are essential for effective real-time radar signal emulation. The system supports rapid prototyping and evaluation of radar detection algorithms by simulating a variety of target characteristics, including range, velocity, and radar cross-section (RCS) signatures. Our implementation exemplifies the successful integration of SDRs and modular programming environments to generate synthetic radar targets with high fidelity, thereby advancing research and development in fields such as autonomous navigation, defence, and sophisticated signal processing. The proposed configuration strikes an optimal balance between performance, flexibility, and accessibility, thereby fostering innovation in the testing and development of radar technologies.

**Keywords:** GNU Radio, USRP, radar.

# ИССЛЕДОВАНИЕ И ВНЕДРЕНИЕ МНОГОЧАСТОТНОГО РАДАРА НЕПРЕРЫВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ SDR В СРЕДЕ С ОТКРЫТЫМ ИСХОДНЫМ КОДОМ

*С.Ж. Оганнесян<sup>1</sup>, А.К. Агаронян<sup>1</sup>, Э.Р. Сиволенко<sup>1</sup>, А.Г. Оганнесян<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет*

*<sup>2</sup>Ереванский государственный университет*

*seroj00hovahannisyan@gmail.com, aharon.aharonyan@rau.am,  
eduard.sivolenko@rau.am, hashovhannisyan07@gmail.com*

## АННОТАЦИЯ

Исследование многочастотных систем непрерывной волны (MFCW) с использованием программно-определяемого радио (SDR) и сред программирования с открытым исходным кодом предлагает универсальную и доступную методологию для современных приложений обработки сигналов. Платформы SDR упрощают генерацию, передачу и прием непрерывных волновых сигналов на нескольких частотах без использования специализированного оборудования, что делает их особенно подходящими для применения в радарх, системах связи и анализе спектра. Используя среды программирования с открытым исходным кодом, такие как GNU Radio, Python и инструменты, совместимые с MATLAB, исследователи и инженеры могут разрабатывать, моделировать и внедрять системы MFCW с повышенной гибкостью и меньшими затратами. В этой статье рассматриваются фундаментальные принципы проектирования сигналов MFCW с акцентом на синтез сигналов, частотную модуляцию и анализ сигналов в реальном времени. Это также подчеркивает возможность применения систем MFCW на основе SDR в различных областях, включая дистанционное зондирование, мониторинг окружающей среды и автомобильные радары, тем самым демонстрируя надежность и масштабируемость SDR в самых разных условиях. Полученные результаты показывают, что инструменты с открытым исходным кодом позволяют быстро создавать прототипы, настраивать и использовать их, что в конечном итоге способствует инновациям в разработке и внедрении технологии MFCW. Этот подход обеспечивает экономичную и гибкую основу как для академических, так и для коммерческих приложений, представляя собой убедительную альтернативу традиционным методам, ориентированным на аппаратное обеспечение, в области многочастотной обработки сигналов.

**Ключевые слова:** GNU Radio, USRP, радар, MFCW, 3FCW.

## Введение

Существует 4 основных класса радаров в зависимости от типа передаваемых ими сигналов: непрерывные волны (CW), частотно-модулированные непрерывные волны (FMCW), ступенчато-частотные непрерывные волны (SFCW) и импульсные волны.

В рамках данной работы мы использовали MFCW сигнал – разновидность CW-сигналов. Его главное преимущество перед сигналами CW или FMCW заключается в том, что MFCW позволяет одновременно отслеживать несколько объектов за счет разных частот.

В качестве программной среды использовали GNU Radio, поскольку она более доступна довольно широкому сегменту общества и особенно инженерам. Кроме того, GNU Radio легче и гибче, поскольку позволяет импортировать библиотеки через Python. Также следует отметить, что GNU Radio предназначено для работы с сигналами SDR.

Одними из важнейших узлов радаров являются фильтры и особенно – согласующий фильтр. Основа их работы заключается в том, что отправляется известный сигнал, а отраженный сигнал проверяется на наличие общих элементов выходного сигнала. Этот фильтр улучшает отношение сигнал/шум за счет уменьшения спектральной полосы шума и, кроме того, уменьшает шум в полосе пропускания вейвлета за счет формы спектра вейвлета. Он имеет оптимальную производительность и низкие вычислительные затраты.

## Материал и методы

### 1. Физика

MFCW-радар (Multi – Frequency Continuous Waveform) – это радар непрерывной волны, который работает на нескольких частотах передачи одновременно и использует общую обработку сигнала для эхо-сигналов. Преимущество перед радаром FMCW заключается в том, что приемнику требуется гораздо меньшая полоса пропускания. Этот тип радара обычно использует спектрограммный анализ полученного эхо-сигнала и смешивает его в основную полосу и, следовательно, способен обнаруживать и разрешать две цели с разными скоростями, но на одинаковом расстоянии. Од-

нако две цели с одинаковой скоростью, но на разных расстояниях не могут быть разрешены. В общем, с помощью этого метода невозможно обнаружить неподвижные цели или цели, летящие по касательной.

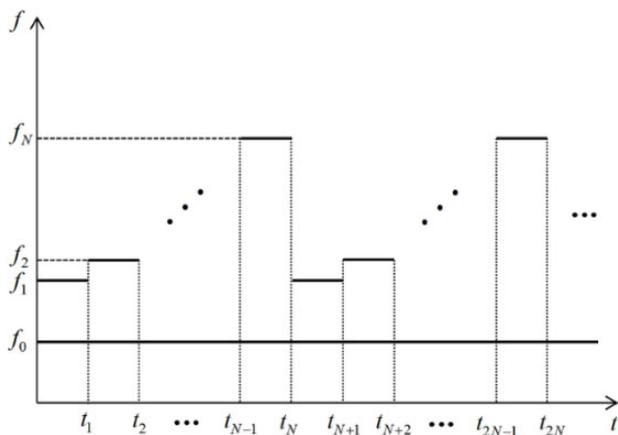


Рисунок 1.

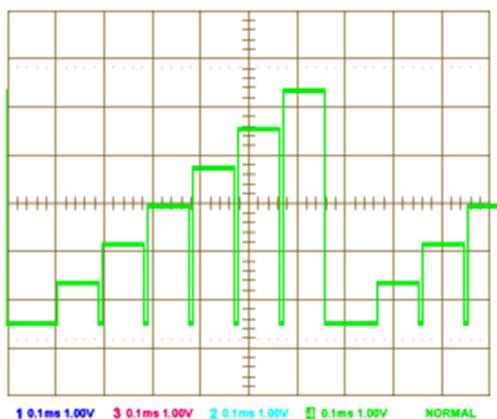


Рисунок 2.

## 2. Архитектура многочастотного радара непрерывной волны

Архитектура радара MFCW на Рис. 3 будет называться радаром с трехчастотной непрерывной волной (3FCW). Как следует из названия, радар 3FCW одновременно передает три различных частотных тона. Три источника микроволновых частот с частотой  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  обеспечивают требуемые тона. Хотя это не показано на Рис. 3, все три источника частот синхро-

низированы по фазе с одним и тем же опорным кварцевым генератором. Генераторы с фазовой синхронизацией обеспечивают превосходный фазовый шум вместе с точным частотным интервалом между генераторами. Поскольку все генераторы синхронизированы с одним и тем же опорным источником, частоты имеют тенденцию дрейфовать вместе, что поддерживает требуемое разделение частот. Три тона объединяются в сумматоре мощности Уилкинсона (показан как соединение на Рис. 3), а затем проходят через усилитель мощности перед передачей антенной. Поскольку радар является непрерывным (CW), одна передающая и одна приемная антенна используются для обеспечения улучшенной изоляции между передатчиком и приемником.

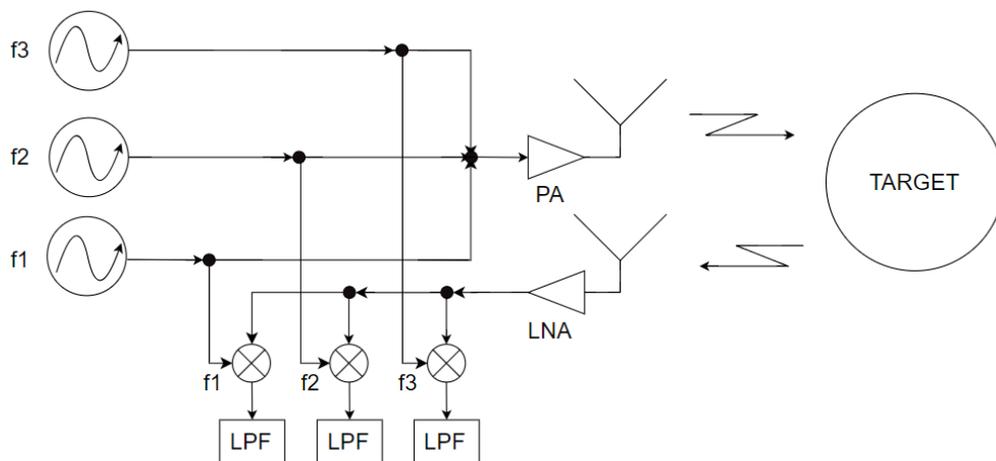


Рисунок 3.

Приемник 3FCW представляет собой архитектуру приемника прямого преобразования. Таким образом, входящий принятый сигнал демодулируется непосредственно в полосу частот без промежуточной частоты. Для наглядности предположим, что принятый сигнал имеет вид:

$$s_{RX}(t) = \cos(2\pi(f_1 + f_{D1})t) + \cos(2\pi(f_2 + f_{D2})t) + \cos(2\pi(f_2 + f_{D3})t), \quad (1)$$

где  $f_{D1}$ ,  $f_{D2}$  и  $f_{D3}$  – это частоты Доплера, модулированные на тон один, два и три соответственно. После прохождения через малошумящий усилитель мощность принятого сигнала делится поровну между смесителями. Затем

сигналы на смесителях демодулируются локальными генераторами (LO) с частотой  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ . Пренебрегая амплитудными коэффициентами, выход смесителя, который демодулирует с частотой LO  $f_1$ , равен:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_1 t) &= \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi(f_1 + f_{D1})t) \\ &\quad + \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi(f_2 + f_{D2})t) \\ &\quad + \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi(f_3 + f_{D3})t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_1 t) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi f_{D1} t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_1 + f_{D1})t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_2 - f_1 + f_{D2})t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_2 + f_1 + f_{D2})t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_3 - f_1 + f_{D3})t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi(f_3 + f_1 + f_{D3})t) \end{aligned} \quad (3)$$

Смеситель выдает шесть различных частот вместе с, возможно, некоторыми другими нежелательными побочными сигналами. Фильтрация нижних частот на выходе смесителя изолирует член  $\cos(2\pi f_{D1} t)$ . Максимальная ожидаемая частота Доплера управляет выбором частоты среза фильтра. Предполагается,  $f_{D1}, f_{D2}, f_{D3} \ll (f_2 - f_1), (f_3 - f_1) \ll f_1, f_2, f_3$  что таким образом, что члены суммы и разности частот отбрасываются, в то время как член  $\cos(2\pi f_{D1} t)$  сохраняется. Аналогичный вывод показывает, что выход двух других комбинаций смесителя/фильтра нижних частот составляет  $\cos(2\pi f_{D2} t)$  и  $\cos(2\pi f_{D3} t)$ . Приемник выводит три отдельных канала доплеровской частоты.

### 3. Результаты

На Рис. 4 представлен созданный нами код, принцип работы которого заключается в следующем: создается сигнал с системой 3CFW, который затем тонально модулируется на несущей частоте 2,4 GHz и передается в эфир с использованием SDR типа USRP B200. Для этого сначала симулируется локальный генератор с частотой 10 kHz. Затем с помощью инструмента Frequency Shift генерируются второй и третий сигналы с частотами

20 kHz и 30 kHz соответственно, которые представляют собой составляющие тонального сигнала ( $f_1, f_2, f_3$ ). Этот тональный сигнал впоследствии передается в эфир, затем сталкивается с препятствием и возвращается с измененной частотой вследствие доплеровского сдвига ( $f_{D1}, f_{D1}, f_{D1}$ ). Однако, как уже было упомянуто и видно на рисунке, передаваемый сигнал оказывается в другом частотном диапазоне (2400010–2400030 kHz). Это вызвано особенностями распространения сигнала в среде. Для решения этой проблемы выполняется модуляция с использованием инструмента Multiply Conjugate. На последнем этапе с помощью инструментов QT GUI Time Sink и QT GUI Frequency Sink фиксируются и визуализируются результаты в временной и частотной областях, как показано на Рис. 5.

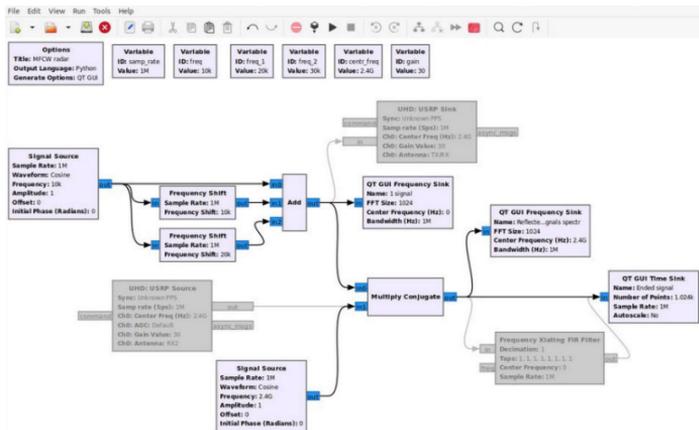


Рисунок 4. Предварительная структурная схема радара MFCW.

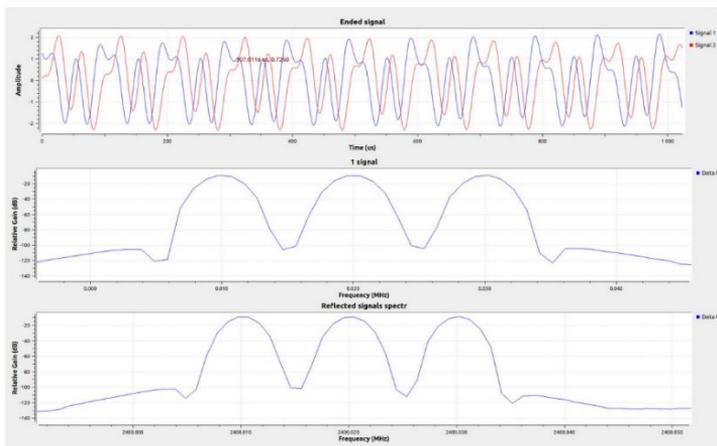


Рисунок 5. Результаты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. <https://en.wikipedia.org/wiki/Radar#Configurations>
2. <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/radar-signal>
3. <https://www.radartutorial.eu/02.basics/rp33.en.html>
4. <https://www.elprocus.com/matched-filter/>
5. [https://en.wikipedia.org/wiki/Matched\\_filter#:~:text=The%20matched%20filter%20is%20the,of%20the%20out%2Dgoing%20signal.](https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_filter#:~:text=The%20matched%20filter%20is%20the,of%20the%20out%2Dgoing%20signal.)
6. [https://www.researchgate.net/publication/351966382\\_Phase\\_Difference\\_Compensation\\_Method\\_for\\_Range\\_Estimation\\_in\\_an\\_MFCW-CW\\_Radar](https://www.researchgate.net/publication/351966382_Phase_Difference_Compensation_Method_for_Range_Estimation_in_an_MFCW-CW_Radar)

### **MULTI-FREQUENCY CONTINUOUS WAVE RADAR RESEARCH AND IMPLEMENTATION USING SDR SYSTEMS IN THE OPEN-SOURCE ENVIRONMENT**

*S. Hovhannisyan<sup>1</sup>, A. Aharonyan<sup>1</sup>, E. Sivolenko<sup>1</sup>, H. Hovhannisyan<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Russian-Armenian (Slavonic) University*

*<sup>2</sup>Yerevan State University*

#### **ABSTRACT**

The investigation of multi-frequency continuous wave (MFCW) systems, utilizing software-defined radio (SDR) and open-source programming environments, offers a versatile and accessible methodology for contemporary signal processing applications. SDR platforms facilitate the generation, transmission, and reception of continuous wave signals across multiple frequencies without reliance on specialized hardware, rendering them particularly suitable for applications in radar, communication systems, and spectrum analysis. By employing open-source programming environments such as GNU Radio, Python, and MATLAB-compatible tools, researchers and engineers have the ability to develop, simulate, and implement MFCW systems with enhanced flexibility and reduced costs.

This discourse examines the fundamental principles of MFCW signal design, emphasizing waveform synthesis, frequency modulation, and real-time signal analysis. It further underscores the implementation of SDR-based MFCW systems across various applications, including remote sensing, environmental monitoring, and vehicular radar, thereby demonstrating the robustness and scalability of SDR in a diverse array of contexts. The findings illustrate that open-source tools enable rapid prototyping, customization, and accessibility, ultimately fostering innovation in the development and deployment of MFCW technology. This approach provides a cost-effective and flexible framework for both academic and commercial applications, presenting a compelling alternative to traditional hardware-centric methods in the realm of multi-frequency signal processing.

**Keywords:** GNU Radio, USRP, radar, MFCW, 3FCW.

# ԳՆԴԱԶԵՎ ՀԱՅԵԼԻՈՎ ՎԵՐԱԿԱԶՄԱՎՈՐՎՈՂ ԱՆՏԵՆԱՅԻՆ ՏԵՐՄԻՆԱԼ

*Ա.Ս. Մարգարյան, Ն.Ս. Դավթյան, Կ.Ռ. Մալխասյան*

*Հայաստանի Ազգային Պոլիտեխնիկական Համալսարան  
arevikantenna@gmail.com, ninadavtyan6@gmail.com, kmalkhasyan75@gmail.com*

## ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Տեխնոլոգիաների օրեցօր զարգացմանը զուգահեռ առաջ են գալիս նոր պահանջներ, որոնց բավարարելու համար անհրաժեշտ է նոր ինժեներական լուծումներ և սարքավորումների վերազինում: Շատ երկրներում այսօր արդեն իրականություն է հինգերորդ սերնդի բջջային կապը, որը թույլ տվեց միաժամանակ սպասարկել մեծ թվով բաժանորդների, ապահովել բարձր արագությամբ և քիչ հապաղմամբ տվյալների հաղորդում, ցանցի առավել հասանելիություն, ինչպես նաև նվազեցնել աղմուկների մակարդակը: Աշխատանքի նպատակն է նախագծել անտենային տերմինալ, որը կօգտագործվի հինգերորդ սերնդի և հետագայում վեցերորդ սերնդի բջջային կապի համակարգերում: Այս հոդվածում առաջարկվում է հիբրիդային կառուցվածքի՝ գնդաձև հայելի և գլանաձև հենարանային մակերևույթով գծային ճառագայթիչի օղակաձև փուլավորված անտենային ցանցերի սեկտորներ, կառուցվածքային լուծումը: Գլանաձև հենարանային մակերևույթով գծային ճառագայթիչի օղակաձև փուլավորված անտենային ցանցերի սեկտորների տարրերը կարող են լինել պարզ patch-անտենաներ, որոնք ֆիդերով կամ օպտիկամանրաթելային մալուխով միացված են ընդունիչին և հաղորդիչին, և առանձին կառավարվում են փուլաշրջիչների միջոցով: Առաջարկվող գնդաձև անտենային տերմինալը կարող է աշխատել ընտրված հաճախականային շերտերում և ապահովել միաժամանակ մի քանի հաճախաշերտերում աշխատանքը՝ բարձր ուժեղացման գործակցով: Նաև, գնդաձև անտենային տերմինալը կարող է աշխատել միաժամանակ հաղորդման և ընդունման ռեժիմներում: Այսպիսով, նման անտենային տերմինալը կարող է աշխատել բազմաճառագայթային և բազմահաճախականային ռե-

ժիմներով: Վերակազմավորվող գնդաձև անտենային տերմինալը հեշտությամբ կարող է դառնալ զանգվածային արտադրության գործիք՝ հանդիսանալով բարձր սերնդի բջջային կապի ցանցերի բազային կայանների արդյունավետ հանգույց:

**Հիմնաբառեր՝** գնդաձև հայելիով անտենա, վերակազմավորվող անտենա, անտենային տերմինալ, գլանաձև հենարանային մակերևույթով գծային ճառագայթիչ:

Նոր տեխնոլոգիաների զարգացումը և աշխատանքային հաճախատիրություն անցումը ալիքների միլիմետրական տիրույթ թույլ տվեց բաժանորդներին մատուցել բարձր արագությամբ և քիչ հապաղմամբ ծառայություններ [1], [2], [3]: Ավելին, հինգերորդ և վեցերորդ սերնդի անլար հեռահաղորդակցական ցանցերը առանցքային կլինեն նոր հավելվածների, այդ թվում վիրտուալ իրականության, ռադարների, ինքնավար մեքենաների, տվիչների, արբանյակային և հոլոգրաֆիկ հեռահաղորդակցության ոլորտներում, որոնք արդեն նախագծվում են մասնագետների կողմից [4], [5], [6]: Ակնկալվում է, որ վերը նշված տեխնոլոգիաները կառևտրայնացվեն մինչև 2030 թվականը: Որպես 6G-ի հավանական ստանդարտ քննարկվում է 100 ԳՀց հաճախականային տիրույթը, որը թույլ կտա հասնել տվյալների փոխանցման մեծ արագության՝ մինչև տերաբայթ/վայրկյան [7]:

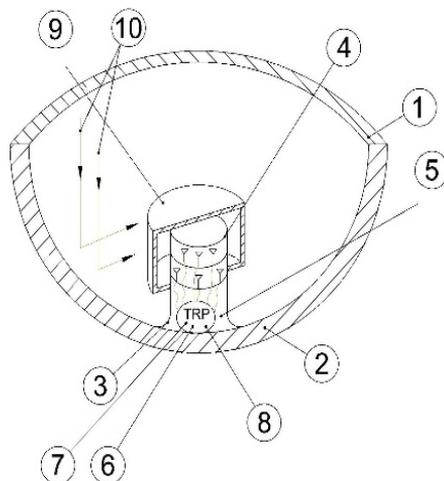
2023 թվականին Հեռահաղորդակցության Միջազգային Միության (ՀՄՄ) Համաշխարհային Ռադիո-Հեռահաղորդակցության Կոնֆերանսի (WRC-23) ժամանակ սկիզբ դրվեց բջջային կապի բոլոր ծառայությունների համար 5G և 6G ցանցերի զարգացման նոր դարաշրջան [8]:

Մինչ օրս բջջային կապ ապահովող կազմակերպությունների խնդիրն է եղել լուծել օրեցօր աճող բաժանորդների թվի և միաժամանակյա բարձր որակի կապ ապահովելու հիմնահարցը՝ տարբեր սարքավորումների համար: Այդ պատճառով անհրաժեշտություն է առաջացել անցում կատարել աշխատանքային բարձր հաճախականությունների տիրույթ: Սակայն բարձր հաճախականությունների տիրույթում աշխատելը դժվար է, քանի որ պետք է ապահովել մեծ թողունակություն: Դրա

համար դինամիկ տերմինալների ստեղծումը այլևս անհրաժեշտություն է [9], [10], ինչպես նաև արհեստական բանականության կիրառումը համակարգերի կառավարման համակարգերում՝ բաժանորդների ընտրման, հաճախականությունների համալարման և թողունակությունների առավել արդյունավետ օգտագործման համար:

Առաջարկվող գնդաձև հայելիով անտենային տերմինալը ունի գլանաձև ճառագայթիչ, որը կազմված է երկու օղակաձև փուլավորված անտենային ցանցերի սեկտորներից, որոնք կարող են աշխատել ընտրված հաճախաշերտերում (օրինակ՝ 3 մոտ ցածր SՀց կամ բարձր ԳՀց տիրույթներ), և ապահովել միաժամանակ մի քանի հաճախաշերտերում աշխատանքը՝ բարձր ուժեղացման գործակցով: Սեկտորները կարող են միմյանցից առանձին միացված լինել ընդունիչին, հաղորդչին մոդուլացնող կոդավորող սարքավորումներին և միմյանցից առանձին սնուցվել: Դրա շնորհիվ հնարավոր կլինի ձևավորել անտենայի բազմաճառագայթային, բարձր ուղղվածությամբ ուղղվածության դիագրամներ, տարբեր հիմնական ճառագայթների տեսքով և ուղված տարբեր ուղղություններով:

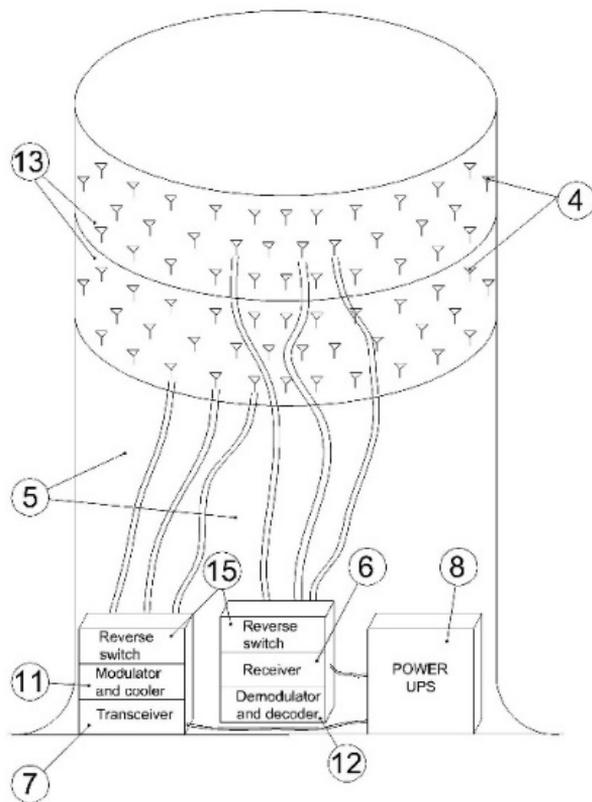
Այստեղ առավել մանրամասն նկարագրված է վերակազմավորվող գնդաձև հայելիով անտենային տերմինալի կառուցվածքը, որը պատկերված է Նկ. 1-ում:



Նկ. 1. Անտենային տերմինալի կառուցվածքը:

Անտենային տերմինալն ունի գնդաձև հայելի (1), որը տեղադրված է անշարժ ամուր հիմքում (2), գնդի կենտրոնական մասում ամրացված՝ հայելու մակերևույթից մինչև գնդի շառավղի կեսին հավասար բարձրություն ունեցող գլանաձև հենարանային մակերևույթով զծային ճառագայթիչ (3), զծային ճառագայթիչը (3) կազմված է տարբեր հաճախականային շերտերում աշխատող օղակաձև փուլավորված անտենային ցանցերի սեկտորներից, որոնց տարրերը (4) ֆիդերային տրակտներով/մալուխներով (5) միանում են ընդունիչին (6), հաղորդիչին (7), սնուցման համակարգին (8):

Նկ. 2-ում պատկերված է գլանաձև հենարանային մակերևույթի վրա տեղադրված օղակաձև սեկտորներից կազմված զծային ճառագայթիչի առավել մանրամասն պատկերը:



Նկ. 2. Գլանաձև հենարանային մակերևույթի վրա տեղադրված օղակաձև սեկտորներից կազմված զծային ճառագայթիչ:

Շատ կարևոր է այն փաստը, որ գծային ճառագայթիչը տեղադրված է շրջանագծի կես շառավղին հավասար բարձրությամբ, որովհետև ինչպես հայտնի է գնդաձև հայելիով անտենաները ի տարբերություն պարաբոլիկ անտենաների չունեն կիզակետ և գնդաձև մակերևույթից անդրադարձած էներգիան հավաքվում է կաուստիկայի մակերեսին, և կաուստիկայի մակերեսի գագաթը գտնվում է շրջանագծի կես շառավղին հավասար հեռավորության վրա: Վերակազմավորվող գնդաձև անտենային տերմինալի աշխատանքի սկզբունքը հետրյալն է [11]:

Անշարժ գնդաձև հայելուց (1) անդրադարձած ընդունվող ազդանշանի ճառագայթների (10) էներգիան հասնում է գծային ճառագայթիչի փուլավորված անտենային ցանցերի տարրերին (4), հետո մշակվում է ապամոդուլացնողապակողավորող մոդուլում (12), ապա կուտակվում է ընդունիչում (6), միննույն ժամանակ ճառագայթման ռեժիմում՝ ազդանշանը հաղորդիչից (7) մոդուլացնող-կողավորող մոդուլում (11) ձևափոխվելով ուղարկվում է գծային ճառագայթիչի փուլավորված անտենային ցանցերի տարրերին (4), ձևավորում է ճառագայթիչի ՈւԴ-ն, այնուհետև գնդային հայելուց անդրադառնալով՝ հայելու բացվածքում ձևավորվում է անտենային տերմինալի ուղղվածության դիագրամը (ՈւԴ-ն կամ ՈւԴ-ները) համապատասխանաբար հաղորդելով օգտակար ազդանշանը (կամ ազդանշանները): Փուլավորված անտենային ցանցերը դասավորված են գծային ճառագայթիչի գլանաձև հենարանային մակերևույթի վրա և ապահովում են ամբողջ անտենային տերմինալի ՈւԴ-ի (կամ ՈւԴ-ների) տեսածրումը էլեկտրական եղանակով:

Գլանաձև հենարանային մակերևույթի վրա տեղադրվում են գծային ճառագայթիչի օղակաձև փուլավորված անտենային ցանց-սելտորները (13), որոնք բաղկացած են տարրերից (4)՝ տպասալային եղանակով պատրաստված պարզ անտենաներից (նկ. 2) կամ ալիքատարի պատերի վրա կատարված ճեղքերից (14) (նկ. 3), տարրերը ֆիդերային տրակտով/մալուխներով (5) միացվում են հաղորդչին (7) և ընդունիչին (6) և փոխանջատիչների (15) օգնությամբ միմյանցից առանձին կառավարվում: Փոխանջատիչների (15) աշխատանքի շնորհիվ կարելի է մի-

մյանցից անկախ էներգասնուցել որևէ տարր կամ փոփոխել հաղորդվող ազդանշանի փուլը, որի արդյունքում իրականացվում է ՈւԴ-ի էլեկտրական տեսածրումը՝ առանց մեխանիկական տեղաշարժի: Հաղորդիչն (7) ու ընդունիչն (6)՝ ամեն մեկն իր հերթին առանձին միանում են մոդուլացնող-կոդավորող (11) և ապամոդուլացնող-ապակոդավորող մոդուլներին (12):

Էներգասնուցումը և անտենայի ՈւԴ-ի ճռճումը ավտոմատ կառավարվում է արհեստական բանականության կիրառմամբ:

Այսպիսով, նման անտենային տերմինալը կարող է աշխատել բազմաճառագայթային և բազմահաճախականային ռեժիմներով: Վերականգնվորվող գնդաձև անտենային տերմինալը հեշտությամբ կարող է դառնալ զանգվածային արտադրության գործիք՝ հանդիսանալով բարձր սերնդի բջջային կապի ցանցերի բազային կայանների արդյունավետ հանգույց:

#### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Yang B., Yu Z., Lan J., Zhang R., Zhou J. and W. Hong*, Digital beamforming-based massive MIMO transceiver for 5G millimeter-wave communications, *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, vol. 66, no. 7, Jul. 2018. PP. 3403–3418.
2. *Wang Y. et al.*, “A 39-GHz 64-element phased-array transceiver with built-in phase and amplitude calibrations for large-array 5G NR in 65-nm CMOS,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 55, no. 5, May 2020. PP. 1249–1269.
3. *Semiari O., Saad W., Bennis M., and Debbah M.*, Integrated millimeter wave and sub-6 GHz wireless networks: A roadmap for joint mobile broadband and ultra-reliable low-latency communications”, *IEEE Wireless Communications*, vol. 26, no. 2, Apr. 2019. PP. 109–115.
4. *Nguyen D.C. et al.* 6G Internet of Things: A comprehensive survey, *IEEE Internet Things J.*, vol. 9, no. 1, Jan. 2022. PP. 359–383.
5. *Alwis C.D. et al.*, Survey on 6G frontiers: Trends, applications, requirements, technologies and future research, *IEEE Open J. Communications Soc.*, vol. 2, 2021. PP. 836–886.
6. *Jiang W., Han B., Habibi M.A. and Schotten H.D.*, The road towards 6G: A comprehensive survey, *IEEE Open J. Communications Soc.*, vol. 2, 2021. PP. 334–366.
7. As 2003 Nears, What Is the Status of 5G and What Can We Expect From 6G in the Future? November 22, 2022. As 2023 Nears, What Is the Status of 5G and What Can We Expect From 6G in the Future? | *Microwave Journal*.

8. Spectrum Policy Trends 2024, February 2024. P. 5. Spectrum-Policy-Trends-2024.pdf (gsma.com)
9. *Sargsyan A., H. Abrahamyan, T. Manukyan* “Application of the antenna terminal in the 5G cellular network, NPUA Bulletin , vol. 1, 2017. PP. 401–406 (in Armenian).
10. *Sargsyan A.*, Architectural Design of the Multiple Beam Multiple Feed Spherical Reflector Antenna Terminal. Proceedings of 29th ESA Antenna Workshop on Multiple Beams and Reconfigurable Antennas, ESTEC. Noordwijk, 2007. PP. 356–358.
11. *Մարգարյան Ա.Ս, Դավթյան ԵՄ.* N 913Y Գնդաձև հայելիով անտենային տերմինալը»:

## **РЕКОНФИГУРИРУЕМЫЙ АНТЕННЫЙ ТЕРМИНАЛ С СФЕРИЧЕСКИМ ЗЕРКАЛОМ**

*А.С. Саргсян, Н.М. Давтян, К.Р. Малхасян*

*Национальный Политехнический университет Армении*

### **АННОТАЦИЯ**

Вместе с ежедневным развитием технологий возникают новые требования, для удовлетворения которых необходимы новые инженерные решения и перевооружение оборудования. Мобильная связь пятого поколения сегодня уже является реальностью во многих странах, что позволило обслуживать большое количество абонентов одновременно, обеспечить высокоскоростную передачу данных с малой задержкой, большую доступность сети, а также снизить уровень шума. Целью работы является разработка антенного терминала, который будет использоваться в системах мобильной связи пятого и позднее шестого поколений. В этой статье предлагается структурное решение гибридной конструкции сферической антенны с цилиндрической опорной поверхностью линейной излучателем которая кольцевая фазированная антенная решетка. Элементы кольцевого фазированного антенного решетки с цилиндрической опорной поверхностью линейной излучателя могут быть патч-антенны, которые с фидером или оптоволоконный кобельком подключены к приемнику и передатчику и отдельно управляются фазовращателями. Предлагаемый сферический антенный терминал может работать в выбранных диапазонах частот и обеспечить одновременную работу в нескольких диапазонах частот с высоким коэффициентом усиления. Также сферический антенный терминал может работать одновременно в режимах передачи и приема. Таким образом, такой антенный терминал может работать в многолучевом и много-частотном режимах. Реконфигурируемый сферический антенный терминал может легко стать инструментом массового производства, являясь эффективным узлом для базовых станций в сетях мобильной связи высокого поколения.

**Ключевые слова:** сферическая антенна, реконфигурируемая антенна, антенный терминал, линейный излучатель с цилиндрической опорной поверхностью.

## RECONFIGURABLE SPHERICAL REFLECTOR ANTENNA TERMINAL

*A. Sargsyan, N. Davtyan, K. Malkhasyan*

*National Polytechnic University of Armenia*

### ABSTRACT

In parallel of day-by-day development of technologies, it is occurring new needs, and to meet them it is needed engineering solutions and equipment upgrading. Nowadays in many countries there are mobile networks of fifth generation, which allows to serve many subscribers at the same time, to provide packet transmitting with high-speed and low lateness, more network's reachability, and also to reduce the noise level. The purpose of work is to design antenna terminal, which can be used in fifth generation mobile networks and in future in sixth generation mobile networks. This article proposes the design solution of the hybrid construction: spherical reflector and a set of the ring-shape sectors of phased arrays mounted on a cylindrical-shape surface of the linear feed. Linear feed with cylindrical support surface phased array sectors' elements can be simple patch-antennas, and connected to receiver, transceiver via feeder/fiber-optic cable, and separately controls via reverse switch. The proposed spherical reflector antenna terminal can work in selected frequency bands and will be able to provide operation in different frequency bands at the same time with a high gain factor. Also, spherical reflector antenna terminal can work in transmitting and receiving modes at the same time. So, such antenna terminal can work in multiple beam and multiple frequency range modes. Reconfigurable spherical antenna terminal is easy to be a tool of the mass-production for being used as an effective node of base stations of high-generation mobile communication networks.

**Keywords:** Spherical reflector antenna, Reconfigurable antenna, Antenna terminal, Linear feed with cylindrical support surface.

# БИОЛОГИЯ

## PATHOLOGY AND CLINICS OF AFRICAN SWINE FEVER CAUSED BY NATURAL LOW-VIRULENT VARIANTS IN THE SOUTHERN CAUCASUS

*H. Avagyan, S. Hakobyan, B. Baghdasaryan, E. Arakelova*

*Institute of the Molecular Biology NAS RA  
a.avagyan@yahoo.com, 777sona7@gmail.com,  
artdrbaghdasaryan@gmail.com, elinaa72@mail.ru*

### ABSTRACT

Since the detection of African swine fever virus (ASF) genotype II in 2007, acute and lethal cases of the disease have been observed. However, after several years of spread in the Eurasian region, the clinical signs of the disease have changed. Currently, this disease can be acute, subclinical, chronic or asymptomatic. Cases of complete recovery of infected pigs, disappearance of the ASF virus from their tissues and secretions are described. This form of the disease first appeared in Armenia at the end of 2011. This virus was described and identified as the Dilijan2011IMB strain. The aim of our study was to investigate the main features of clinical, pathological, immunological, virological and genetic parameters involved in the development of new forms of African swine fever (ASF). Based on the data obtained, it can be concluded that the chronic form of ASF occurs due to a less expressed immune response, as well as a decrease in virus titers in the blood and tissues of infected pigs.

**Keywords:** African swine fever virus, chronicity, clinical presentation, histopathology, immunopathology.

### 1. Introduction

African swine fever virus (ASFV) (genotype II) entered Eurasia in 2007, and at the initial stage of circulation, showed the presence of acute and super-acute forms of the disease with a 100% lethal outcome [1–3]. However, after

several years, individual cases of subacute forms of the disease have been recorded. Thus, at the end of 2011, cases of the chronic or subacute form of ASF were identified in Dilijan (Armenia) [4].

As African swine fever (ASF) spreads beyond its initial African location to domestic pigs in other regions, the disease's progression typically accelerates. This results in more animals entering subacute and chronic phases, potentially leading to longer lifespans in affected pigs and reduced visible clinical symptoms. Thus, in Spain, two years after the introduction of ASF, domestic virus-carrying pigs were detected [5]. Some studies have identified reduced-virulence isolate ASFV genomes in apparently healthy pigs in Uganda and Kenya [6,7]. In Armenia, similar processes occurred 4 years after the emergence of ASFV.

Previously, the following main characteristics of the chronicity of the disease were recorded: (1) a reduction of the virus in infected organs and blood; (2) a decrease in the hemadsorption activity of the virus; (3) a decrease in the manifestation of the main clinical and laboratory parameters of ASF (as decreased in hemorrhages and immunopathological manifestations); and (4) prolonged viremia [4].

The African swine fever virus samples of 2010–2020 was confirmed in our laboratory.

In recent years, there have been increasing reports of new cases of ASF virus with an atypical course. The pathology is characterized by a significantly prolonged disease duration, sometimes reduced mortality, and prolonged viremia. Such changes are often associated with the circulation of the virus in the feral pig population [8,9]. In China, there have been many cases of ASF virus with reduced virulence in domestic pigs since 2018 [10,11].

Attenuated viruses cause less severe pathological alterations compared to the more aggressive pathological changes induced by their virulent wild-type origins. Although there is evidence of the presence of mildly pathogenic strains of ASFV belonging to genotype II [10, 12-15], no study has provided a definitive description of the pathology development in natural attenuation. In this article, we try to show the differences in the pathogenetic characteristics of naturally attenuated strains of ASFV detected in the South Caucasus in 2018–2020.

We conducted a comparative analysis of the ASFV content in the serums of pigs with chronic and acute forms of ASF. Long viremia was observed, starting from the first clinical manifestations, and ending with the terminal stage of the

disease. Viremia levels were 1.5–3.5 log lower than similar values in the acute form of ASF.

## **2. Materials and Methods**

### **2.1. Animals**

All the studied animals were kept at 14 farms located in the South Caucasus (38.960246, 46.595191). The first outbreak (Kovsakan 2018) was recorded in the late summer of 2018 (number of animals: 19); the second outbreak (Kovsakan 2019), in the summer of 2019 (number of animals: 19); the third outbreak (Kovsakan 2020) occurred at the end of 2019, beginning of 2020 (number of animals: 17). This article presents data from 55 pigs with unusual ASF (Arm007) variants (tentatively designated as chronic form and persistent form, which is possible with periodic reactivation).

### **2.2. Sample collection**

Samples from the liver, brain, bone marrow, heart, kidney, spleen, lymph nodes, and lung were kept in separate, disposable plastic containers. Clinical signs of infection were recorded daily [4]. Gross anatomical pathology characteristics were observed during routine postmortem examinations.

### **2.3. DNA Isolation and Quantitative Real-Time PCR (p72)**

In order to determine ASFV gene expressions in different organs of pigs, first, total viral RNA/DNA was isolated (HiGene™ Viral RNA/DNA Prep Kit (BIOFACT Daejeon, Republic of Korea)). Quantitative real-time PCR was carried out using SYBR green methods on an Eco Illumina Real-Time PCR System device (Illumina Inc. San Diego, CA, USA) [16]. Each reaction mixture (20 µL) composition was as follows: 4 µL 5 × HOT FIREPol® EvaGreen® qPCR Mix Plus (ROX) (Solis BioDyne Tartu, Estonia), 0.2 µL of each specific primer, 4 µL template DNA/cDNA, and 11.6 µL ddH<sub>2</sub>O. The thermal profile was set as follows: Polymerase activation: 95 °C for 12 min, 40 cycles: 95 °C for 15 s, 52 °C for 30 s, and 72 °C for 30 s. Standard curves were generated using serial 10-fold dilutions of viral DNA. The fluorescence threshold (Ct) was calculated using

the ECO-Illumina system software v5.0. Primers used for amplification were designed and ordered from Integrated DNA Technology-IDT (<https://www.idtdna.com/pagesas>) (accessed on 5 February 2019) [17].

The primers and fluorescent-labeled probe used were as follows:

ASFV B646L gene:

Fluorescent probe–6-FAM/TAMRA

Sequence 1–TGC TCA TGG TAT CAA TCT TAT CG

Sequence 2–CCA CTG GGT TGG TAT TCC TC

Sequence 3–/56-FAM/TTC CAT CAA AGT TCT GCA GCT CTT/36-TAMSp/

$\beta$ -actin gene:

Fluorescent probe–TET/ZEN/IBFQ

Sequence 1–CTC GAT CAT GAA GTG CGA CGT

Sequence 2–GTG ATC TCC TTC TGC ATC CTG TC

Sequence 3–/5TET/AT CAG GAA G/Zen/G ACC TCT ACG CCA ACA CGG/3IABkFQ/

The  $\beta$ -actin gene was used as a housekeeping gene.

To align the cDNA plots and ASFV infection titers, Cq values were rescaled after comparison with viral genome copies and modified in absolute amounts along the y-axis for better visualization. To evaluate the profile of the ASFV replication efficiency, the genes with different temporal expression patterns were identified [18,19].

## **2.4. Hemadsorption Assay**

A hemadsorption assay (HAD) was performed and expressed in log 10 hemadsorption units (HADU50/mL) [20].

## **2.5. Tissue Samples**

Liver, kidney, and lung samples were preserved for 24 h in 10% buffered formalin solution (pH 7.2). Following fixation, the specimens underwent a progressive phase of alcohol dehydration, followed by a xylol wash, and a routine process for embedding in paraffin wax in preparation for light microscopy. Wax-embedded samples were cut (Microm HM 355; 5  $\mu$ m) and stained with hematoxylin and eosin in accordance with the manufacturer's instructions

(Sigma-Aldrich, Steinheim am Albuch, Germany) for structural analysis. A light microscope was used to conduct the histological examination.

### 3. Results

#### 3.1. Virus Load

The presence of ASFV DNA in the blood and spleen was confirmed via polymerase chain reaction (PCR) (Figure 1A). We contrasted the nucleotide sequences from the p72-based PCRs with those from representative samples that were previously reported (unpublished data). As predicted, the Dilijan 2011 IMB ASFV clustered within p72 genotype II. It demonstrated 100% nucleotide similarity with all compared ASFVs circulating in the Caucasus regions since 2007.

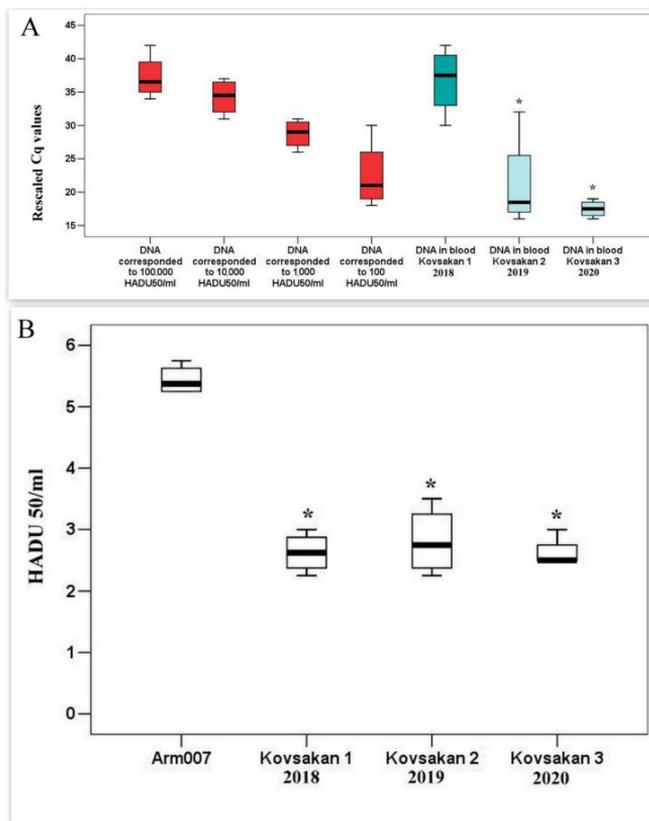


Figure 1.

ASFV HADU and DNA levels (rescaled Ct values) in acute and chronic infected pigs' serum. (A) ASFV DNA levels p72 (Ct values from real-time PCR) in the blood of infected pigs.

\* Significant compared to Kovsakan1 ( $p < 0.05$ ) (B) HADU levels in the blood of infected pigs.

\* Significant compared to Arm 007 ( $p < 0.05-0.01$ ).

The content of the ASF virus (Kovsakan 1/2018 isolate) in the blood of sick pigs approximately corresponded to  $10^5$  units of HADU when infected with the Arm07 isolate (Figure 1A). This index is approximately 0.5 decimal logarithms lower than the maximum determined during infection with Arm07 isolate. However, taking into account the fact that it was difficult to determine the maximum titers of the virus (Kovsakan 1/2018) in the blood of pigs due to the duration of the disease, it can be assumed that the number of genome copies is approximately the same when infected with Arm07 and Kovsakan 1/2018 isolates. There is a discrepancy in the quantitative indicators of the ASF virus between the RT-PCR and HAD data when analyzing the viremia of the Kovkasan1/2018 isolate (a decrease in virus content expressed in HADU is not accompanied by a decrease in copies of the gene encoding p72). This is most likely explained by the reduced HAD activity of all new virus isolates. The number of genome copies of isolates Kovsakan 2/2019 and Kovsakan 3/2020 was significantly lower and corresponded to  $10^2$  HADU (Figure 1A). The titer levels of all tested virus isolates in the blood of infected pigs, when analyzed via HAD, were significantly lower than those during infection with the Arm07 isolate (approximately 2.0 decimal logarithms) (Figure 1B). In studied samples, not only the levels of HADU per ml, but also the intensity of hemadsorption were reduced.

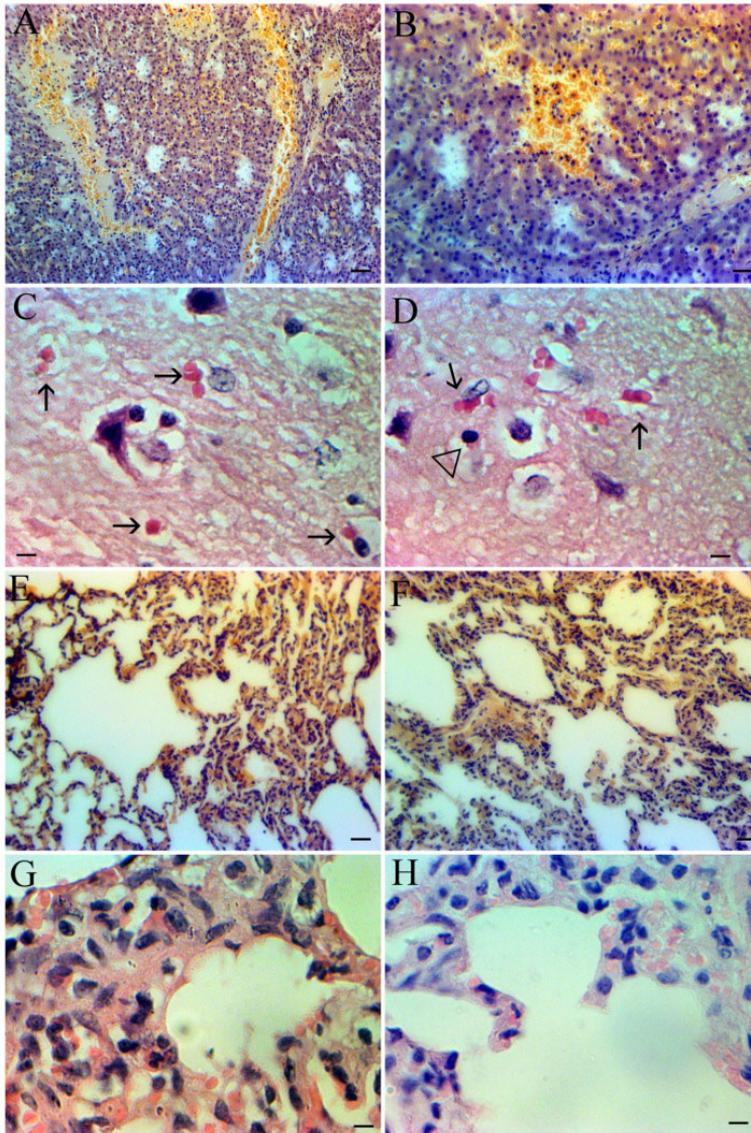
### **3.2. Histopathology**

Kovsakan 1/2018, Kovsakan 2/2019, and Kovsakan 3/2020.

A histological analysis revealed isolated foci of microhemorrhages and diapedesis of erythroid tissue in lymph nodes. In lungs, isolated pinpoint hemorrhages were present.

The histological structure of the kidneys was preserved, with a mild proliferation of mesangial cells (similar to chronic mesangioproliferative

glomerulonephritis). The epithelium of the proximal convoluted and straight tubules was preserved with protein-containing urine in the lumen (Figure 2A, B).



*Figure 2.*

(A) Diapedesis and local hemorrhages in the liver at the late stage of the chronic form of ASF. Scale bar 100  $\mu\text{m}$ .

(B) Local hemorrhage in the liver at the late stage of the chronic form of ASF. Scale bar 50  $\mu\text{m}$ .

(C) Mild diapedesis in brain tissue. Erythrocytes in brain (arrowed). Scale bar 10  $\mu\text{m}$ .

(D) Mild diapedesis in brain tissue. Erythrocytes in brain (arrowed), and lymphoid cell (triangle). Scale bar 10  $\mu\text{m}$ .

(E) Mixed diapedesis in lung tissue at the late stage of the chronic form of ASF. Scale bar 50  $\mu\text{m}$ .

(F) Mixed diapedesis and thickness of the alveolar wall at the late stage of the chronic form of ASF. Scale bar 50  $\mu\text{m}$ .

(G) Thickening of the interalveolar septa due to erythrodiapedesis and leukodiapedesis. Kovsakan2019. Scale bar 10  $\mu\text{m}$

(H) Thickening of the interalveolar septa due to erythrodiapedesis and leukodiapedesis. Kovsakan2020. Scale bar 10  $\mu\text{m}$ .

The general lobular structure of the liver was preserved, and there was congestion in the vessels of the portal tract and sinusoids, especially in the central part of the lobules and central veins, possibly due to stagnation of blood in the systemic veins, possibly due to heart failure. Portal fields were slightly enlarged. There were activated Kupffer cells, single lymphocytes, and neutrophils (segmented and bend), especially in the central part of the lobules around necrotic hepatocytes. Diapedesis hemorrhages and necrotic changes were detected in all areas (Figure 2A, B).

In the brain tissue, the extravasation of individual cells (mainly erythrocytes and leukocytes) was observed (Figure 2C, D).

There was pronounced venous congestion in the lungs with foci of hemorrhage, interalveolar septa were thickened due to venous congestion and connective tissue growth, and alveoli were mostly empty (Figure 2E, F). Interalveolar septa were thickened via erythrodiapedesis and leukodiapedesis (Figure 2G, H).

Overall, the histopathological findings resemble those of the chronic forms of ASF with mild pathogenesis.

#### **4. Discussion**

The new ASF isolates cause an unusual clinical picture – described isolates differ from the usual subacute form by a reduced ability of hemadsorption and a

reduced frequency and intensity of hemorrhages. A less pronounced lesion of the blood coagulation system is also shown, compared with acute ASF [21]. The causes of subacute and chronic forms may be penetration into the primary ASF zone of spread of new types of viruses with lower virulence, or a change in the virus with the appearance of new, less virulent mutant strains. So, along with the primary highly virulent isolate identified in the Republic of Armenia in 2007, we can conclude that at the end of 2011, a moderately virulent isolate for domestic pigs appeared [4].

The main aspect of the attenuation of the described isolates of the ASF virus is the long-term carrying of the virus with viremia [22]. At the same time, the level of the virus in the blood and tissue of infected animals is significantly lower than that when infected with a highly pathogenic strain (Arm07). For the attenuation of the virus, either increased sensitivity to the antiviral defense of the host is required, or a decrease in the replication activity of the virus, or changes in the virus genome [8].

Generally, a lower virulence of ASFV is associated with genomic changes present in attenuated ASFV strains and differences in the immune response of infected animals; a combination of both factors is also possible. The decrease in virulence can be explained by the fact that pigs may have been previously exposed to ASF virus and survived.

## REFERENCES

1. *Pikalo J., Zani L., Hühr J., Beer M., Blome S.* Pathogenesis of African swine fever in domestic pigs and European wild boar – Lessons learned from recent animal trials. *Virus Res.* 2019;271:197614. DOI: 10.1016/j.virusres.2019.04.001. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
2. *Rowlands R., Michaud V., Heath L., Hutchings G., Oura C., Vosloo W., Dwarka R., Onashvili T., Albina E., Dixon L.* African swine fever virus isolate, Georgia, 2007. *Emerg. Infect. Dis.* 2008;14:1870–1874. DOI: 10.3201/eid1412.080591. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
3. *Cwynar P., Stojkov J., Wlazlak K.* African Swine Fever Status in Europe. *Viruses.* 2019;11:310. DOI: 10.3390/v11040310. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
4. *Sargsyan M., Voskanyan H., Karalova E., Hakobyan L., Karalyan Z.* Third wave of African swine fever infection in Armenia: Virus demonstrates the reduction of pathogenicity. *Vet. World.* 2018;11: 5–9. DOI: 10.14202/vetworld.2018.5–9. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].

5. Hess W., Endris R., Haslett T., Monahan M., McCoy J. Potential arthropod vectors of African swine fever virus in North America and the Caribbean basin. *Vet. Parasitol.* 1987;26:145–155. DOI: 10.1016/0304-4017(87)90084-7. [DOI] [PubMed] [Google Scholar]
6. Kalenzi Atuhaire D., Ochwo S., Afayoa M., Norbert Mwiine F., Kokas I., Arinaitwe E., Ademun-Okurut R.A., Boniface Okuni J., Nanteza A., Ayebazibwe C., et al. Epidemiological Overview of African Swine Fever in Uganda (2001–2012) *J. Vet. Med.* 2013;2013:949638. doi: 10.1155/2013/949638. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
7. Thomas L., Bishop R., Onzere C., Mcintosh M., Lemire K. de Glanville W., Cook E., Fèvre E. Evidence for the presence of African swine fever virus in an endemic region of Western Kenya in the absence of any reported outbreak. *BMC Vet. Res.* 2016;12:192. doi: 10.1186/s12917-016-0830-5. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
8. Sehl-Ewert J., Deutschmann P., Breithaupt A., Blome S. Pathology of African Swine Fever in Wild Boar Carcasses Naturally Infected with German Virus Variants. *Pathogens.* 2022;11:1386. DOI: 10.3390/pathogens11111386. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
9. Martínez Avilés M., Bosch J., Ivorra B., Ramos Á., Ito S., Barasona J., Sánchez-Vizcaíno J. Epidemiological impacts of attenuated African swine fever virus circulating in wild boar populations. *Res. Vet. Sci.* 2023;162:104964. DOI: 10.1016/j.rvsc.2023.104964. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
10. Sun E., Zhang Z., Wang Z., He X., Zhang X., Wang L., Wang W., Huang L., Xi F., Huangfu H. et al. Emergence and prevalence of naturally occurring lower virulent African swine fever viruses in domestic pigs in China in 2020. *Sci. China Life Sci.* 2021;64:752–765. doi: 10.1007/s11427-021-1904-4. [DOI] [PubMed] [Google Scholar]
11. Sun E., Huang L., Zhang X., Zhang J., Shen D., Zhang Z., Wang Z., Huo H., Wang W., Huangfu H. et al. Genotype I African swine fever viruses emerged in domestic pigs in China and caused chronic infection. *Emerg. Microbes Infect.* 2021;10:2183–2193. doi: 10.1080/22221751.2021.1999779. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar]
12. Gallardo C., Soler A., Rodze I., Nieto R., Cano-Gómez C., Fernandez-Pinero J., Arias M. Attenuated and non-haemadsorbing (non-HAD) genotype II African swine fever virus (ASFV) isolated in Europe, Latvia 2017. *Transbound. Emerg. Dis.* 2019;66:1399–1404. doi: 10.1111/tbed.13132. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
13. Souto R., Mutowembwa P., van Heerden J., Fosgate G.T., Heath L., Vosloo W. Vaccine Potential of Two Previously Uncharacterized African Swine Fever Virus Isolates from Southern Africa and Heterologous Cross Protection of an Avirulent European Isolate.

- Transbound. Emerg. Dis. 2016;63:224–231. DOI: 10.1111/tbed.12250. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
14. Zani L., Forth J.H., Forth L., Nurmoja I., Leidenberger S., Henke J., Carlson J., Breidenstein C., Viltrop A., Höper D. *et al.* Deletion at the 5'-end of Estonian ASFV strains associated with an attenuated phenotype. *Sci. Rep.* 2018;8:6510. DOI: 10.1038/s41598-018-24740-1. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar]
  15. Wang Z., Ai Q., Huang S., Ou Y., Gao Y., Tong T., Fan H. Immune Escape Mechanism and Vaccine Research Progress of African Swine Fever Virus. *Vaccines.* 2022;10:344. doi: 10.3390/vaccines10030344. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar]
  16. Ginzinger D. Gene quantification using real-time quantitative PCR: An emerging technology hits the mainstream. *Exp. Hematol.* 2002; 30:503–512. doi: 10.1016/S0301-472X(02)00806-8. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
  17. [(accessed on 5 February 2019)]. Available online: <https://eu.idtdna.com/pagesas>.
  18. Avagyan H., Hakobyan S., Poghosyan A., Bayramyan N., Arzumanyan H., Abroyan L., Avetisyan A., Hakobyan L., Karalova E., Karalyan Z. African Swine Fever Virus Manipulates the Cell Cycle of G0-Infected Cells to Access Cellular Nucleotides. *Viruses.* 2022;14:1593. doi: 10.3390/v14081593. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
  19. Cackett G., Portugal R., Matelska D., Dixon L., Werner F. African Swine Fever Virus and Host Response: Transcriptome Profiling of the Georgia 2007/1 Strain and Porcine Macrophages. *J. Virol.* 2022; 96:e0193921. DOI: 10.1128/jvi.01939-21. [DOI] [PMC free article] [PubMed] [Google Scholar].
  20. Enjuanes L., Carrascosa A., Moreno M., Viñuela E. Titration of African swine fever (ASF) virus. *J. Gen. Virol.* 1976;32:471–477. DOI: 10.1099/0022-1317-32-3-471. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
  21. Zakaryan H., Karalova E., Voskanyan H., Ter-Pogossyan Z., Nersisyan N., Hakobyan A., Saroyan D., Karalyan Z. Evaluation of hemostaseological status of pigs experimentally infected with African swine fever virus. *Vet. Microbiol.* 2014;174:223–228. DOI: 10.1016/j.vetmic.2014.08.029. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].
  22. Zhenzhong W., Chuanxiang Q., Shengqiang G., Jinming L., Yongxin H., Xiaoyue Z., Yan L., Naijun H., Xiaodong W., Zhiliang W. *et al.* Genetic variation and evolution of attenuated African swine fever virus strain isolated in the field: A review. *Virus Res.* 2022;319:198874. DOI: 10.1016/j.virusres.2022.198874. [DOI] [PubMed] [Google Scholar].

# ПАТОЛОГИЯ И КЛИНИКА АФРИКАНСКОЙ ЧУМЫ СВИНЕЙ, ВЫЗВАННОЙ ПРИРОДНЫМИ НИЗКОВИРУЛЕНТНЫМИ ВАРИАНТАМИ НА ЮЖНОМ КАВКАЗЕ

*Г.Р. Авагян, С.А. Акобян, Б.В. Багдасарян, Э.А. Аракелова*

*Институт молекулярной биологии НАН РА*

## АННОТАЦИЯ

После появления вируса африканской чумы свиней (АЧС) генотипа II в 2007г. наблюдались случаи заболевания с острым течением и летальным исходом. Однако после нескольких лет распространения в Евразийском регионе клинические признаки заболевания изменились. В настоящее время это заболевание может протекать остро, субклинически, хронически или бессимптомно. Описаны случаи полного выздоровления инфицированных свиней, исчезновения вируса АЧС из их тканей и выделений. Эта форма заболевания впервые появилась в Армении в конце 2011г. Данный вирус был описан и идентифицирован как штамм Dilijan2011IMB. Целью нашего исследования было изучение основных особенностей клинических, патологоанатомических, иммунологических, вирусологических и генетических параметров, участвующих в развитии новых форм африканской чумы свиней (АЧС). На основании полученных данных можно сделать вывод, что хроническая форма АЧС возникает вследствие менее выраженного иммунного ответа, а также снижения титров вируса в крови и тканях инфицированных свиней.

**Ключевые слова:** вирус африканской чумы свиней, хронизация, клиника, гистопатология, иммунопатология.

# GENOMIC VARIABILITY IN THE ARMENIAN POPULATION: IDENTIFICATION OF CLINICALLY SIGNIFICANT VARIANTS THROUGH WHOLE EXOME SEQUENCING

*Y. Bareghamyan<sup>1,2</sup>, A. Arakelyan<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Russian-Armenian (Slavonic) University*

<sup>2</sup>*Institute of Molecular Biology, NAS RA  
bareghamyaneva@gmail.com*

## ABSTRACT

An increasing number of countries are leveraging genomic data to enhance genetic diagnostics and integrate precision medicine into healthcare. These efforts provide insights into normal and pathological genomic variation, enable cost-effective diagnostics, and improve targeted prevention and treatment strategies. However, comprehensive genomic studies on the Armenian population remain limited. In this study, we addressed this gap by analyzing whole exome sequencing (WES) data from 65 healthy individuals from the Armenian population and characterized 144,293 single nucleotide variants (SNVs). Of those, 112 variants were annotated as pathogenic, risk factors, or drug response-related. Our findings show that the population-wide screening provides valuable insight into the genetic architecture of the Armenian population and highlights the potential for integrating genomic data into personalized medicine and disease prevention strategies.

**Keywords:** genetic variants; whole exome sequencing, population genomics.

## Introduction

Studying genetic diversity within populations is crucial for understanding the distribution and prevalence of genetic diseases and genetic risks for complex diseases. While some genetic variations are found universally across populations from all continents (described as common or ancient variations), other more recent polymorphisms are restricted to certain regions. These regional

polymorphisms contribute to unique phenotypic traits and specific health risks within those populations [1, 2]. In contrast, population-specific variations can be seen in the Ashkenazi Jewish population, where genetic studies have traced their origins to a geographic area near ancient Scythian territories. This community exhibits unique genetic signatures reflecting a blend of East Asian, West European, and North Eurasian genetic influences [3]. Similarly, Estonian and Finnish populations show high levels of long shared ancestral segments indicating deep historical genetic links across the Gulf of Finland, reflecting gene flow from historical migration events [4]. Another example is the genetic makeup of Cypriots, including Greek, Armenian, and Maronite Cypriots, who exhibit distinct genetic patterns influenced by various waves of migration from neighboring regions [5].

Recent studies highlight the importance of understanding genetic variations in the Armenian population. A study investigating the global distribution of disease-associated single nucleotide polymorphisms (SNPs) emphasized that genetic associations of diseases vary considerably across populations. Armenians, in particular, exhibit a distinct set of SNPs compared to neighboring regions, underscoring the necessity for health-related genotyping efforts in understudied populations [6]. Further studies on the Armenian population have provided insights into the genetic variations of specific health conditions. One study on the association of genetic variants in dopamine and serotonin pathways with schizophrenia identified SNPs in the DRD2 and HTR2A genes that may influence the risk and therapeutic response to the disease, highlighting the importance of understanding these genetic factors in the context of mental health [7]. These findings call for the necessity of population-wide characterization of disease causal and risk variant distribution and indicate a rich potential for discovering novel genetic variants in the Armenian population that could have significant implications for understanding and treating complex diseases.

## **Methods**

Whole exome sequencing (WES) was performed on DNA samples extracted from the blood of 65 individuals of Armenian descent. WES libraries were prepared from 200–1000 mg of genomic DNA using Illumina DNA Prep with Exome 2.5 Enrichment kit (Illumina, USA). The sequencing was conducted using the Illumina NextSeq 2000 platform at the Sequencing Core Facility of the

Institute of Molecular Biology NAS RA. On average 25-52 million reads were generated per sample.

The quality of raw sequencing reads was evaluated using FastQC software (version 0.11.9) [8]. Then, the raw sequencing data was processed using the GATK (Genome Analysis Toolkit) Best Practices workflow (version 4.4.0.0) [9] for germline variant calling. Reads were aligned to the human reference genome (UCSC hg38) using the Burrows-Wheeler Aligner (BWA)[10]. Post-alignment processing included converting the data to binary alignment format (BAM), sorting, and indexing using SAMtools (version 1.20) [11].

To enhance data quality, duplicate reads were marked using GATK MarkDuplicates, and base quality score recalibration (BQSR) was performed. Variants were called using GATK HaplotypeCaller, producing a variant call format (VCF) file. This step enabled the identification of single nucleotide polymorphisms (SNPs) within the coding regions of the genome. The identified variants were annotated using OpenCRAVAT (Open Custom Ranked Analysis of Variants Toolkit) which integrates multiple annotation databases to assess the functional and clinical significance of genomic variants [12]. In this study we focused on ClinVar annotations to classify variants as pathogenic, likely pathogenic, benign, or likely benign, etc., thus focusing on their relevance to genetic disorders and disease risks.

## **Results**

### **Distribution of exonic variants in the studied cohort**

Analysis of whole exome sequencing (WES) data from 65 individuals revealed a total of 144,293 single nucleotide variants (SNVs). To focus on clinically relevant findings, variants were filtered based on an allele frequency threshold of  $\leq 0.05$ , retaining only 34,474 rare variants.

The distribution of total variant types showed that intronic variants constituted the majority, accounting for 52.9% of the total identified variants. Missense variants represented 18.8%, while synonymous variants made up 16.2% of the total (Figure 1a). In contrast, the distribution of rare variant types revealed that missense variants were the most prevalent, comprising 33.2% of the identified rare variants. Intronic variants accounted for 31.9%, while synonymous variants represented 22.8% (Figure 1b).

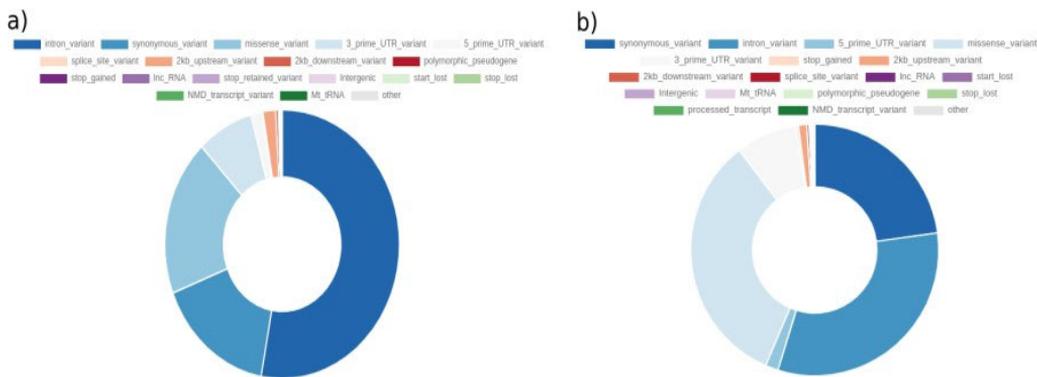
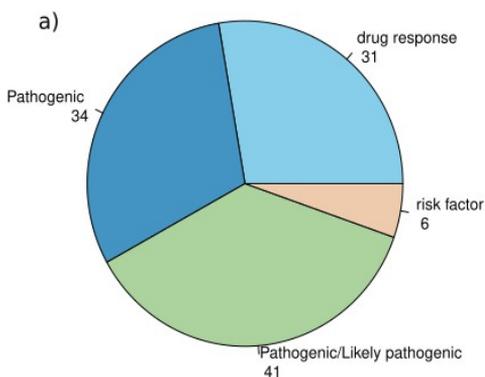


Figure 1. The distribution of total(a) and rare(b) variant types in healthy individuals of Armenian descent.

### Clinical Significance of Variants

The clinical annotation of variants identified in the Armenian population revealed a diverse range of potential health impacts. A total of 112 variants were categorized based on their clinical significance (Figure 2a). The majority of these variants were associated with drug response (31 variants), followed by risk factors (6 variants). Notably, 41 variants were classified as pathogenic or likely pathogenic, and 34 as pathogenic. Among these, we identified four pathogenic missense variants in the MEFV gene in four individuals, which is associated with Familial Mediterranean Fever (FMF), a genetic autoinflammatory disorder highly prevalent in the Armenian population. (Figure 2b). All variants were heterozygous missense changes, suggesting a high carrier rate for FMF in the Armenian population.



b)

rsID	Clinical Significance	Zygosity	Sequence Ontology
rs104895097	Pathogenic/Likely pathogenic	heterozygous	Missense Variant
rs28940579	Pathogenic/Likely pathogenic	heterozygous	Missense Variant
rs28940580	Pathogenic	heterozygous	Missense Variant
rs61752717	Pathogenic/Likely pathogenic	heterozygous	Missense Variant

Figure 2. a. Clinical significance of variants identified in the Armenian population  
b. Pathogenic Missense Variants in the MEFV gene Identified in the Armenian Population.

## Conclusion

Our analysis of whole exome sequencing (WES) data from the Armenian population revealed a diverse landscape of genomic variation, with a particular focus on clinically significant and rare variants. While intronic variants constituted the majority of total variants, rare variants exhibited a different distribution, with missense variants being the most prevalent. Notably, we identified several pathogenic and risk factor variants, including pathogenic MEFV gene variants associated with Familial Mediterranean Fever, emphasizing the importance of genetic screening in this population. These findings provide valuable insights into the genetic architecture of the Armenian population and highlight the potential for integrating genomic data into precision medicine and disease prevention strategies.

## REFERENCES

1. 1000 Genomes Project Consortium (2015). A global reference for human genetic variation. *Nature*, 526 (7571), 68–74.
2. Gibbs R. *et al.* (2003). The international HapMap project.
3. Das R. *et al.* (2016). Localizing Ashkenazic Jews to primeval villages in the ancient Iranian lands of Ashkenaz. *Genome Biology and Evolution*, 8 (4), 1132–1149.
4. Kivisild T. *et al.* (2021). Patterns of genetic connectedness between modern and medieval Estonian genomes reveal the origins of a major ancestry component of the Finnish population. *The American Journal of Human Genetics*, 108(9), 1792–1806.
5. Moutsouri I. *et al.* Deciphering the maternal ancestral lineage of Greek Cypriots, Armenian Cypriots and Maronite Cypriots. *Plos one*, 19 (2), e0292790.
6. Nikoghosyan *et al.* (2019). Population levels assessment of the distribution of disease-associated variants with emphasis on Armenians – a machine learning approach. *Frontiers in genetics*, 10, 394.
7. Zakharyan R. *et al.* (2020). Association of Genetic Variants of Dopamine and serotonin in Schizophrenia. *Archives of medical research*, 51(1), 13–20.
8. Andrews S. (2010). FastQC: a quality control tool for high throughput sequence data. Available online at: <http://www.bioinformatics.babraham.ac.uk/projects/fastqc>
9. McKenna A. *et al.* (2010). The Genome Analysis Toolkit: a MapReduce framework for analyzing next-generation DNA sequencing data. *Genome research*, 20(9), 1297–1303.

10. Li H. & Durbin R. (2009). Fast and accurate short read alignment with Burrows–Wheeler transform. *bioinformatics*, 25(14), 1754–1760.
11. Li H. Handsaker, et al & 1000 Genome Project Data Processing Subgroup. (2009). The sequence alignment/map format and SAMtools. *bioinformatics*, 25 (16), 2078–2079.
12. Pagel K. et al. Integrated Informatics Analysis of Cancer-Related Variants. *JCO Clinical Cancer Informatics* 2020 4, 310–317.

## **ГЕНОМНАЯ ВАРИАБЕЛЬНОСТЬ В АРМЯНСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ: ИДЕНТИФИКАЦИЯ КЛИНИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ ВАРИАНТОВ НА ОСНОВЕ ПОЛНОЭКЗОМНОГО СЕКВЕНИРОВАНИЯ**

*Е.В. Барегамян<sup>1,2</sup>, А.А. Аракелян<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Российско-Армянский (Славянский) университет*

<sup>2</sup>*Институт молекулярной биологии НАН РА*

### **АННОТАЦИЯ**

Все большее количество стран инициируют проекты по исследованию человеческого генома с целью улучшения генетической диагностики и подготовки к интеграции прецизионной медицины в системы здравоохранения. Ожидаемые выгоды включают улучшенное понимание нормальных и патологических геномных вариаций, сокращение времени до постановки диагноза, экономически эффективную диагностику, профилактику и лечение, а также новые знания. Несмотря на очевидную важность таких исследований, по армянской популяции практически отсутствуют данные по геномному разнообразию. В данном исследовании мы восполнили этот пробел, проанализировав данные полных экзомов 65 здоровых представителей армянской популяции и охарактеризовав 144,293 однонуклеотидные варианты (SNV). Из них 112 вариантов были аннотированы как патогенные, факторы риска или связанные с лекарственным ответом. Наши результаты показывают, что широкомасштабный популяционный анализ предоставляет ценные данные о генетической архитектуре армянской популяции и подчеркивает потенциал интеграции геномных данных в персонализированную медицину и стратегии профилактики заболеваний.

**Ключевые слова:** геномные варианты, полноэкзомное секвенирование, популяционная геномика.

# СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ЗАМЕЩЕННЫХ ЦИКЛОПРОПАНОВ И ФИЗИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ИХ ОСНОВЕ

*С.А. Багдасарян<sup>1,2</sup>, А.М. Григорян<sup>1,2,3</sup>, А.Р. Микаелян<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет*

*<sup>2</sup>Национальный аграрный университет Армении*

*<sup>3</sup>Университет традиционной медицины Армении*

*sambagd55@gmail.com, anna.grigoryan@rau.am, aramrmik@yahoo.com*

## АННОТАЦИЯ

Функционально замещенные циклопропаны весьма разнообразны и проявляют широкий спектр биологической активности: от участия в биосинтезе фитогормона этилена в растениях до мощных фунгицидов. Эти соединения привлекли к себе значительное внимание ввиду их разнообразной роли в биологических процессах, фармацевтике и агрохимии. Функционально замещенные циклопропаны неоднократно демонстрировали свою важность, мотивируя постоянные поиски путей разработки инновационных и эффективных методов синтеза.

Несмотря на их широкое распространение, синтез функционально замещенных циклопропанов остается сложной областью исследований. Традиционные методы часто страдают от ограниченного диапазона субстратов, жестких условий реакции или низкой селективности. Эти ограничения подчеркивают необходимость в новых, эффективных и устойчивых стратегиях синтеза, которые могут обеспечить доступ к более широкому спектру производных циклопропана.

Актуальность этой потребности становится еще более очевидной, если учесть растущий спрос на целевые циклопропановые соединения в фармацевтических препаратах, агрохимикатах и современных материалах.

В данной статье мы решаем эту проблему, представляя новый метод синтеза функционально замещенных циклопропанов. Этот метод не только расширяет спектр доступных производных, но и обеспечивает повышенную эффективность, селективность и экологическую безопасность.

**Ключевые слова:** функционально замещенные циклопропаны, радикальное присоединение с переносом атома, трихлоруксусная кислота, олефины.

## Введение

Функционально замещенные циклопропаны занимают уникальное положение в органической химии и смежных областях благодаря своей напряженной трехчленной кольцевой системе и широкому спектру функциональных групп, которые могут быть включены в их структуру. Такое сочетание наделяет их особым профилем реакционной способности, что делает их бесценными промежуточными и конечными продуктами в различных областях применения [1].

Одним из наиболее ярких представителей функционально замещенных циклопропанов является 1-аминоциклопропан-1-карбоновая кислота (АСС), которая играет важную роль в биосинтезе этилена в растениях. Этилен – простой, но важный растительный гормон, регулирующий такие процессы, как созревание плодов, прорастание семян и реакция на стресс. Таким образом, АСС важен не только в качестве природного промежуточного продукта, но и как инструмент для сельскохозяйственных манипуляций [2]. АСС также известен своей модуляторной активностью в отношении рецепторов NMDA в организмах различных животных. Он обеспечивает умеренный уровень активации NMDA-рецепторов в зависимости от концентрации глутамата и снижает любую избыточную сигнальную реакцию, которая может привести к нейротоксичности [3].

В материаловедении циклопропаны нашли применение в качестве промежуточных продуктов при синтезе полимеров и современных материалов. Их напряженную структуру можно использовать для управления реакциями полимеризации или для введения функциональных групп, улучшающих свойства материала. Кроме того, некоторые производные циклопропана были исследованы на предмет их потенциала в фотохимии и в качестве предшественников высокоэнергетических соединений, что еще больше расширяет их применение [4].

Известно множество синтетических подходов к созданию замещенных циклопропанов. Эти методы включают реакции: Симмонса-Смита, диазопроизводных карбеноидов, свободных карбенов, циклоизомеризацию и реакцию Кулинковича, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки [5]. Каждый метод циклопропанирования имеет определенные ниши, в которых он проявляет себя наилучшим образом, часто определяемые субстратом и желаемым стереохимическим результатом [6]. Однако недос-

татки, связанные с экологической безопасностью, стоимостью реагентов или совместимостью функциональных групп, ограничивают их применение (Табл. 1).

Таблица 1.

### Сравнение методов циклопропанирования

Метод	Плюсы	Минусы	Лучше всего использовать
Симмонс-Смит	Надежный, мягкие условия, работает с различными алкенами	Высокая стоимость, цинковые отходы, умеренная стереоселективность	Простые алкены с минимальными функциональными группами
Диазопроизводные карбеноиды	Универсальность, высокая стереоселективность с металлическими катализаторами	Опасные диазосоединения, стоимость катализатора, чувствительность к функциональным группам	Реакции, требующие точных стереохимических результатов
Свободные карбены	Не содержит металлов, исключает зависимость от диазосоединений	Чрезвычайно реактивный, жесткие условия, плохая селективность	Быстрое и эффективное получение замещенных циклопропанов с минимальной модификацией других функциональных групп
Циклоизомеризация	Мягкие условия, эффективны для енинов или диенов	Ограниченный объем субстрата, чувствительные катализаторы, конкурирующие побочные реакции	Циклопропанирование определенных еновых или диеновых субстратов
Реакция Кулинковича	Эффективен для синтеза циклопропанола, предлагаемые результаты	Влагочувствительные реагенты, низкая толерантность к функциональным группам, сложность, генерируют значительное число отходов	Циклопропанола из эфиров в контролируемых условиях

Эти ограничения подчеркивают необходимость в новых, эффективных и устойчивых стратегиях синтеза, которые могут обеспечить доступ к более широкому спектру производных циклопропана.

## Материалы и методы

Нами предложен доступный и технически легко реализуемый метод синтеза функционально замещенных циклопропанов, где на первой стадии происходит радикальное присоединение с переносом атома производных различных телогенов к ненасыщенным субстратам с последующим дегалогенированием-циклопропанированием промежуточно образующихся 1,3-дигалогенидов Zn/Cu парой (или другие металлы) и дальнейшая функционализация, например, получение альфа-аминокислот [7] (Рис. 1).

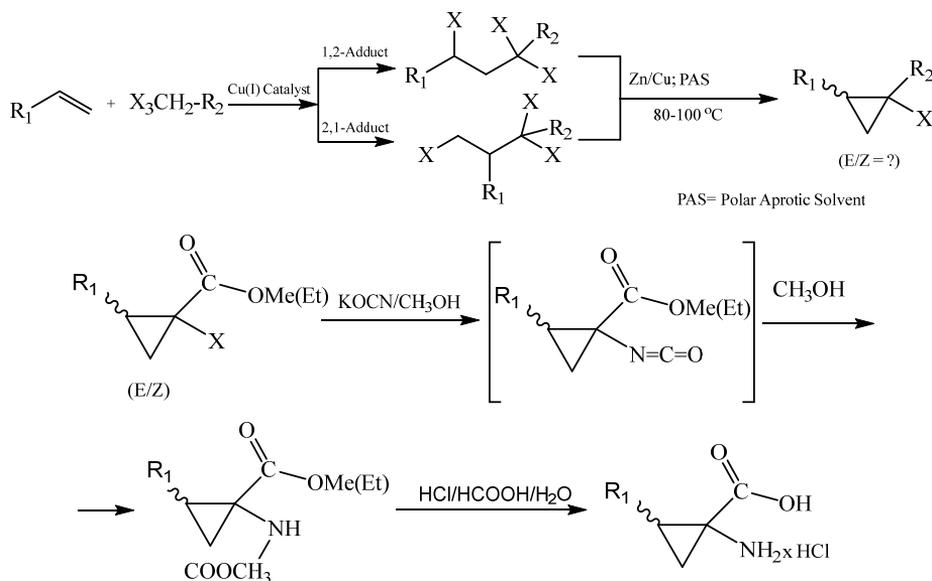


Рисунок 1. Общая схема реакции циклизации.

В качестве телогенов были использованы производные трихлоруксусной кислоты, а в качестве субстратов – стирол и альфа-метилстирол.

## Результаты

Как известно, реакции АТРА протекают в присутствии каталитических комплексов переходных металлов. Полагают, что на первом этапе, в результате гомолиза связи C-Cl в молекуле телогена атом хлора, переходит в координационную сферу переходного металла, а медь переходит в окисленное состояние [8]. На следующем этапе вновь образованный радикаль-

ный аддукт присоединяется к олефинам. Теоретически возможно образование как 1,2-, так и 2,1-аддуктов. Очевидно, что промежуточный аддукт 1,2 радикального присоединения более стабилен, чем 2,1, который образуется с выходом до 25%. В случае свободнорадикального присоединения при иницировании органическими пероксидами (бензоилпероксидом) образуются только 1,2-аддукты (выход 2,1 не превышает 1–2%). На последней стадии происходит перенос атома галогена из лигандной сферы окисленной формы катализатора, что приводит к образованию конечного продукта и восстановлению катализатора. Мы предполагаем, что аномальное образование 2,1-аддуктов можно объяснить тем, что в координационной сфере переходного металла одновременно участвуют как радикал телогена, так и молекула субстрата, и процесс не является свободнорадикальным. Процесс происходит в результате согласованной одновременной перегруппировки лигандов координационной сферы переходного металла, т.е. механизм реакции больше соответствует принципам координационного катализа. Состав координационной сферы изменяется в зависимости от природы лиганда, условий реакции, иона металла и изменения степени окисления последнего в ходе реакции [9].

Роль растворителя на стадии АТРА, как солиганда переходного металла, имеет ключевое значение. Более полярный растворитель увеличивает растворимость катализатора в реакционной системе. Находясь в координации с окисленной формой переходного металла Cu (II), способствует его переходу в активное восстановленное состояние Cu(I). Таким образом, заменив традиционный растворитель ацетонитрил на диметилсульфоксид, нам удалось снизить температуру с 90°C до 40–60°C, время реакции с 9 часов до 2, – при параллельном увеличении выходов реакции с участием стирола и альфа-метилстирола до 90% (Рис. 2). Ход реакции контролировали методами ТСХ и ГЖХ.

Entry	Comp.	Solvent	Temp/time	Prod. 1-2/2-1(%)	Yield(%)
Styrene	CN	ACN	90°C/ 9h	75/25	75
	COOEt	ACN	90°C/ 9h	85/15	68

	CN	DMSO	60°C/ 2h	-	92
	COOEt	DMSO	60°C/ 2h	-	95
$\alpha$ - Methylstyrene	CN	DMSO	50°C/ 2h	-	95
	COOEt	DMSO	50°C/ 2h	-	96

*Рисунок 2. Сравнение эффективности каталитических систем Cu(I).  
Каталитическая система Cu(I): 1) CuBr – 10 mol% к субстрату; 2) пиперидин  
(или др. вторичный амин); 3) каталитический лиганд/со-растворитель – DMSO.  
Молярные соотношения: 1):2):3) = 1 : 1 : 7–10.*

В течение 30–40 минут происходит конверсия 80% субстрата, при этом с интенсивной экзотермией – поддерживается температура 50–60 градусов без нагрева.

## **Заключение**

Нами была разработана новая стратегия синтеза функционально замещенных циклопропанов. Наш метод демонстрирует несколько существенных преимуществ, включая более мягкие условия реакции, улучшенную эффективность реакции и более высокие выходы по сравнению с традиционными методами циклопропанирования. Оптимизировав выбор растворителя и параметры реакции, нам удалось существенно сократить время реакции (до 2 часов) и температуру (40–60°C), сохранив при этом превосходный выход продукта до 90%.

Предложенный метод не только устраняет некоторые давние ограничения существующих подходов циклопропанирования, но и предлагает надежную платформу для дальнейшей функционализации и исследования производных циклопропана. Улучшенная экологическая совместимость и масштабируемость процесса делают его перспективным инструментом для промышленного применения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Yanovskaya L., Dombrovskii V.* Functionally Substituted Cyclopropanes (1975) Russian Chemical Reviews, 44 (2). PP. 335–366.
2. *Kieber J., Polko J.* 1-aminocyclopropane 1-carboxylic acid and its emerging role as an ethylene-independent growth regulator. *Front. Plant Sci.* 2019. 10:1602. DOI:10.3389/fpls.2019.01602.
3. *Bagdasaryan S., Grigoryan A., Sahradyan M., Mikaelyan A.* New approach for synthesis of 1-aminocyclopropane carboxylic acid (acc) derivatives and exploring them as modulators of human N-methyl-D-aspartate (nmda) receptors via docking analysis. State Educational Institution of Higher Professional Education Russian-Armenian University. 2024. PP. 80–86. DOI:10.24412/cl-37235-2024-1-80-86.
4. *Mizuno K., Ichinose N., Yoshimi Y.* Photochemistry of cyclopropanes, methylenecyclopropanes, and vinylidenecyclopropanes // “Journal of Photochemistry and Photobiology. Photochemistry Reviews”, 2000. Vol. 1, Is. 2. PP. 167–193.
5. *Ebner C., Carreira E.* Cyclopropanation Strategies in Recent Total Syntheses. *Chemical Reviews.* 2017. Vol. 117, Is. 18. pp. 11651- 11679. DOI: 10.1021/acs.chemrev.6b00798.
6. *Mikaelyan A., Bagdasaryan S., Babayan B., Asatryan N., Melkumyan M., Grigoryan A.* New functionally substitutes cyclopropanecarboxylic acids as ethylene biosynthesis innovative regulators. Vol. 7 No. 10 (2024): October 2024. PP. 500–510.
7. *Mnatsakanyan A., Kocharyan D., Torosyan G., Vardanyan A., Mikaelyan A.* (2008) Preparation of substituted cyclopropane carboxylic acids from organohalogen acids // “Vestnik NPUA”, 76. PP. 825–830.
8. *Engl S., Reiser O.* Copper-photocatalyzed ATRA reactions: concepts, applications, and opportunities // *Chemical Society Reviews.* 2022. Vol. 51, Is.13. PP. 5287–5299.
9. *Karapetyan H., Tamazyan R., Mikaelyan A., Raganyan N.* X-Ray Investigation of (E)-2-phenyl-1-chlorocyclopropane-1-carboxylic Acid – A Convenient Synthone for Transamine Synthesis. 2004. Vol. 45(2). PP. 352–255.

## SYNTHESIS OF FUNCTIONALLY SUBSTITUTED CYCLOPROPANES AND PHYSIOLOGICALLY ACTIVE COMPOUNDS BASED ON THEM

*S. Bagdasaryan<sup>1,2</sup>, A. Grigoryan<sup>1,2,3</sup>, A. Mikaelyan<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Russian-Armenian (Slavonic) University*

<sup>2</sup>*Armenian National Agrarian University*

<sup>3</sup>*University of Traditional Medicine of Armenia*

## ABSTRACT

Functionally substituted cyclopropanes are highly diverse and exhibit a wide range of biological activities, ranging from participation in the biosynthesis of the phytohormone

ethylene in plants to potent fungicides. These compounds have attracted considerable attention due to their diverse roles in biological processes, pharmaceuticals, and agrochemicals. From natural product synthesis to industrial applications, these compounds have repeatedly demonstrated their importance, motivating ongoing efforts to develop innovative and efficient synthetic methods. Despite their widespread use, the synthesis of functionally substituted cyclopropanes remains a challenging area of research. Traditional methods often suffer from a limited substrate range, harsh reaction conditions, or low selectivity. These limitations highlight the need for new, efficient, and sustainable synthetic strategies that can provide access to a wider range of cyclopropane derivatives. The urgency of this need is even more evident when considering the growing demand for specialty cyclopropane compounds in pharmaceuticals, agrochemicals, and advanced materials. In this paper, we address this issue by presenting a new method for the synthesis of functionally substituted cyclopropanes. This method not only expands the range of available derivatives, but also provides improved efficiency, selectivity, and environmental compatibility.

**Keywords:** functionally substituted cyclopropanes, atom transfer radical addition, trichloroacetic acid, olefins.

# ПОЛИЛАКТИДНЫЕ НАНОКАПСУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ МАЛЫЕ ИНТЕРФЕРИРУЮЩИЕ РНК, СПОСОБНЫ ПОДАВЛЯТЬ РЕПРОДУКЦИЮ РОТАВИРУСА НА КЛЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ ИНФЕКЦИИ

*А.В. Бродская<sup>1,2</sup>, А.Р. Ахметова<sup>1,4</sup>, А.В. Грачева<sup>3</sup>, Д.М. Хохлова<sup>3</sup>,  
Е.Р. Корчевая<sup>3</sup>, Д.И. Смирнова<sup>3</sup>, Н.В. Гаврилова<sup>1,2</sup>,  
Е.Б. Файзулов<sup>3</sup>, А.В. Васин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

<sup>2</sup>НИИ гриппа им. А.А. Смородинцева Минздрава России, Санкт-Петербург

<sup>3</sup>НИИВС сывороток им. И.И. Мечникова, Москва

<sup>4</sup>Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург

*alexandra.b\_05@mail.ru, akhmetova.lab.dr@gmail.com, nastuxa\_70@mail.ru,  
daughtervgater@gmail.com, faizuloev@mail.ru, vasin\_av@spbstu.ru*

## АННОТАЦИЯ

В данной работе проведена оценка вирусингибирующей активности потенциальных препаратов малых интерферирующих РНК (миРНК), направленных на подавление генов ротавируса А человека (РВА). миРНК, таргетная к гену NSP4, в составе разработанных коллективом полилактидных нанокapsул, продемонстрировала значимое снижение вирусной репродукции на клеточной модели РВА инфекции.

**Ключевые слова:** миРНК, нанокapsулы, ротавирус, противовирусная активность.

## Введение

Ротавирус является социально-значимой инфекцией, вызывающей острые гастроэнтериты у детей до года – с возможным летальным исходом 1:300. На данный момент не существует этиотропного лечения, направленного на подавление ротавирусной инфекции, а приобретенный после вакцинации (или перенесенного заболевания) иммунитет не полностью предотвращает новые случаи заболевания. Вследствие большой вариабельности белков ротавируса и высокой скорости изменчивости его генома поиск препаратов для терапии работающих на уровне белковых взаимодействий представляется малоэффективным.

В нашем исследовании мы использовали более перспективный подход с применением миРНК – интерференции, позволяющей эффективно и с высокой специфичностью ингибировать вирусные гены, используя миРНК к их наиболее консервативным последовательностям. Малые интерферирующие РНК (миРНК) обеспечивают высоко-специфическое ингибирование отдельных генов и являются потенциальными терапевтическими молекулами. Основным препятствием к созданию препаратов миРНК является проблема эффективной доставки функциональных миРНК в клетки-мишени.

Ранее нашим коллективом были разработаны ряд перспективных полилактидных контейнеров-носителей для упаковки и внутриклеточной доставки миРНК. Носители разного размера показали высокую емкость загрузки миРНК, хорошую эффективность удержания, высокую степень проникновения в клеточный монослой Caco-2, действующими в качестве кишечного эпителиального барьера и выраженное подавление гена люциферазы на модельной системе в эукариотических клетках. Кроме того, была показана эффективность перорального введения миРНК с носителем на мышах линии BALB/c с использованием ОФЭКТ, эссенциальной визуализации *ex vivo*, прямой радиометрии и гистологического анализа. Исследования биораспределения *in vivo* продемонстрировали, что именно полилактидные нанокапсулы имеют наибольшую степень ассоциации с тонким кишечником, местом развития РВА инфекции и демонстрируют максимальное внутриклеточное накопление [1].

## **Материалы и методы**

Вирусологические эксперименты проводились на базе лаборатории молекулярной вирусологии ФГБНУ НИИВС им. И.И. Мечникова.

В работе использовался ротавирус штамма Wa ротавируса человека группы А, генотип G1P[8] (РВА Wa, ATCC-VR-2018) из коллекции ФГБНУ НИИВС им. И.И. Мечникова. Используемая адгезионная клеточная линия – МА-104.

## **Результаты и обсуждение**

На предварительном этапе было проведено эволюционное и биоинформатическое исследование двух генов ротавируса: NSP1 и NSP4 как потенциальных мишеней для РНК-интерференции в качестве противовирусной терапии. В результате, были выявлены потенциальные области и про-

веден дизайн *in silico* 10 потенциальных противовирусных миРНК. Был осуществлен первичный скрининг вирусингибирующего действия данных миРНК на клеточной модели ротавирусной инфекции MA-104 в отношении РВА. миРНК доставляли в клетки коммерческим реагентом Lipofectamine RNAiMAX по профилактической схеме за 24 часа до заражения, и оценивали репродукцию вируса в течение 3-х суток с определением титра по накоплению вирусной мРНК методом ОТ-ПЦР ПЦР-РВ, методом ИФА и оценкой ЦПД при титровании вирусного потомства (Рис. 1–2).

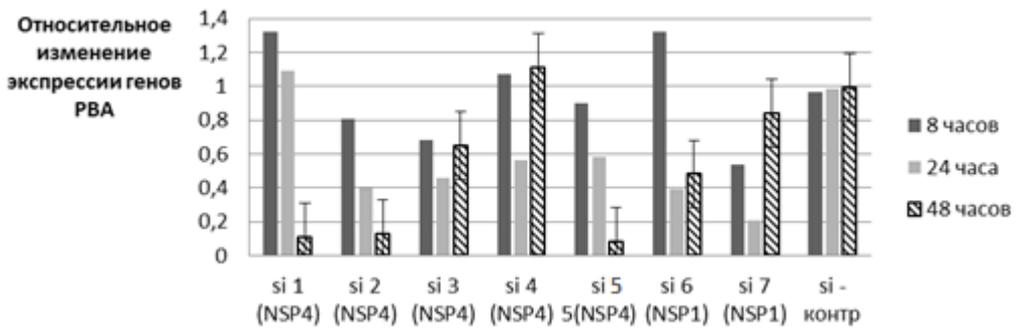


Рисунок 1. Относительная экспрессия гена NSP3 ротавируса A штамм Wa (G1P[8]) в лизатах инфицированных клеток, предварительно обработанных препаратами липофектамин-миРНК за 24 часа до заражения.

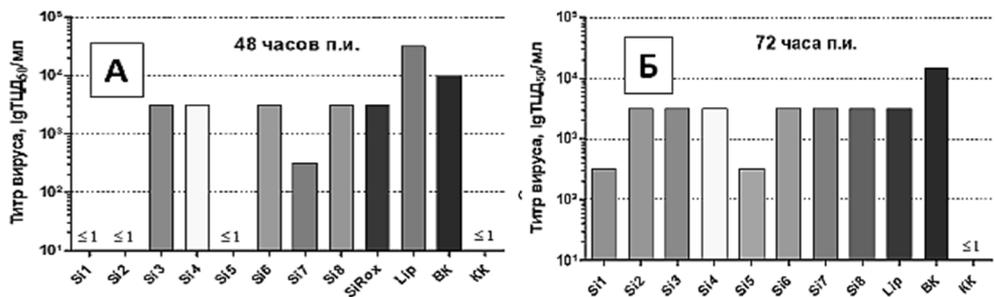


Рисунок 2. Значения титра вируса, полученные при титровании образцов с клеток MA-104 после обработки препаратами миРНК-липофектамин, через 48 часов (А) и 72 часа (Б) после инфицирования ротавирусом штамм WA 0,01 MOI.

Полученные тремя методами данные свидетельствуют, что на определенных временных точках внесение миРНК приводит к подавлению репликации РВА *in vitro*. В частности, было показано однозначное и достоверное

снижение вирусной репродукции более чем на 50% для двух миРНК, таргетных к гену NSP4, через 24, 48 и 72 часа после инфицирования. В свою очередь, миРНК, таргетная к гену NSP1, проявила вирусингибирующую активность в течение первых суток после заражения по совокупности данных. В результате скрининга были отобраны 3 перспективных миРНК для оценки их противовирусной активности в составе органических полилактидных нанокапсул (далее nPLA).

Внесение препаратов миРНК в нанокапсулах (nPLA+siRNA) проводили по профилактической схеме за 24 часа до заражения и по лечебно-профилактической схеме через 4 часа после заражения. Вирусингибирующая активность определялась также на клеточной модели MA-104 в отношении РВА Wa (3,3 lgТЦД50/мл) методами ОТ-ПЦР ПЦР-РВ, ИФА и оценкой ЦПД при титровании вирусного потомства; в экспериментах использовались две дозы заражения MOI = 0,05 и 0,01.

Вначале было оценено влияние вирусного заражения на эффективность трансфекции с использованием флуоресцентно-меченных пустых нанокапсул и меченных нецелевых – негативных миРНК. Показано повышенное более чем в 2 раза накопление флуоресцентного сигнала в клетках с внесением препаратов по лечебно-профилактической схеме (Рис.3). Также было продемонстрировано, что пустые нанокапсулы и негативные миРНК при любом режиме введения способны подавлять вирусную репродукцию в клетках, по видимости, вследствие активации интерферонового ответа (Рис. 4).

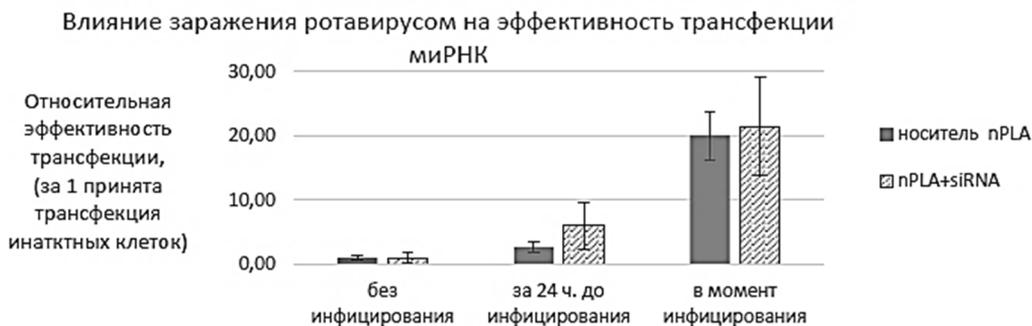


Рисунок 3. Относительная эффективность трансфекции клеток MA-104 препаратами миРНК-nPLA в зависимости от инфицирования вирусом штамм WA (0,01 MOI).

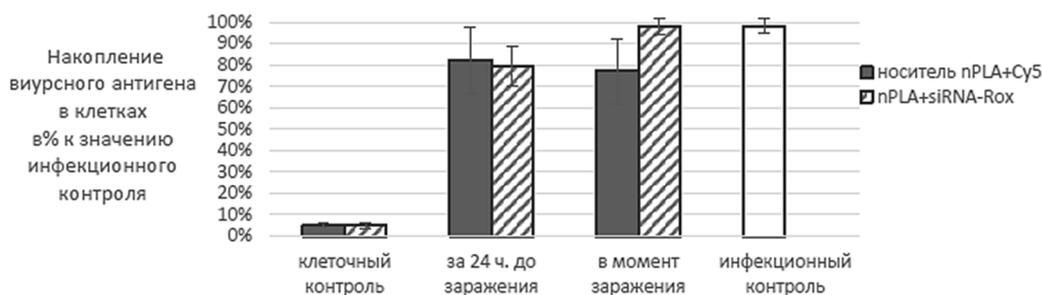


Рисунок 4. Результаты определения ротавирусного антигена в клетках MA-104 с расчетом ТЦД50/мл после обработки препаратами миРНК-nPLA через 72 часа после инфицирования ротавирусом штамм WA 0,01 MOI, выраженные.

Далле проводили оценку вирусингибирующего потенциала nPLA+siRNA для двух потенциальных миРНК. Сопоставление результатов определения вирусного антигена в клетках, накоплению вирусной РНК и инфекционной активности вируса на разные сроки после заражения клеток, обработанных nPLA+siRNA, не выявило выраженной противовирусной активности препаратов миРНК на 1-ые сутки после заражения при разных схемах применения (лечебная, профилактическая). Через 24 и 72 часа после заражения наблюдалась тенденция к снижению вирусной репродукции и понижению титра вируса в пределах 1,5 lgТЦД50/мл для одной из миРНК, таргетной к гену NSP4.

В результате изучения вирусингибирующего действия инкапсулированных миРНК на клеточной модели ротавирусной инфекции MA-104 в отношении штамма РВА было выявлено значимое снижение вирусной репродукции на клеточной модели инфекции для миРНК, таргетной к гену NSP4. После обработки клеток препаратами инкапсулированной миРНК за 24 ч до заражения наблюдалось снижение вирусного титра более чем на 7 lg ТЦД50/мл, до значения 0, менее порога чувствительности метода (Рис. 5, 6).

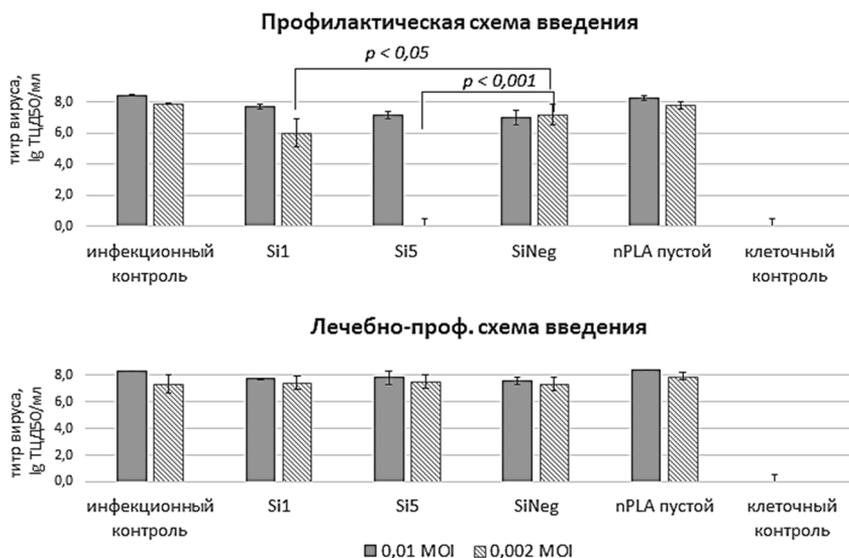


Рисунок 5. Результаты определения ротавирусного антигена в клетках MA-104 после обработки препаратами миРНК-nPLA по профилактической (за 24 ч. до заражения) и лечебной (в момент заражения) схеме через 72 часа после инфицирования ротавирусом штамм WA 0,01 MOI, выраженные в ТЦД50/мл.

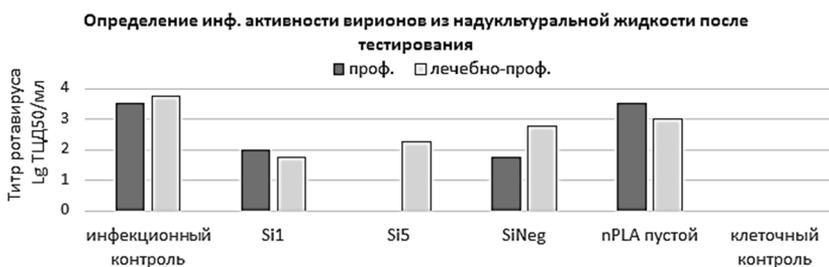


Рисунок 6. Результаты определения титра вторичного потомства ротавирусной инфекции на клетках MA-104 (доза первичного заражения 0,01 MOI).

Работа поддержана грантом РФФ 22-74-10117, <https://rscf.ru/project/22-74-10117/>

## ЛИТЕРАТУРА

1. Akhmetova D. An investigation of nano- and micron-sized carriers based on calcium carbonate and polylactic acid for oral administration of siRNA//Expert Opinion on Drug Delivery. 2024. PP. 1–17.

**POLYLACTIDE NANOCAPULES CONTAINING SMALL INTERFERING RNAS ARE CAPABLE OF SUPPRESSION OF ROTAVIRUS REPRODUCTION ON A CELLULAR INFECTION MODEL**

*A. Brodskaia<sup>1,2</sup>, A. Akhmetova<sup>1,4</sup>, A. Gracheva<sup>3</sup>, N. Gavrilova<sup>1,2</sup>,  
D. Hohlova<sup>3</sup>, E. Korchevaia<sup>3</sup>, D. Smirnova<sup>3</sup>,  
E. Fayzuloev<sup>3</sup>, A. Vasin<sup>1,2</sup>*

*<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

*<sup>2</sup>Smorodintsev Research Institute of Influenza*

*<sup>3</sup>Mechnikov Research Institute for of Vaccines and Sera*

*<sup>4</sup>ITMO University, Saint Petersburg*

**ABSTRACT**

In this work was investigated the virus-inhibitory activity of small interfering RNA (siRNA) targeted to suppress the human rotavirus A genes. siRNA targeting the NSP4 gene were encapsulated in the polylactide nanocapsules, and these siRNA-nanoparticles demonstrated a decrease in viral reproduction in a cellular model of rotavirus infection.

**Keywords:** siRNA, nanocapsules, rotavirus, antiviral activity.

# ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ХИЩНЫХ ГИФОМИЦЕТОВ С НЕКОТОРЫМИ МИКРОМИЦЕТАМИ ПОЧВЫ

*Т.А. Есаян*

*Ереванский государственный университет  
tigran.yesayan@ysu.am*

## АННОТАЦИЯ

Проблема производства экологически чистой аграрной продукции весьма актуальна во всем мире. Одним из актуальных направлений развития зеленых технологий сельского хозяйства является применение биологических врагов сельскохозяйственных вредителей – в качестве альтернативы пестицидам. Хищные гифомицеты, являясь биологическими врагами паразитических нематод, опасных для сельскохозяйственных растений, обладают потенциалом применения в сельском хозяйстве. В данной статье изучены нематофаговая активность хищных грибов, выделенных из почв в различных регионах Республики Армения (РА) и их взаимодействие с другими микромицетами почвы.

**Ключевые слова:** гифомицет, хищные грибы, нематофаги, паразитические нематоды, микромицеты почвы, экологически чистое сельское хозяйство.

## Введение

Защита агрокультур растений (овощи, плодовые деревья и т.д.), а также скота от разнообразных вредителей – одна из наиболее значимых проблем сельского хозяйства во всем мире [1]. Одними из опаснейших вредителей являются черви-нематоды, патогенные для животных и растений [2,3]. Они вызывают болезни крупного рогатого скота и других животных и передаются человеку. Фитопатогенные нематоды опасны для растений различной таксономии (бахчевые культуры, овощи, плодовые деревья, хвойные деревья и т.д.) [4]. Классические пестициды не всегда эффективны против нематод, небезопасны, и обладают рядом нежелательных побочных эффектов применения [5, 6]. В связи с этим востребованы альтернативные методы [7].

Одним из развивающихся направлений является биологическая защита растений препаратами на основе биологических врагов патогенов. Будучи естественными пожирателями паразитических желудочно-кишечных нематод сельскохозяйственных животных, а также фитопатогенных нематод, микроскопические хищные грибы-нематофаги почвы могут быть потенциально полезными агентами их биоконтроля. Для их успешного применения важно оценить принципы воздействия различных факторов окружающей среды на целевую активность грибов [8].

В данной статье рассмотрено взаимодействие хищных нематофаговых грибов с некоторыми представителями грибной микрофлоры почв Армении.

## Материалы и методы

Сбор образцов почв проводили в Сюникской, Араратской и Лорийской областях Республики Армении (РА) в соответствии с интенсивностью ведения сельского хозяйства: с возделываемых полей, пастбищ, приусадебные садов, огородов, теплиц и невозделываемых земель. Забор образцов почвы с остатками следов растительного детрита и фекалий животных проводили с глубины 5–7 см с использованием стерильных одноразовых пластиковых контейнеров. Все эксперименты проводили непосредственно после сбора образцов. После окончания серий экспериментов образцы хранили при температуре 4 °С, согласно общепринятым методикам [9, 10].

Культивирование нематод проводили в течение 48 ч., в 90 мм чашках Петри на плотных голодных агаризованных средах (3 г агара, 100 мл воды, рН 6–7), в аэробных условиях при температуре 24–25 °С. Для выделения грибов по 1 г образцов почвы было равномерно нанесено на поверхность пластины из 2%-го водного агара в чашках Петри и инкубировано в аэробных условиях при температуре 28 °С. Наблюдения проводились в течение 7–14 дней. Для посева чистых культур грибов использовались стерильные иглы [11]. Морфологические наблюдения проводились методом стереомикроскопии (микроскоп: ОРТИКА microscopes Italy В-810; камера: ОРТИКА microscopes Italy М-114).

Скрининг активности грибов *in vitro* проводился методом микроскопии на нематодах из исследуемых регионов РА: картофельной нематоды *Globodera rostochiensis* и уксусной угрицы *Turbatrix aceti* [12]. Для оценки

активности учитывалось среднее количество ловчих приспособлений через 24 и 48ч из 5 полей зрения по пятибалльной шкале: до 20 колец – 1 балл (неактивный штамм); 20–40 колец: 2 балла (низкая активность); 40–60 колец: 3 (средняя активность); 60–80 колец: 4 балла (высокая активность); выше 80 колец – 5 (высокоактивный штамм). Регистрировалось и число поглощенных нематод [13]. Взаимодействие хищных грибов с др. микромицетами почвы проводилось согласно методу Мехтиевой. В чашках Петри высевали хищный гриб и др. микромицет, выделенный из той же почвы, визуально наблюдая за взаимодействием по мере роста культур [14].

Все эксперименты проводились в пяти независимых сериях – с трехкратным повтором и в аналогичных условиях. Для статистической оценки использовался программный пакет MS Excel. Для оцифровки изображений стереомикроскопии применялись программные пакеты ImageJ [15].

## Результаты

Проведенные исследования показали наличие в почве представителей хищных нематофаговых грибов различных видов: *Arthrobotrys oligospora*, *A. Conoides* и *Dactylariopsis brochopaga* (Рис. 1–2).

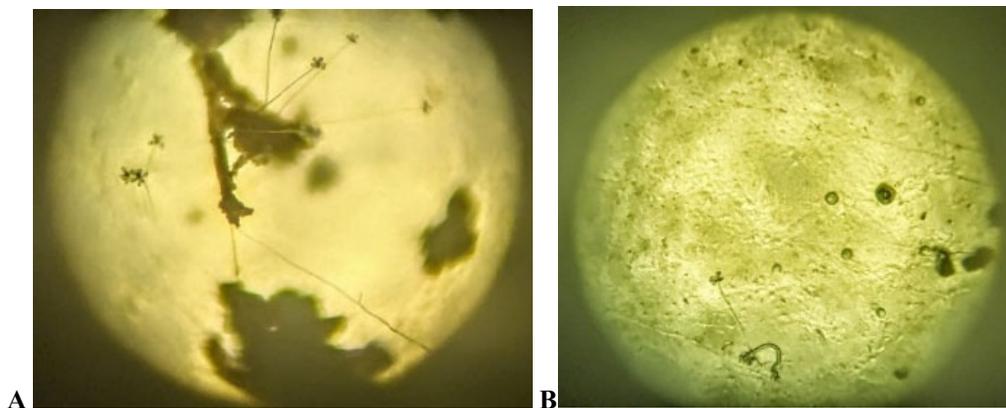


Рис. 1. Нематофаговые грибы (А) и процесс поглощения ими почвенных нематод (В).

Согласно полученным данным, были обнаружены различные виды хищных грибов: *Orbilia oligospora* (Fresen.) Baral and E. Weber (syn. *Arthrobotrys oligospora* (Fresen.); *Orbilia brochopaga* Drechsler и *Arthrobotrys*

*conoïdes* Drechsler. Видовой состав и встречаемость различна в зависимости от климатической зоны и типа почвы. В умеренно-влажных агроклиматических районах встречаемость хищных грибов максимальна. В изученных образцах почвы были выявлены следующие плесневые микромицеты: *Penicillium canescens*, *Aspergillus niger*, *Fusarium oxysporum*, *Trichoderma lignorum*, *Alternaria solani* [16].

Выявленные хищные грибы отличались по нематофаговой активностью и типу взаимодействия с плесневыми грибами (Табл. 1, Рис. 2).

Таблица 1.

**Взаимодействие почвенных микромицетов  
с хищными грибами in vitro.**

- “+++” – полное угнетение хищного гриба антагонистом,  
 “++-” – частичное угнетение антагонистом,  
 “+--” – частичное угнетение антагониста хищным грибом,  
 “-” – полное угнетение антагониста,  
 “0” – нейтральное взаимодействие. А – чистый опыт,  
 В – опыт с нематодами.

Вариант	Плесени	Вид хищного гриба		
		<i>O. oligospora</i>	<i>A. conoïdes</i>	<i>O. brochopaga</i>
А	<i>P. canescens</i>	+++	++-	+++
В		+--	+--	++-
А	<i>A. niger</i>	+++	++-	+++
В		++-	+--	+--
А	<i>F. oxysporum</i>	0	0	+++
В		+--	+--	0
А	<i>T. lignorum</i>	++-	+--	0
В		+--	---	---
А	<i>A. solani</i>	0	+++	+++
В		---	++-	++-

Некоторые микромицеты почвы проявляют антагонистический эффект (*P. canescens*), подавляя рост хищных грибов, в то время, как другие плесневые грибы (*A. niger*) не проявляют выраженного подавляющего воз-

действия. В отдельных случаях наблюдалась интенсификация роста конидий в области соприкосновения культур растущих хищных гифомицетов и плесеней. Плесневые микромицеты рода *Penicillium* значительно угнетают рост изученных хищных грибов. В случае *A. solani* и *F. oxysporum*, угнетения роста гриба *O. brochopaga* не наблюдается.

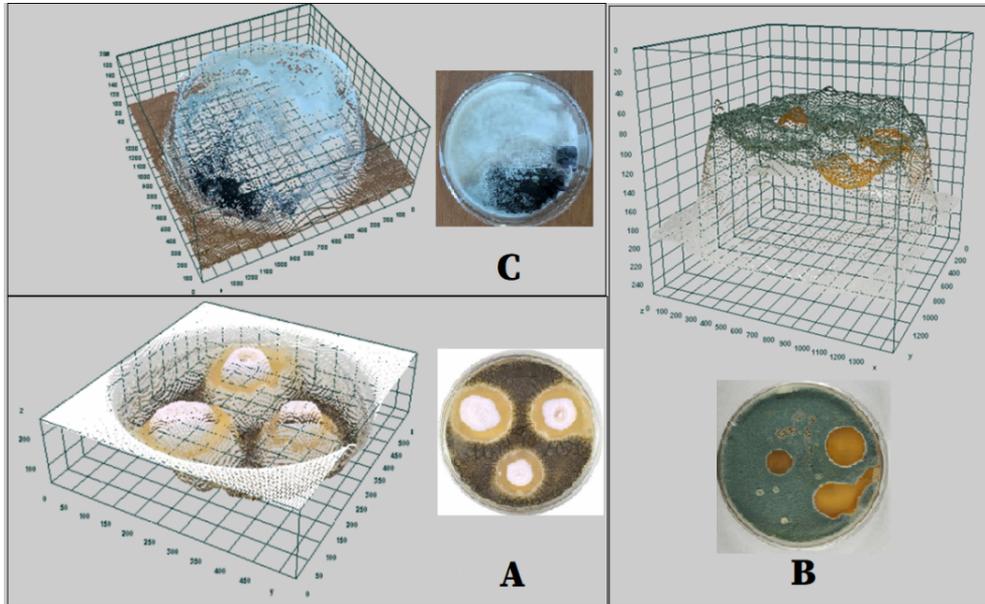


Рис. 2. Подавление хищных грибов плесневыми микромицетами почвы *in vitro*. А – неполное подавление; В – активное подавление; С – отсутствие подавления и стимуляция формирования конидий на границе соприкосновения растущих культур.

## Закключение

Исследование показало, что хищные грибы распространены как в сельскохозяйственных, так и в невозделываемых почвах различных регионов Армении. Они эффективны против нематод. Применение хищных грибов на практике может значительно снизить потребление пестицидов и минимизировать экологические риски сельского хозяйства.

Таким образом, применение инновационных биопрепаратов на их основе потенциально перспективно с точки зрения экологической безопасности и экономической эффективности развития «зеленых технологий» сельского хозяйства и беспестицидного производства овощей и фруктов. В

связи с этим планируется дальнейшее более детальное исследование выделенных культур хищных грибов и их активности по отношению к нематодам-вредителям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Miyittah M., Kosivi R., Tulashie S., Addi M., Tawiah J.* The need for alternative pest management methods to mitigate risks among cocoa farmers in the Volta region, Ghana. *Heliyon*. 2022;8(12): e12591.
2. *Kiontke K., Fitch D.* Nematodes. *Curr Biol*. 2013;23(19): R862-R864.
3. *Kebede I., Gebremeskel H., Bandaw T., Ahmed A.* Prevalence and Risk Factors of Parasitic Gastrointestinal Nematode Infections of Donkeys in Southern Ethiopia. *J Parasitol Res*. 2024; 2024: 3073173.
4. *Zhuge J., Zhou X., Zhou L., Hu J., Guo K.* The Plant Parasitic Nematodes Database: A Comprehensive Genomic Data Platform for Plant Parasitic Nematode Research. *Int J Mol Sci*. 2023 Nov 28; 24(23): 16841.
5. *Lushchak V., Matviishyn T., Husak V., Storey J., Storey K.* Pesticide toxicity: a mechanistic approach. *EXCLI J*. 2018; 17: PP. 1101–1136.
6. *Harman G.* Overview of mechanisms and uses of *Trichoderma spp.* *Phytopathol*. 2006; 96: PP. 190–194.
7. *Chidawanyika F., Mudavanhu P., Nyamukondiwa C.* Biologically Based Methods for Pest Management in Agriculture under Changing Climates: Challenges and Future Directions. *Insects*. 2012 Nov 9; 3 (4): PP. 1171–1189.
8. *Jansson H-B., Persson C., Odeslius R.* Growth and capture activities of nematophagous fungi in soil visualized by low temperature scanning electron microscopy. *Mycologia*. 2000; 92: PP. 10–15.
9. *Nordbring-Hertz B., Jansson H., Tunlid A.* Nematophagous Fungi. In eLS (Ed.). 2011.
10. *Hao L., Guo Y., Wang X., Gao M., Liu T., Ma Y., Zhang Y., Li Q., Wang R., You X.* Preparation and application of biocontrol formulation of nematode-trapping fungus-*Duddingtonia flagrans*. *Vet Parasitol*. 2024 Apr; 327:110119.
11. *Schouten A.* Mechanisms involved in nematode control by endophytic fungi. *Annu. Rev. Phytopathol*. 2016, 54: PP. 121–142.
12. *Yao X., Guo H., Zhang K., Zhao M., Ruan J., Chen J.* *Trichoderma* and its role in biological control of plant fungal and nematode disease. *Front Microbiol*. 2023, 14:1160551.
13. *Wang S., Liu X.* Tools and basic procedures of gene manipulation in nematode-trapping fungi. *Mycology*. 2023, 14(2): PP. 75–90.
14. *Кокколова Л.М.* Хищные грибы из мерзлотных почв Якутии. Методика выделения и исследования // Сб. Трудов конференции. Науч. Исследования и современное образование: материалы Межд. Науч.-практ. Конф. Чебоксары, 2017. СС. 12–13.

15. *Yesayan A., Yesayan T., Babayan B., Esoyan S., Hayrapetyan A., Sevoyan G., Chakhmakhchyan A., Nanagulyan S., Melkumyan M.* Carnivorous Fungi Application for Pesticide-free Vegetable Cultivation. *Functional Food Science* 2024; 4 (9): PP. 325–336.
16. *Zhou L., May T.* Fungal taxonomy: current status and research agendas for the interdisciplinary and globalization era. *Mycology*. 2022 Jul 25;14(1): PP. 52–59.

## **THE STUDY OF INTERACTION BETWEEN PREDATORY HYPHOMYCETES AND SOME MICROMYCETES OF THE SOIL**

*T. Yesayan*

*Yerevan State University*

### **ABSTRACT**

The problem of the production of environmentally friendly agricultural products is very relevant all over the world. One of the actual scopes of development of green agricultural technologies is the application of biological enemies of agricultural pests, as an alternative to pesticides. Predatory hyphomycetes, as the biological enemies of parasitic nematodes, which are pathogenic for crops, are potentially applicable in agriculture.

In the current article nematophagous activity of carnivorous fungi of soil from the various regions of the Republic of Armenia (RA) and their interaction with the other soil micromycetes were studied.

**Keywords:** hyphomycetes, predatory fungi, nematophagous, parasitic nematodes, soil micromycetes, environmentally friendly agriculture.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ПЛАВЛЕНИЯ ДЛЯ СГЕНЕРИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ И РЕАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ДНК

*Д.С. Левченко<sup>2</sup>, М.Г. Никогосян<sup>1</sup>, А.В. Асатрян<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Ереванский государственный университет*

*<sup>2</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет*

*<sup>3</sup>Институт химической физики имени А.Б. Налбандяна  
marlen.nikoghosyan@edu.yasu.am, diana-levchenko1@yandex.ru,  
arevik.asatryan@ichph.sci.am*

## АННОТАЦИЯ

В рамках модели GMPC рассматриваются кривые плавления реальных ДНК. Расчет производится методом анализа результатов произведения трансфер-матриц и суперматриц, созданных на их основе. Температурное поведение степени спиральности определяется как скалярное выражение от произведения суперматриц второго порядка, содержащих в себе как основную трансфер-матрицу, так и ее производную по приведенной энергии спирализации. Расчеты проводились как для случайных сгенерированных, так и для реальных последовательностей. Для сгенерированных последовательностей применены различные последовательности для длин со 100 до 3000 повторяющихся единиц (п.е.). При анализе произвольных случайных последовательностей было показано, что тонкая структура дифференциальных кривых плавления (ДКП) может быть получена для данной случайной последовательности. При исследовании реальных последовательностей *fts* (из *S. dysenteriae*) 92 (п.е.) получены профили кривых плавления и ДКП для данной ДНК. Показано, что для коротких ДНК  $\approx 300$  п.е. пока существует тонкая структура, однако для более коротких  $\leq 200$  тонкую структуру получить не удалось. Сравнение с экспериментом дает схожий результат.

**Ключевые слова:** биополимер, ДКП, тонкая структура, ДНК.

## Введение

Начиная с 60-х годов XX века, проводятся исследования кривых плавления с целью изучения структуры и стабильности ДНК. Сейчас наблюдается новый рост интереса к этой теме применительно к генетическим ис-

следованиям – так, метод плавления высокого разрешения может использоваться как для быстрого анализа патогенов [1–3], так и для определения мутаций вплоть до однонуклеотидных замен [4].

Большинство моделей предполагают, что каждая повторяющаяся единица может находиться в одном из двух состояний: в спиральном или в клубкообразном. К таким моделям относится и модель Зимма-Брэга, которая часто используется для теоретического описания процесса плавления. Она использует усредненные параметры цепи – такие как энтропия и энтальпия плавления и параметр кооперативности. Модель GMPC (Generalized Model of Polypeptide Chain) оперирует более наглядными параметрами процесса плавления [5–7]: энергия водородной связи, число конформаций повторяющейся единицы, масштаб взаимодействия ДНК (длина жесткости одной нити), а параметры модели Зимма-Брэга являются вычисляемыми [8–10].

Особый интерес представляют возможные объяснения наличия тонкой структуры дифференциальной кривой плавления (то есть большое количество пиков). Ранее это свойство объяснялось блочным характером строения ДНК, наличием участков с различным GC-составом. В рамках данной работы мы подтверждаем, что тонкая структура наблюдается и в коротких случайно сгенерированных последовательностях.

Данная работа посвящена разработке программного обеспечения для построения кривых плавления (КП) и дифференциальных кривых плавления (ДКП) с заданными параметрами для конкретной последовательности ДНК и последующей валидации этой программы с помощью полученных в экспериментах ДКП.

## Модель

Работа велась в рамках модели GMPC. Гамильтониан системы в рамках этой модели имеет следующий вид (1):

$$-\beta H = \sum_{i=1}^N J_i \delta_i^A, \quad (1)$$

где  $J_i = \frac{U_i}{T}$ ,  $U_i$  – энергия водородной связи.

Статистическая сумма же вычисляется как:

$$Z = J^* \prod_{i=1}^n G_i J, \quad (2)$$

где  $J^* = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $G$  – трансфер-матрица (3):

$$G_i(\Delta \times \Delta) = \begin{pmatrix} W_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & Q_i - 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & Q_i - 1 \end{pmatrix}, \quad W_i = e^{J_i} = e^{\frac{u_i}{T}} \quad (3)$$

Степень спиральности вычисляется как производная статсуммы, и так как статсумма вычисляется как произведение трансфер-матриц, степень спиральности вычисляется как сложная сумма. Для компактности расчетов вводим суперматрицу  $M$  (4):

$$M_i = \begin{pmatrix} G_i & G'_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix}, \quad G'_i = \frac{\partial G_i}{\partial J_i} \quad (4)$$

Конечная формула, по которой вычисляется степень спиральности (5), такова:

$$\theta_N = \frac{J^*[E \ 0] \prod_{i=1}^n M_i \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} J}{NJ^*[E \ 0] \prod_{i=1}^n M_i \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} J} \quad (5)$$

## Материалы и методы

Для расчета и построения графиков зависимости КП и ДКП было создано программное обеспечение на языке программирования “Python” версии 3.10 – с использованием сторонних пакетов “Matplotlib”, “NumPy” и “SciPy”.

Упрощенный алгоритм вычислений представлен на Рис. 1. Входные параметры: диапазон температур, число итераций, последовательность гетерополимера и параметры повторяющихся единиц: энергия водородной связи, число конформаций повторяющейся единицы, масштаб взаимодействия ДНК (длина жесткости одной нити).

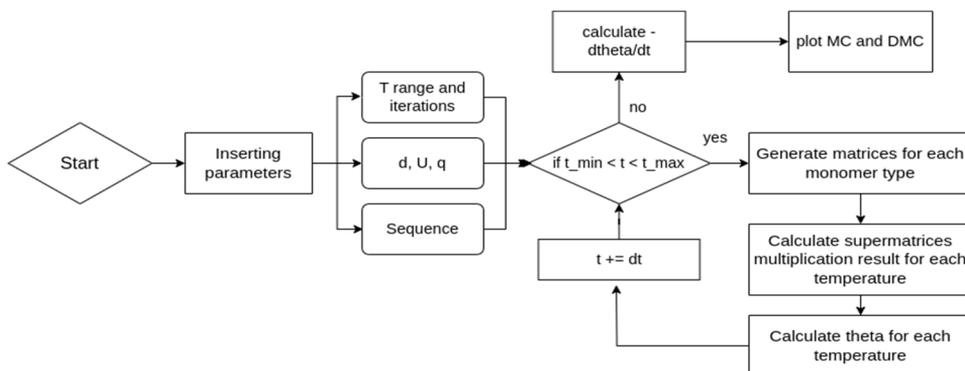


Рисунок 1. Общая схема алгоритма.

## Результаты

В результате данной работы было создано программное обеспечение для расчета КП и ДКП гетерополимера. Графики, полученные в рамках работы, представлены на Рис. 2–4. На Рис. 3 можно наблюдать наличие тонкой структуры у гетерополимера со случайной последовательностью.

На Рис. 4 изображена дифференциальная кривая плавления ДНК-гена *rrsA* бактерии *S. dysenteriae*. Сравнение ДКП последовательности гена *rrsA* может использоваться для определения патогенов в пище [1]. Полученная в ходе данной работы ДКП с высокой точностью повторяет ДКП, полученную экспериментально в рамках статьи [1].

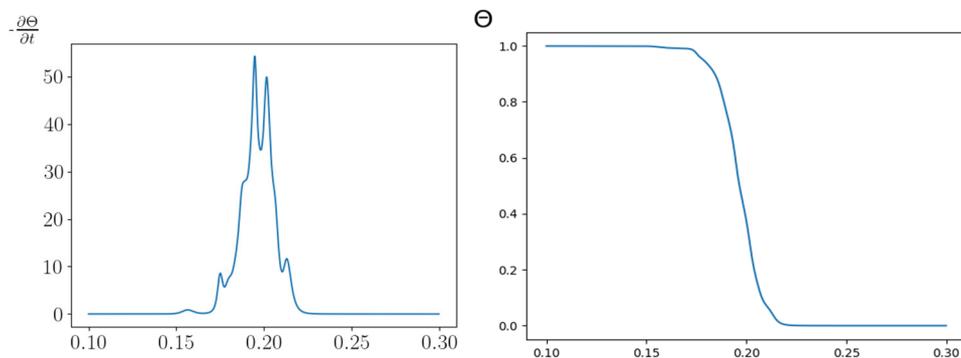


Рисунок 2. График зависимости КП и ДКП от температуры для последовательности гена *cas3*.

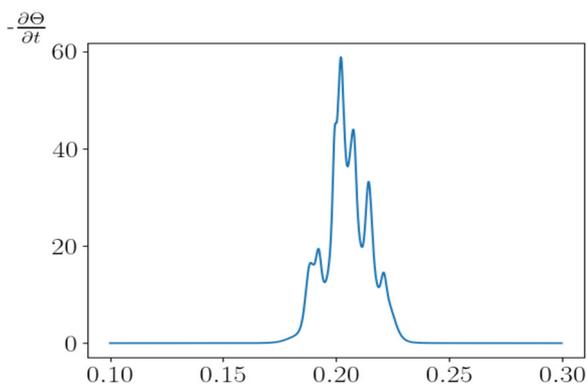


Рисунок 3. График зависимости ДКП от температуры для случайной последовательности ДНК длиной 3 тысячи нуклеотидов.

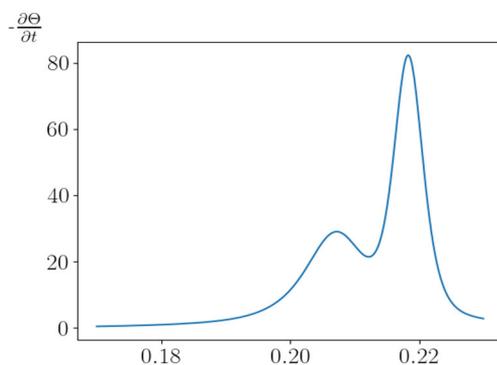


Рисунок 4. График зависимости ДКП от температуры для последовательности гена *rrsA* дизентерийной амебы. График с большой точностью повторяет ДКП, полученную экспериментально в рамках статьи [1].

## Выводы

В рамках работы было написано программное обеспечение для расчета кривых плавления и дифференциальных кривых плавления. Полученные с его помощью графики согласуются с полученными ранее экспериментальными данными. Также были подтверждены теоретические результаты о возможности получения тонкой структуры дифференциальной кривой плавления для случайного гетерополимера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Pakbin B., Basti A., Khanjari A. et al.* Development of high-resolution melting (HRM) assay to differentiate the species of *Shigella* isolates from stool and food samples // “Scien. Rep”, 12, 2022, 473.
2. *Shan Sh., Li R., Xia W. et al.* High-resolution melting real-time polymerase chain reaction assays for subtyping of five diarrheagenic *Escherichia coli* by a single well in milk // “Journal of Dairy Science”, V. 107, Issue 8, 2024. PP. 5416–5426.
3. *Andini N., Wang B., Athamanolap P. et al.* Microbial Typing by Machine Learned DNA Melt Signatures // *Sci Rep* 7, 2017, 42097.
4. *Bruzzone C., Steer C.* High-resolution melting analysis of single nucleotide polymorphisms // *Methods Mol Biol.* 2015;1310. PP. 5–27.
5. *Asatryana A., Mikayelyan H., Stepanyan V.* Helix-Coil Transition in Heterogeneous Biopolymers: Influence of Fixing Bond Scale // “Journal of Contemporary Physics” (Armenian Academy of Sciences) 57 (3), 2022. PP. 308–312.
6. *Badasyan A., Grigoryan A., Mamasakhlisov E., Benight A. and Morozov V.* The helix-coil transition in heterogeneous double stranded DNA: Microcanonical method // “The Journal of chemical physics”, 2005, 123 (19).
7. *Asatryan A., Benight A., Badasyan A.* Origins of fine structure in DNA melting curves // “J. Chem. Phys.” 2024, 161, 055103.
8. *Zimm B. et al.* Determination of the Parameters for Helix Formation in Poly- $\gamma$ -benzyl-L-glutamate. // “Proc. Natl. Acad. Sci”. USA, 1959, v. 45. P. 1601.
9. *Zimm B., Bragg J.* Theory of the Phase Transition between Helix and Random Coil in Polypeptide Chains. // “J. Chem. Phys.”, 1959, v. 31. P. 526.
10. *Zimm B.* Theory of “Melting” of the Helical Form in Double Chains of the DNA Type // “J. Chem. Phys”, 1960, v. 33. P. 1349.

## DIFFERENTIAL MELTING CURVES OF RANDOM GENERATED AND REAL SEQUENCES IN DNA

*D. Levchenko<sup>2</sup>, M. Nikoghosyan<sup>1</sup>, A. Asatryan<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*Yerevan State University*

<sup>2</sup>*Russian-Armenian University*

<sup>3</sup>*A.B. Nalbandyan Institute of Chemical Physics*

## ABSTRACT

Melting curves of real DNA taken from the genome are considered in the frame of the Generalized Model of Polypeptide Chain (GMPC). The calculation is performed by analyzing the results of the product of transfer matrices and super-matrices created on their

basis. The temperature behavior of helicity degree is determined as a scalar expression of the product of second-order super-matrices containing both the main transfer matrix and its derivative with respect to the reduced helicity energy. The calculations were performed for both random generated and real sequences. For the generated sequences, various realizations were applied for lengths from 100 to 3000 repeating units (r.u.). When analyzing random sequences, it was shown that the fine structure of differential melting curves (DMC) can be obtained for a given sequence. In the study of real sequences rrs (from *S. dysenteriae*) 92 (p.u.) the profiles of melting curves and DMCs for this DNA were obtained. It was shown that for short DNA  $\approx 300$  p.u. a fine structure still exists; however, for shorter ones  $\leq 200$ , a fine structure could not be obtained. Comparison with the experiment gives a similar result.

**Keywords:** biopolymer, DMC, fine structure, DNA.

# ТОНКАЯ СТРУКТУРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПЛАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДНК

*М.Г. Никогосян<sup>1</sup>, Д.С. Левченко<sup>2</sup>, В.Ф. Морозов<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Ереванский государственный университет*

*<sup>2</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет*

*marlen.nikoghosyan@edu.y-su.am, diana-levchenko1@yandex.ru,*

*morozov@ysu.am*

## АННОТАЦИЯ

Работа посвящена исследованию модели ДНК в рамках модели ГМРС. Получены кривые плавления (КП) и дифференциальные кривые плавления (ДКП) для двухкомпонентной случайной последовательности повторяющихся единиц модели. Получены аналитические соотношения для машинных вычислений ДКП и корреляционных функций. Подтверждено наличие тонкой структуры ДКП в случайной последовательности повторяющихся единиц без блочной структуры. Выявлено поведение спада корреляций.

**Ключевые слова:** биополимер, ДКП, гетерополимер, статсумма, тонкая структура.

## Введение

Теоретическому исследованию плавления ДНК посвящена обширная литература [1, 2]. Экспериментально было обнаружено наличие тонкой структуры на кривых ДКП [3, 4]. До недавнего времени наличие тонкой структуры объяснялось блочным строением ДНК, что вполне резонно. Были сделаны попытки получения тонкой структуры теоретически, однако для двухкомпонентного гетерополимера требовалось введение нереальных условий [5]. В последнее время, в рамках ГМРС, получены результаты, свидетельствующие о наличии тонкой структуры в случае случайных последовательностей, без введения нереальных условий.

## Методы

Мы работаем в рамках модели GMPC, гамильтониан которой составлен из поворотно-изомерных соображений, т.е. вводится дискретное число конформаций  $\gamma_i$ , принимающее Q-значений, где конформация номер один соответствует спиральному состоянию. Гамильтониан имеет вид произведения символов Кронекера, т.е. если  $\Delta$  повторяющихся единиц находятся в спиральном состоянии, то выделяется энергия, в обратном случае – нет. [6]

$$-\beta H = \sum_{i=1}^N J_i \delta_i^{(\Delta)} = \sum_{i=1}^N J_i \prod_{k=\Delta-1}^0 \delta(\gamma_{i-k}, 1) \quad (1)$$

Модель имеет три параметра: энергетический  $J_i = \frac{U_i}{T}$ , где  $U_i$  есть энергия спирального состояния, число конформаций Q (энтропийный параметр), и топологический  $\Delta$ , определяющий число повторяющихся единиц, фиксируемых одной водородной связью. Трансфер-матрица модели представлена в [7]. С помощью трансфер-матриц записывается статсумма, соответствующая гамильтониану (1),

$$Z = J^* (\prod_{i=1}^N G_i) J_*, \quad (2)$$

где  $J^*$  и  $J_*$  введены в [7].

Для гомополимерного случая имеется аналитическое соотношение для приведенной к одной повторяющейся единице свободной энергии  $f$  [11]

$$f = -kT \ln(\lambda_{1i}), \quad (3)$$

где  $\lambda_{1i}$  – главное собственное число трансфер-матрицы  $G_i$ .

Тем самым существует термодинамический предел в данном случае и для некоторых гомополимеров он достигается при десятках повторяющихся единицах. В случае гетерополимера явного аналитического соотношения нет, но термодинамический предел существует и достигается с 3000 повторяющихся единиц, что следует из [5].

Степень спиральности в рамках GMPC вычисляется по формуле (4) [5], которая упрощена введением суперматриц  $M_i$ :

$$\theta = \frac{J^*(E_{\Delta} O_{\Delta}) (\prod_{i=1}^N M_i) \begin{pmatrix} E_{\Delta} \\ O_{\Delta} \end{pmatrix} J_*}{NZ}, \quad M_i(2\Delta \times 2\Delta) = \begin{pmatrix} G_i & (G_i)'_{J_i} \\ O & G_i \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $(G_i)'_{J_i}$  – это производная матрицы  $G_i$  по  $J_i$ ,  $E_{\Delta}$ , и  $O_{\Delta}$  – единичная и нулевая матрицы размера  $(\Delta \times \Delta)$ .

Производная  $\frac{\partial \theta}{\partial T}$  вычисляется из (4) прямым дифференцированием и вводится для компактности записи, супер-матрица  $F_i$ , составленная из супер-матриц  $M_i$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{J_1(\prod_{i=1}^N F_i) J^3 J_1(\prod_{i=1}^N F_i) J^4 - J_1(\prod_{i=1}^N F_i) J^1 J_1(\prod_{i=1}^N F_i) J^2}{NZ^2} \quad (5)$$

$$F_i(4\Delta \times 4\Delta) = \begin{pmatrix} M_i & (M_i)'_T \\ O & M_i \end{pmatrix},$$

где  $J_1, J^1, J^2, J^3$  и  $J^4$  – соответствующие строка и столбцы.

Таким образом, выражения (4,5) приведут к численному вычислению как КП, так и ДКП. Наши аналитические расчеты полностью подтверждают результаты, полученные численно в [5, 9, 10]. В гомополимерном случае были получены результаты для корреляционной функции [8]. Аналитически было показано, что корреляционная функция спадает в масштабе ста, а для некоторых гомополимеров – тысячи повторяющихся единиц. Для гетерополимера, аналогично, корреляционная функция, определяемая как среднее от корреляций на  $[i; (i+D)]$  участках:

$$g(D) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(D) \quad (6),$$

$$\text{где } g_i(D) = \left\langle \delta_i^{(4)} \delta_{i+D}^{(4)} \right\rangle - \left\langle \delta_i^{(4)} \right\rangle \left\langle \delta_{i+D}^{(4)} \right\rangle \quad (7)$$

есть разница средних вероятностей одновременного образования связи и произведения отдельных вероятностей. В рамках ГМРС (в зависимости от длины участка  $D$ ) она записана в [10].

## Результаты

Полученные кривые КП качественно соответствуют экспериментальным: они имеют сигмоидальный характер [9]. На Рис. 1а видно, что при  $\Delta=3$  тонкой структуры нет, что определяет отсутствие специальных условий при  $\Delta=4$  и, особенно, начиная с  $\Delta=5$ , качественно видна тонкая структура.

## Выводы

Наблюдаемое нами теоретическое появление тонкой структуры указывает на необязательность блочной структуры ДНК. Появление тонкой структуры на ДКП мы объясняем большим разнообразием мелких последовательностей, например:

$AA\ BB\ AB\ BA, \Delta = 2,$

$AAA\ BBB\ ABB\ BAA\ AAB\ BBA\ BAB\ ABA, \Delta = 3.$

Наши вычисления для разных  $\Delta$  показывают, что спад корреляции происходит гораздо быстрее (Рис.1б), чем в случае гомополимера, что тривиально, однако вычисление масштаба корреляции позволит в дальнейшем получить гомополимерную аппроксимацию гетерополимерных результатов, что давно используется при анализе ДКП ДНК.

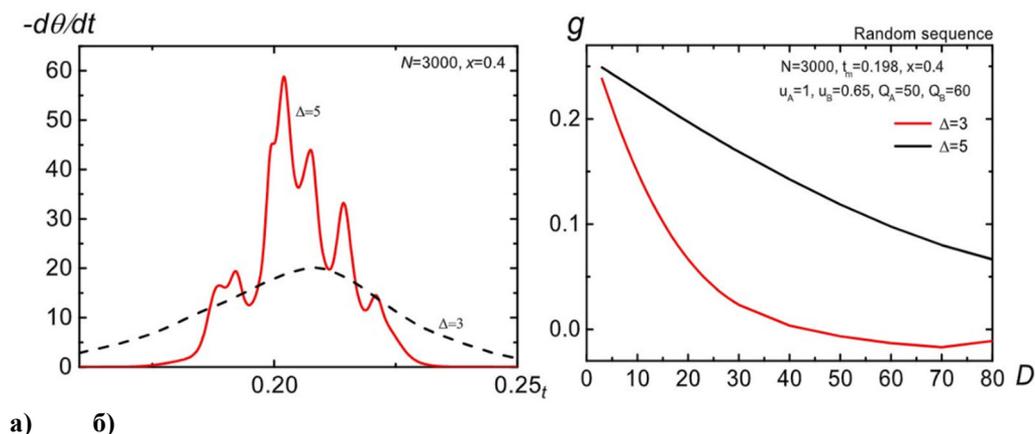


Рисунок 1. а) кривая ДКП при  $\Delta=3, \Delta=5, t^{-1} = \frac{U_A}{kT}$ ,  
 б) корреляционная функция при  $N=3000, t_m=0.198, U_A=1, U_B=0.65, Q_A=50, Q_B=60,$   
 при  $\Delta=3$  и  $\Delta=5$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Mattice W., Suter U.* Conformational Theory of Large Molecules: Rotational Isomeric State Model in Macromolecular Systems // "A.Wiley-Interscience publication", 1994.
2. *Cantor R., Shimmel T.* Biophysical Chemistry //San-Francisco, "W.H. Freeman and Company", Part 1–3,1980.
3. *Harutyunyan H., Dalyan E., Aslanian V., Yu Lando D., Akhrem A.* A new method for determining the relative effect of ligands on AT- and GC-base pairs in DNA: application to metal ions, protons and two amino acids // "Nucleic acids research", 1990, 18, 6413.
4. *Yu Lando D., Grigoryan I., Fridman A., Galyuk E.* Ученые записки Ереванского государственного университета, сер. «Физические и Математические науки», 2013, 3, 577.
5. *Asatryan A.* Influence of aqueous solutions of low-molecular ligands on helix-coil transition in heterogeneous biopolymers // PhD dissertation (2019).

6. *Наурян Ш., Мамасакхлисов Е., Морозов В.* The helix-coil transition in polypeptides: A microscopic approach // “Biopolymers”, 1995, 35, 75.
7. *Тоноян Ш., Асатрян А., Мамасакхлисов Е., Морозов В.* Переход «спираль–клубок» в биополимерах с многокомпонентной гетерогенностью по энергии и числу конформаций // “J. of Contemporary Physics”, 2014, 49, 132с.
8. *Morozov V.* Order-disorder transitions in one-dimensional systems of macromolecules. // “Doctoral dissertation”, Yerevan, 1996.
9. *Asatryan A., Mikayelyan H., Stepanyan V.* Helix-Coil Transition in Heterogeneous Biopolymers: Influence of Fixing Bond Scale // “J. of Contemporary Physics”, 2022, 57, 308с.
10. *Асатрян А., Мамасакхлисов Е., Морозов В.* Корреляционная функция гетерополимеров в области перехода спираль-клубок // “J. of Contemporary Physics”, 2024.

## FINE STRUCTURE OF DIFFERENTIAL MELTING CURVES OF RANDOM DNA SEQUENCES

*M. Nikoghosyan<sup>1</sup>, D. Levchenko<sup>2</sup>, V. Morozov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Yerevan State University*

<sup>2</sup> *Russian-Armenian (Slavonic) University*

### ABSTRACT

The work is devoted to the study of the DNA model within the framework of the GMPC model. Melting curves (MC) and differential melting curves (DMC) for a two-component random sequence of repeating units of the model are obtained. Analytical relations for machine calculations of DMC and correlation functions have been obtained. The presence of a fine structure of DMC in a random sequence of repeating units without a block structure was confirmed. The behavior of correlation decay was obtained.

**Keywords:** biopolymer, DMC, heteropolymer, statistical sum, fine structure.

**Восемнадцатая годовичная научная конференция  
(2–6 декабря 2024г.)  
Сборник научных статей:  
физико-математические и естественные науки**

*Главный редактор РНИ – М.Э. Авакян  
Редакторы – А.С. Есаян, Н.Б. Бадалян  
Компьютерная верстка – А.Г. Антонян*

*Editor-in-Chief of the RNI – M. Avakyan  
Editors – A. Yesayan, N. Badalyan  
Computer layout – A. Antonyan*

Адрес Редакции научных изданий  
Российско-Армянского университета:  
0051, г. Ереван, ул. Овсена Эмина, 123  
тел./факс: (+374 12) 77-57-75 (внутр. 392)  
e-mail [maria.avakian@rau.am](mailto:maria.avakian@rau.am)

Address of the Editorial Board  
of Scientific Publications of  
the Russian-Armenian University:  
0051, Yerevan, st. Hovsep Emin, 123  
tel./fax: (+374 12) 77-57-75 (ext. 392)  
e-mail: [maria.avakian@rau.am](mailto:maria.avakian@rau.am)

Заказ № 20  
Подписано к печати 27.06.2025  
Формат 60x100<sup>1/16</sup>.  
Бумага офсетная № 1  
Объем 10 усл. п.л. Тираж 100 экз.

Order № 20  
Signed for publication on 27.06.2025  
Format 70x100<sup>1/16</sup>. Offset paper № 1  
Volume 10 conv. p.l.  
Circulation 100 copies

